

# 열탄성 구조물의 최적설계

조 희 근\*(아주대원 시스템공학부) 박 영 원(아주대 시스템공학부)

## Design Optimization of Thermo-Elastic Structures

Cho, Hee-Keun(System Dept Ajou), Park, Young-Won(System Dept Ajou)

### ABSTRACT

Multi-disciplinary optimization design concept can provide a solution to many engineering problems. In the field of structural analysis, much development of size or topology optimization has been achieved in the application of research. This paper demonstrates an optimum design of a multi-layer cylindrical tube which behaves thermoelastically. A multi-layer cylindrical tube that has several different material properties at each layer is optimized within allowable stress and temperature range when mechanical and thermal loads are applied simultaneously. To analyze these problems using an efficient and precise method, the optimization theories are adopted to perform thermoelastic finite element analysis.

**Keywords** : Thermoelastic(열탄성), Finite Element Method (유한요소법), Thermal Stress (열응력)

### 1. 서론

최적화는 특정한 설계요구조건을 만족시키면서 원하는 설계 목적 파라미터를 구하는 수치해석 방법이다. 열탄성 해석을 필요로 하는 구조물로는 원자로, 핵연료봉, 고온고압을 받는 파이프 등 각 산업분야의 많은 부분에서 쓰이고 있다.

열과 압력을 동시에 받는 튜브 구조물은 열전도계수(Conduction Coefficient), 열전달계수(Convection Coefficient), 열플럭스(Heat Flux), 열발생(Heat Source), 온도, 치수, 압력 등이 서로 의존적이며 특히 다층 튜브의 경우에는 각 재료의 열전달 및 열팽창 특성이 틀리기 때문에 응력 현상이 복잡하게 나타난다. 이러한 구조물의 무게를 최소화하기 위한 최적두께를 구하기 위하여 열탄성 유한요소 해석에 최적화 개념을 도입하였다.

할 수 있다. 열확산에 의한 속도항을 제외하면 전도, 대류, 복사를 포함하는 일반적인 2차원 평면의 유한요소 평형식은 검사체적의 평형식으로부터 식(2)과 같이 나타난다.

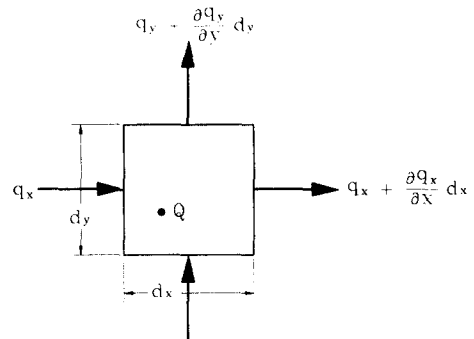


Fig. 1 Differential control volume for heat transfer

### 2. 비선형 열전달 유한요소방정식

일반적인 정상상태의 열전달 해석은 Fig.1의 검사체적(Control Volume)의 평형관계식으로부터 유도

$$q_x dy + q_x dy + Q dx dy + \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx$$

비선형 열전달 평형식<sup>(4)</sup>은 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned}
 ('K^k + 'K^c + 'K')\Delta\theta^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t} \\
 Q^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}Q^{r(i-1)} - {}^{t+\Delta t}Q^{k(i-1)} & \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서  $i$  번째 반복중분의 끝에서의 절점의 온도는 식(3)과 같이 된다.

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)} \quad (3)$$

### 3. 비선형 열탄성 해석 정식화

열응력을 받지 않는 초기 기준온도를  $\theta_0$  라고 하면 기계적 변형율과 열변형율에 의한 전체응력은 다음과 같다.

$$\tau = C(\epsilon - \epsilon^{th}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 ({}^t_0K_L + {}^0_0K_{NL})\Delta U^{(i)} & \\
 = ({}^{t+\Delta t}R + R) - {}^t_0F & \quad (5)
 \end{aligned}$$

$\epsilon$  : Engineering Strain

$\epsilon^{th}$  : Thermal Strain

$R_t$  : 온도에 대한 상당의력

식(13)은 비선형 열탄성 유한요소 평형식이다.

### 4. 최적화

#### 4.1 유용방향법

유용방향법<sup>(2,3)</sup>(The Method of Feasible Direction)은 제약 최적화 문제를 푸는 가장 먼저 개발된 기본법의 한가지이다. 이방법의 기본원리는 한 유용설계에서 보다 개선된 유용설계로 이동시키는 것이다. 따라서 유용설계  $X^{(k)}$ 가 주어지면 개선하는 유용방향  $S^{(k)}$ 를 결정하여 충분히 작은 이동거리  $\alpha > 0$ 에 관하여 다음의 두 성질을 만족하도록 한다

i) 새로운  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha S^{(k)}$ 는 유용.

ii) 새로운 목적함수는 지난번 것보다 작다.

$$\text{즉 } f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)}).$$

개선되는 유용방향은 작은 이동거리에서 엄격히 유용내에 남으면서 목적함수를 줄이게 정의한다. 아래와 같은 변수의 계속적인 반복을 통하여 수렴이 이루어진다.

$$X^q = X^{q-1} + \alpha S^q \quad (6)$$

### 5. 열탄성 최적화 해석 알고리즘

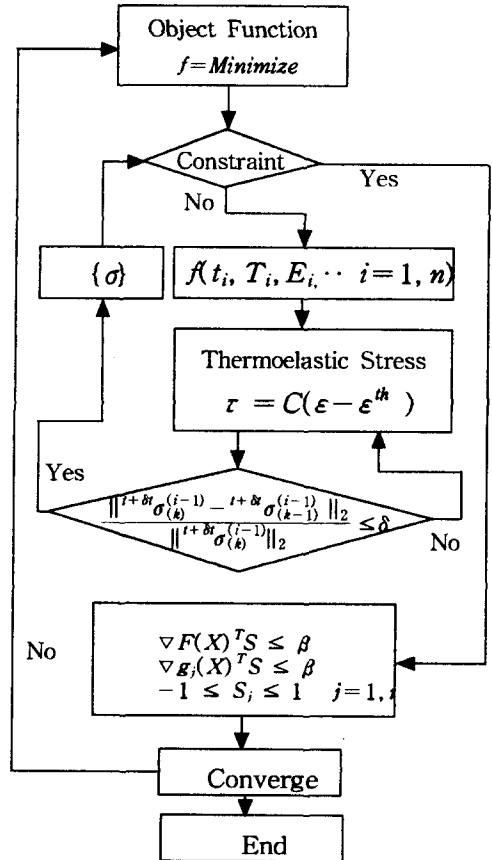


Fig. 2 Thermoelastic optimization algorithm

본 연구에서 위에서 유도한 열탄성 수치해법을 최적화<sup>(1)</sup>에 응용하여 응력 구속조건 하에서 열탄성 구조물을 최적화했다. Fig. 2는 열탄성 최적화 알고리즘을 간단히 표시한 것이다. 최적화 알고리즘에서 제약함수로 주어진 응력 함수  $f(t_i, T_i, E_i, \dots i=1, n)$ 는 FEM 열탄성해석 알고리즘으로 넘겨지며 여기서 응력을 계산하여 수렴성 조건 식(7)를 만족 할 때까지 반복계산<sup>(5)</sup>을 하게된다.

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t}\sigma^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\sigma^{(k)}\|_2} \leq \delta \quad (7)$$

## 6. 열탄성 다층실린더 최적설계

내부에서 압력이 작용하면서 열전달이 일어나는 다층 실린더를 대상으로 목적함수가 전체 무게로 주어질 때 각 층의 두께를 최적화한다 이때 각각의 재료상수들이 Table 1, 2에 나타난 바와 같이 온도에 의존적인 다항 함수이다. 모델은 Fig. 3와 같이 지름이 80mm인 원통형 실린더로써 스테인레스, 알루미늄, 철의 세 층으로 이루어 졌으며 각 층의 열전달 계수 및 물성치는 Table. 1, 2에 나타내었다.

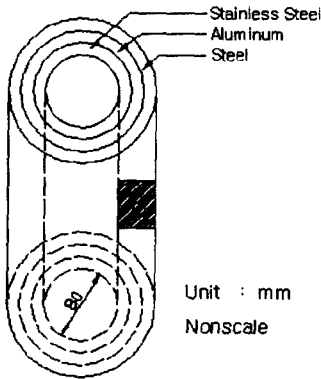


Fig. 3 Multi-layer cylindrical tube

Table. 1 Material property of each layer

| Material        | Property               | Given Value         |
|-----------------|------------------------|---------------------|
| Stainless Steel | $K(W/mm^{\circ}C)$     | $15.1e-3 - 2.e-4*T$ |
|                 | $\alpha (1/^{\circ}C)$ | $17.3e-6$           |
|                 | $E (GPa)$              | 190.                |
|                 | $\nu$                  | 0.3                 |
|                 | $\rho (Kg/mm^3)$       | $7.92e-6$           |
| Al              | $K(W/mm^{\circ}C)$     | $237.e-3 - 2e-4*T$  |
|                 | $\alpha (1/^{\circ}C)$ | $22.5e-6$           |
|                 | $E (GPa)$              | 71.                 |
|                 | $\nu$                  | 0.3                 |
|                 | $\rho (Kg/mm^3)$       | $2.7e-6$            |
| Steel           | $K(W/mm^{\circ}C)$     | $11.2e-3 - 2e-4*T$  |
|                 | $\alpha (1/^{\circ}C)$ | $11.9e-6$           |
|                 | $E (GPa)$              | 210.                |
|                 | $\nu$                  | 0.3                 |
|                 | $\rho (Kg/mm^3)$       | $7.85e-6$           |

Fig. 4는 Fig. 3의 다층 실린더 모델을 해석하기 위한 유한요소 모델이다. 각각의 치수 및 경계조건은 그림에 나타난 바와 같으며 최적화 계산을 수행하기 전에 각 층의 두께가 2mm로 동일한 경우 주어진 경계조건 하에서 열응력 및 온도분포를 계산하며 앞에서 기술한 열탄성 유한요소해석 정식화의 타

당성을 검증한다. 실린더 내부에서 10MPa의 압력과  $0.4-2.5e-4*T$  와 같이 온도의 함수로 주어지는 열플럭스가 있으며 외부에서는 열대류가 일어난다. 열플럭스계수와 열대류계수등의 경계조건은 Table. 2에 나타내었다.

이와 같이 열전달의 계수들이 온도에 의존적인 경우는 비선형 열전달 해석을 수행하여야 되며 이 수식들은 앞절에서 제시하였다.

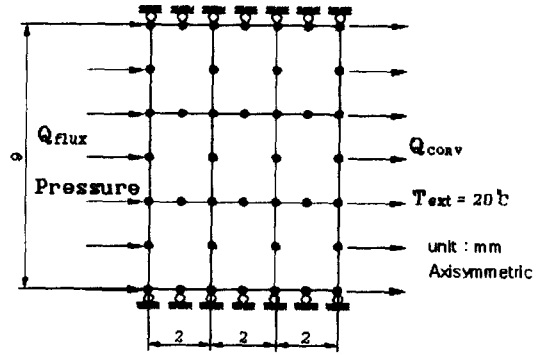


Fig. 4 Finite element analysis model of multi-layer cylindrical tube

Table. 2 Boundary condition of cylindrical tube

| Properties                      | Given values         |
|---------------------------------|----------------------|
| $h (W/mm^2 \text{ } ^{\circ}C)$ | $40.e-3 - 8.75e-5*T$ |
| $Q_{flux} (W/mm^2)$             | $400.e-3 - 2.5e-4*T$ |
| $T_{ext}(^{\circ}C)$            | 20.                  |
| Pressure(MPa)                   | 10.                  |
| $T_0(^{\circ}C)$                | 20.                  |

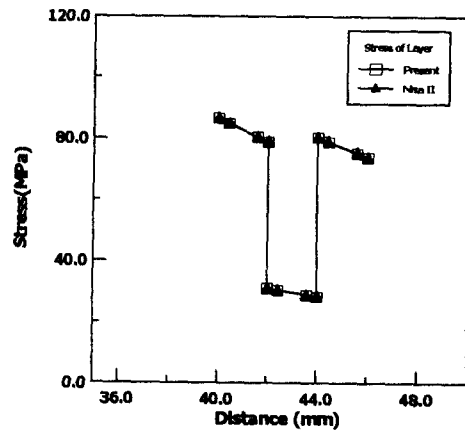


Fig. 5 Stress of cylindrical tube when internal pressure is applied

Fig. 5은 내부의 압력만 작용하였을 경우 실린더의 내측면에서 바깥면까지의 두께에 따른 응력의 변화를 나타낸다. 유한요소 정식화에 의한 해석결과와 상용패키지 Nisa II와의 결과를 비교하였다.

다음은 열탄성의 다층 실린더의 무게를 최적화한다. 최적화하기 위한 목적함수(Object Function)는 무게로 주어지며 구속조건은 각 층의 제일 안쪽과 바깥쪽의 응력 6개와 제일 바깥쪽의 온도 1개를 포함하여 총 7개의 구속조건이 주어졌으며 설계변수(Design Variable)는 각 층의 두께 3개가 된다. 다음은 최적화하기 위한 정식화이다.

Minimize:

$$f = H * (2\pi(40. + \frac{t_1}{2}) * t_1 * \rho_1 + 2\pi(40. + t_1 + \frac{t_2}{2}) * t_2 * \rho_2 + 2\pi(40. + t_1 + t_2 + \frac{t_3}{2}) * t_3 * \rho_3)$$

$t_1$  : Stainless steel thickness

$t_2$  : Aluminum thickness

$t_3$  : Steel thickness

Subject to :

$$0.4 \leq t_1 \leq 3.7 \quad 0.3 \leq t_2 \leq 3.2$$

$$0.8 \leq t_3 \leq 5.5$$

$$\sigma_1 \leq 150. \quad \sigma_2 \leq 150.$$

$$\sigma_3 \leq 60. \quad \sigma_4 \leq 60.$$

$$\sigma_5 \leq 185. \quad \sigma_6 \leq 185.$$

$$T_6 \leq 29.$$

위의 최적화 정식화에서 구속조건은 각 층의 응력과 바깥쪽의 온도로 주어졌다.  $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 의 응력은 Fig. 6의 그림에 표시하였다. 위의 정식화에 의하여 다층 실린더의 열탄성 최적화를 수행하면 결과는 Table.3과 같다.

Table. 3 The results of optimization

| Design Variable          |             | Object Function |
|--------------------------|-------------|-----------------|
| Optimized Thickness (mm) | $t_1=1.093$ | $f=1.07e-2$     |
|                          | $t_2=3.200$ |                 |
|                          | $t_3=1.331$ |                 |

최적화의 결과로 나타난 각 층의 두께는 Table. 3

과 같으며 이때의 응력 분포는 Fig. 6과 같다. 안쪽의 스테인리스 층의 응력 변화가 완만한 형태를 보이고 있다. 최적화된 다층 실린더의 최소 무게는 1.07e-2 Kg/mm<sup>3</sup> 된다.

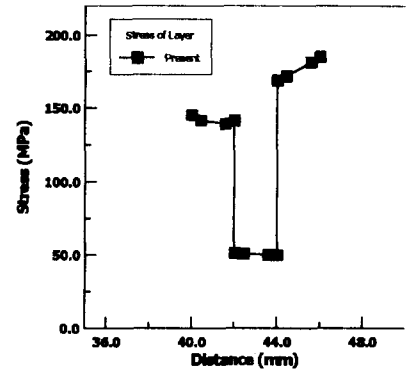


Fig. 6 Stress of cylindrical tube after optimized.

## 7. 결론

유한요소를 이용한 구조물의 최적설계에서 현재까지 대부분의 해석이 탄성, 진동 혹은 유체해석 등 각각의 독립된 분야에서 행해졌다. 이러한 단점을 극복하고 유한요소해석을 통한 Multi-disciplinary 한 최적화에 접근하기 위하여 열탄성 거동을 나타내는 문제를 해석하였다. 최적화 문제를 푸는 방법의 하나인 유용방향법(Feasible directions algorithm) 알고리즘을 열탄성 유한요소 정식화에 적용하여 열탄성 거동을 나타내는 다층 실린더의 무게를 최적화하였다.

## 8. 참고 문헌

1. M. E. M. El-Sayed, C.-K. Hsiung, "Optimum structural design with parallel finite element analysis", Computer and Structure, Vol. 40, No. 6, pp.1469-1474, 1988
2. F. Moses, "Optimum structural design using linear programming", ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 90, No. ST6, pp 89-104, 1964
3. J. T. Betts, "A gradient projection-multiplier method for nonlinear programming", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 24, No. 4, pp.523-548, 1978
4. K. J. Bathe, "Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer", Nuclear
5. J. S. Sobieski, "Sensitivity of complex, internally coupled system", AIAA Journal, Vol. 28, No. 1, pp.153-160, 1990