

## 육면형 병렬기구의 특이점 해석

정태중\*(고려대학교 대학원), 최우천, 송재복, 홍대희(고려대학교)

### Singularity Analysis of a Cubic Parallel Manipulator

T. J. Jung(Graduate School, Korea Univ.), W. C. Choi, J.-B. Song, D. Hong(Korea Univ.)

#### ABSTRACT

Singular points are those at which the determinant of a Jacobian matrix is zero. A parallel manipulator gains mostly an extra DOF at the singular points, where it can not be properly controlled. In this study, singular points of a cubic parallel manipulator are illustrated by obtaining the determinant of a Jacobian matrix mathematically, and the singular points of the manipulator are found to be three separate planes in a 3D space. The dependency among links for each singular point is determined by applying linear algebra. Also, the singular points and workspace of the cubic parallel manipulator are plotted to check if the workspace contain singular points.

**Key Words** . Parallel Manipulator(병렬기구), Singularity(특이점), Jacobian(자코비안), Workspace(작업공간), Linear Algebra(선형대수).

#### 1. 서론

병렬기구에서는 기존에 주로 사용되던 개루프 구조의 직렬기구와 달리, 복수의 링크가, 움직이는 플랫폼과 고정된 베이스를 연결시키는 폐루프 구조를 취하므로, 직렬기구에 비해 강성이 크고 정밀도가 높으며 고속을 얻을 수 있다. 반면, 병렬기구는 작업공간이 직렬기구에 비해 협소하고, 작업공간의 경계에서만 특이점이 생기는 직렬기구와는 달리 내부에서도 특이점이 생길 수 있다. 이러한 작업공간의 내부에 생기는 특이점은 직렬기구에서의 특이점과는 반대로 기구의 자유도를 증가시키므로 이 위치에서 기구는 외력을 버티지 못하고 제어가 불가능한 상태가 된다. 따라서 병렬기구에서 특이점의 위치를 파악하는 것은 매우 중요하다.

병렬기구의 특이점에 관한 연구들은 다음과 같다. Hunt[1]는 screw 이론을 사용하여 기구의 특이점을 찾았다. Fichter[2]는 Stewart-Gough형 병렬기구의 몇가지 특이형상을 제시하였다. Merlet[3]은 Grassmann 기하학을 사용하여 병렬기구의 특이점들 기구의 형상과 연관시켜 파악하였다. Gosselin[4] 등은 폐루프 기구에서 특이점을 자코비안과 연관시켜 분류하였다. Zlatanov[5] 등은 기구의 순기구학 모델을 통해 특이점 해석을 하였다.

본 연구에서는 육면형 병렬기구의 자코비안 행렬을 구하여 행렬식을 얻고, 행렬식을 0으로 하는 공간의 위치가 기구의 특이점이 되므로, 그 위치를 도식함으로써 특이점을 확인할 수 있고, 특이점을 나타내는 위치는 수식에 의해 해석적으로 주어짐을 보인다. 그리고, 특이점으로 나타나는 각각의 위치가 어떤 링크들 간의 의존성에 의해 주어지는지를 선형대수를 적용하여 확인한다.

#### 2. 병렬기구의 특이점

병렬기구에서 특이점은 관절 좌표공간에서 말단 장치 좌표공간으로의 변환을 수행하는 자코비안 행렬이 특이행렬이 되어 행렬식의 값이 0이 될 때 발생한다. 자코비안 행렬을  $J$ 라고 하면,

$$J = \begin{bmatrix} s_1^T & (s_1 \times P_1)^T \\ s_2^T & (s_2 \times P_2)^T \\ s_3^T & (s_3 \times P_3)^T \\ s_4^T & (s_4 \times P_4)^T \\ s_5^T & (s_5 \times P_5)^T \\ s_6^T & (s_6 \times P_6)^T \end{bmatrix} \quad (1)$$

가 된다. 여기서  $s$ 는 각 링크의 단위방향벡터이고,  $P$ 는 베이스 좌표계 원점으로부터 각 링크의 플랫폼 쪽 끝점으로서의 벡터이다. 자코비안 행렬의 행들은 각 링크의 플랫폼 좌표계로 이뤄져 있기 때문에 링크들이 선형 독립이 되어야만, 자코비안 행렬이 특이행렬이 되지 않고 역행렬이 존재함을 알 수 있다.

자코비안 행렬의 행렬식은 일반적으로 매우 복잡하므로 직접 구하기가 쉽지 않으나 Mathematica를 사용하여 행렬식을 수식으로 구해내는 것이 가능하다. 기구의 회전행렬이나 병진벡터 중에 어느 하나를 고정시킨 경우, 자코비안 행렬은 병진이나 회전에 관한 세 개의 미지수로 표현된다. 이 행렬의 행렬식을 구하면, 일반적으로 이들 미지수에 관한 3차식이 얻어진다. 만약 회전행렬을 고정시킨 경우라면, 이 3차식은 공간에서 곡면이 되고 이것은 그 기구의 일정자세 작업공간에서의 특이점의 위치를 나타낸다.

특이점은 작업공간과 마찬가지로 기구의 설계변수들, 즉 각 링크의 좌표점의 상대적 위치에 의해 결정된다. 그러므로, 기구의 설계단계에서 특이점과 작업공간을 공간에 도시함으로써 작업공간이 특이점이 효과적으로 벗어나도록 할 수 있다.

특이점을 구할 때 설계변수들을 모두 미지수로 놓고 해석하는 것은 거의 불가능하다. 따라서, 본 연구에서는 육면형 병렬기구의 설계변수를 적용하여 이 기구에 대한 특이점의 공간 상의 위치들과 이들 위치의 의미를 링크들 간의 상호 의존성과 연관시켜 파악한다.

### 3. 육면형 병렬기구의 특이점

Fig. 1은 육면형 병렬기구를 보여준다

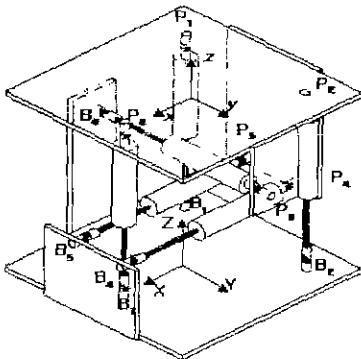


Fig. 1 Schematic of the Cubic Parallel Manipulator.

해석에 사용된 각 조인트의 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 {}^p P_1 &= \begin{bmatrix} -140 \\ -140 \\ -28 \end{bmatrix}, {}^p P_2 = \begin{bmatrix} -140 \\ 140 \\ -28 \end{bmatrix}, {}^p P_3 = \begin{bmatrix} 140 \\ 0 \\ -28 \end{bmatrix}, \\
 {}^p P_4 &= \begin{bmatrix} -177 \\ 70 \\ -280 \end{bmatrix}, {}^p P_5 = \begin{bmatrix} -177 \\ -70 \\ -280 \end{bmatrix}, {}^p P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 177 \\ -140 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} -140 \\ -140 \\ 28 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -140 \\ 140 \\ 28 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -140 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix}, \\
 B_4 &= \begin{bmatrix} 177 \\ 70 \\ 130 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 177 \\ -70 \\ 130 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -177 \\ 280 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서  $P$ 는 6개의 링크의 플랫폼 쪽 끝점 좌표를 나타내고 위 첨자  $p$ 는 플랫폼 좌표계를 기준으로 했음을 나타낸다.  $B$ 는 베이스 좌표계를 기준으로 베이스 쪽 끝점 좌표를 나타낸다. 플랫폼 좌표계와 베이스 좌표계는 Fig. 1에 주어졌다. 이들 좌표를 적용하고 회전행렬  $R$ 을 단위행렬로 고정시킨 후 병진벡터  $T$ 의  $x, y, z$ 를 미지수로 하여 자코비안 행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x & y & -56+z & 7840-28z-140z & -7840+28x+140z & 140x-140y \\ x & y & -56+z & -7840-28y+140z & -7840+28x+140z & -140x-140y \\ x & y & -56+z & -28y & 7840+28x-140z & 140y \\ -351+x & y & -110+z & -28780-130y+70z & 28550+130x-177z & 24780-70x+177y \\ -351+x & y & -110+z & 28780-130y-70z & 28550+130x-177z & -24780+70x+177y \\ x & 351+y & -120+z & -28140-280y-170z & 280x & 177z \end{pmatrix} \tag{3}$$

이 자코비안 행렬의 행렬식은 다음과 같이 주어진다.

$$2750936832000(177x-182y-177(-56+z))(56+x-z)(-56+z) \tag{4}$$

식 (4)를 살펴보면 자코비안의 행렬식이 3개 항의 곱으로 표현되고, 각 항은 공간에서 평면의 식임을 알 수 있다. 기구의 특이점은 행렬식을 0으로 하는 위치이므로 각 평면상의 임의의 점들은 모두 특이점이 된다. 이들 세 평면을 편의 상 특이평면이라고 부르기로 한다. Fig. 2는 세 개의 특이평면을 보여주고 있다.

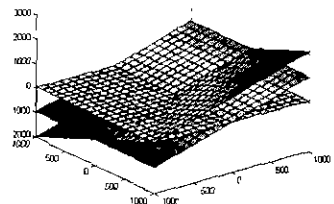


Fig. 2 Singular planes for the Cubic Parallel Manipulator.

특이점의 위치는 링크의 상호 의존성과 관련되는 데 같은 평면상의 점들 간에는 유사한 링크 의존성이 발견될 것임을 쉽게 추론할 수 있다. 각 평면의 링크 의존 특성을 찾기 위하여 식 (4)에서 주어지는 세 개의 평면식을  $z$ 에 관해 정리한 후, 이를 각각 식 (5)에 대입하면  $x, y$ 에 관한 자코비안 행렬이 얻어진다. 이 자코비안 행렬은 특이 행렬이 되고, 따라서 링크의 플랫폼 좌표로 이뤄진 6개의 행 벡터는 선형 독립이 되지 못한다. 그러므로 이들 6개 행 벡터의 일부의 선형 조합만으로 0이 되면, 이들 행에 해당하는 링크들간에 의존성이 있는 것이다.

식 (4)를 0으로 하는 세 평면의 식은 각각 다음과 같다.

$$177x - 182y + 991z - 177z = 0 \quad (5)$$

$$56 + x - z = 0 \quad (6)$$

$$-56 + z = 0 \quad (7)$$

한편, 식 (3)의 1~6행에 차례로 스칼라  $a, b, c, d, e, f$ 를 곱한 후 더하여 만든 벡터를  $V$ 라고 하면  $V$ 는,

$$\begin{pmatrix} -354d - 354e + (a+b+c+d+e+f)x \\ 354f + (a+b+c+d+e+f)z \\ -56a - 56b - 56c - 410d - 410e - 420f + (a+b+c+d+e+f)x \\ 7840a - 7840b - 28700c + 28700e - 24780f + (-28a - 28b - 28c - 130d - 130e - 290f) + (-140a + 140b + 70d - 70e - 177f)z \\ -7640a - 7840b + 7840c + 26550d + 26550e + (-26a + 26b + 26c + 130d + 130e + 280f) + (140a + 140b - 140e - 177d - 177e)z \\ 24780d - 24780e + (140a - 140b - 70d + 70e + 177f)z + (-140a - 140b + 140c + 177d + 177e)z \end{pmatrix} \quad (8)$$

이 된다. 식 (8)에 식 (5)를  $z$ 에 관해 풀어 대입하면

$$\begin{pmatrix} -354d - 354e + (a+b+c+d+e)x \\ 54f + (a+b+c+d+e)z \\ 354a - 354e - 294f - (a+b+c+d+e)z - \frac{177}{177}(a+b+c+d+e)z \\ 7840a - 7840b - 28700c - 34700d - (-140a + 140b - 70d - 70e - 177(56 - x - \frac{177}{177}y) - (-140a + 280b + 280c + 130d + 130e + 280f) + (-140a + 140b - 140e - 177d - 177e)z) \\ -7840a - 7840b + 7840c + 26550d + 26550e + (26a + 26b + 26c + 130d + 130e + 280f) + (140a + 140b - 140e - 177d - 177e)z) \\ 24780d - 24780e + (140a - 140b - 70d - 70e + 177f)z + (-140a - 140b + 140c + 177d + 177e)z \end{pmatrix} \quad (9)$$

을 얻는다.

식 (9)는 자코비안 행렬의 각 행의 선형 조합인  $V$ 에 식 (5)의 관계를 대입시킨 것이므로, 식 (9)의 모든 성분은 0이 되어야 한다. 이를 만족하는 스칼라  $a, b, c, d, e, f$ 의 값은,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{(-123749550x + 349575x^2 - 2254980y + 344617xy - 6370y^2)}{2585x(177x - 182y)} \\ b &= \frac{e(-197873964x + 558966x^2 + 161907564y - 735613xy + 457366y^2)}{2585(177x^2 - 182xy)} \\ c &= \frac{91(-2684294ex + 7611ex^2 + 1305384ey - 7574exy + 5006ey^2)}{2585(177x^2 - 182xy)} \\ d &= \frac{-7681e}{2585} \\ f &= \frac{5936ey}{2585x} \end{aligned} \quad (10)$$

이다.

식 (5)가 나타내는 평면 위의 임의의 위치에서 식 (10)에 의해 주어지는 관계에 의해 링크들 간의 의존성이 나타난다.  $a-f$ 가 모두 0이 아니므로, 식 (5)의 평면은 6개 링크 모두에 의한 의존성을 나타낼 수 있다. 식 (10)의 마지막에 있는  $x, y$ 에 관한 조건은, 식 (5)와 식 (6)의 연립방정식의 해가  $y=0$ , 식 (5)와 식 (7)의 연립방정식의 해가  $177x-182y=0$ , 식 (6)과 식 (7)의 연립방정식의 해가  $x=0$ 이라는 점을 생각하면, 식 (5)의 평면 위의 점들 중 식 (6)과 식 (7)의 평면들과의 교선 위에 있는 점들을 제외한 점들에서 식 (10)이 성립함을 의미한다. 이들 교선 위에 있는 점들에 대해서는 식 (10)이 나타내는 것과 다른 링크 의존성이 드러난다.

식 (8)에 식 (6)을  $z$ 에 관해 풀어 대입하면, 식 (9)와 같은 형태의 벡터를 얻게 되고, 앞서와 마찬가지로 이 벡터의 각 성분이 0이 되도록  $a-f$ 의 값을 구하면,

$$a = -\frac{e(-354+x)}{2x}, \quad b = \frac{e(-354+x)}{2x}, \quad c = 0, \quad d = -e, \quad f = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0) \quad (11)$$

이 된다. 여기서  $c$ 와  $f$ 가 0이므로 식 (6)에 의해 주어지는 평면은 1, 2, 5, 6 번 링크 간의 의존성을 의미함을 알 수 있다. 링크 번호는 Fig. 1에 표시된 끝 점 번호와 일치한다. 식 (11)의  $x, y$ 에 관한 조건은 식 (6)과 식 (5), 식 (6)과 식 (7)의 교선 위의 점들에서는 식 (11)이 나타내는 링크 의존성이 성립하지 않음을 의미한다. 이들 교선에서는 식 (11)과 다른 링크 의존성이 나타난다.

식 (8)에 식 (7)을  $z$ 에 관해 정리하여 대입한 경우도 앞서와 마찬가지로 하여  $a-f$ 의 값을 구하면,

$$a = \frac{bx+2y}{x-2y}, \quad c = \frac{-2bx}{x-2y}, \quad d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0 \quad (x-2y \neq 0, -156645 + 868y \neq 0) \quad (12)$$

이 된다. 여기서  $d, e, f$ 가 0이므로 식 (7)에 의한 특이 평면은 1~3 링크의 의존성을 나타낼 수 있다. 식 (12)의  $x, y$ 에 관한 조건은 식 (10), 식 (11)과 달리 그 의미를 파악하기 어렵다. 단, 식 (7)의 평면식을 자코비안 행렬인 식 (3)에 적용하면, 플랫폼을 지지하는 1~3 링크의  $z$  방향 성분이 모두 0이 되고, 이것은 플랫폼이 베이스 높이에 위치함을 의미한다. 실제 상황에서는 이런 형태가 되기 전에 작업공간의 한계에 도달하므로 식 (7)의 특이 평면은 어떤 경우라도 작업공간 외부에 위치하여 큰 의미를 갖지 못한다.

식 (5)와 식 (6)의 특이 평면은 작업공간 내부를 지날 가능성이 있다. 앞서 언급했듯이 작업공간 내에 특이점이 존재하면, 기구의 제어가 어려워지므로, 설계시 특이점의 위치를 작업공간 밖으로 하는 것이 중요하고, 이는 설계변수를 변경함으로써 가능하다.

Fig. 3과 Fig. 4는 회전행렬이 항등행렬인 일정 자세 작업공간과 특이점의 위치를 각각  $z=400$  mm와  $z=430$  mm인 위치에서 보여준다. 빗금 친 영역이 작업공간이고, 두 개의 직선이 특이점이다. 이 그림들로부터 특이점이 작업공간을 벗어나 있음을 알 수 있다.

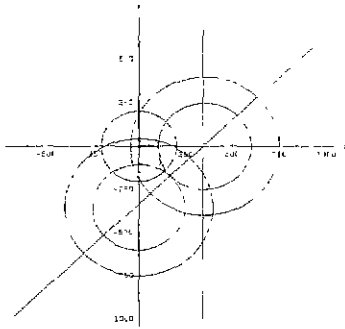


Fig. 3 Workspace and singular points of cubic parallel manipulator at  $z=400$  mm.

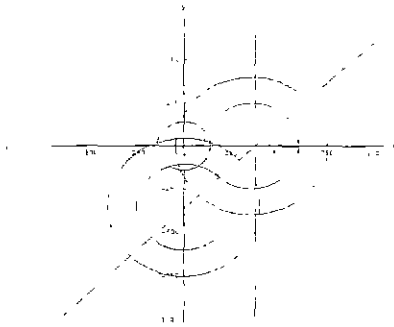


Fig. 4 Workspace and singular points of cubic parallel manipulator at  $z=430$  mm.

#### 4. 결론

일반적인 병렬기구와 고안된 육면형 병렬기구에 대한 특이점 해석을 수행한 결과 다음의 결론을 얻는다.

- 병렬기구의 설계 시 설계 변수를 통해 자코비안

행렬을 구성할 수 있고, 이 행렬의 행렬식을 구하여 특이점의 위치를 파악할 수 있다.

- 육면형 병렬기구의 일정자세 작업공간에 대한 특이점은 병진운동의 경우 3개의 평면으로 주어지고 이들 평면 위의 점들은 동일한 링크 의존성을 갖는다.
- 병렬기구의 설계 시 특이점의 위치가 작업공간을 피하도록 설계 변수를 선정하여야 한다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단 특정기초(과제번호: 1999-1304-003-3)에 의해 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

1. Hunt, K. H. "Kinematic Geometry of Mechanisms", Oxford: Clarendon, 1978.
2. Fichter, E. F. "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", The International Journal of Robotics Research, Vol. 5, No. 2, pp. 157-182, 1986
3. Merlet, J. P. "Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry", The International Journal of Robotics Research, Vol. 8, No. 5, pp. 45-56, 1989.
4. Gosselin, C., Angeles, J., "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, No. 3, pp. 281-290, 1990.
5. Zlatanov, D., Fenton, R., G., Benhabib, B., "A Unifying Framework for Classification and Interpretation of Mechanism Singularities", ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 117, pp. 566-572, 1995