

동강성법을 이용한 코일스프링의 진동 해석

°이재형*, 김성걸*, 허승진**, D.J. Thompson***

Vibration Analysis of a Coil Spring by Using Dynamic Stiffness Method

Jaehyung Lee, Seongkeol Kim, Seung-Jin Heo, D.J. Thompson

ABSTRACT

The partial differential equations for a coil spring derived from Timoshenko beam theory and Frenet formulae. Dynamic stiffness matrix of a coil spring composed of a circular wire is assembled by using dispersion relationship, waves and natural frequencies. Natural frequencies are obtained from maxima in the determinant of inverse of a dynamic stiffness matrix with appropriate boundary conditions. The results of the dynamic stiffness method are compared with those of transfer matrix method, finite element method and test.

1. 서론

코일스프링의 응용 범위는 소형 모터에서 대형 차량에 이르기까지 거의 모든 기계 구조물에 이르고 있다. 지금까지 구조물의 동특성을 해석하는데 있어서 코일스프링과 댐퍼는 힘을 전달하는 요소로 취급하였다. 그러나 구조물의 진동에 대한 해석 범위가 고주파 영역으로 확대됨에 따라서 전체 시스템의 정확한 동특성을 구하기 위해서는 이러한 해석은 적절한 해를 제고하지 못하게 되었다. 특히 특정 주파수 이상에서는 스프링의 내부 공진에 대한 해석이 수반되어야 한다. 예를 들면, 승용

차의 전방 현가장치에 사용되는 코일스프링의 경우에는 이러한 내부 공진의 영향으로 인하여 약 40 Hz 부근에서 동강성이 급격히 증가하는 현상이 나타나고 있다.

코일스프링에 대한 연구는 1900년대 초에 Love와⁽¹⁾ Timoshenko에⁽²⁾ 의하여 활성화되기 시작하였다. 그 이후 Wahl은⁽³⁾ 양단이 고정된 원형 단면을 갖는 코일스프링에 대한 축방향의 기본 고유진동수를 유도하였으며, 2차 이상의 축방향에 대한 고유진동수는 기본 고유진동수의 정수배로 나타낼 수 있음을 보여주었다.

1966년에 Wittrick은⁽⁴⁾ 코일스프링의 파동의 전

* 정회원, 국민대학교 자동차공학전문대학원

** 정회원, 국민대학교 기계자동차공학부

*** ISVR University of Southampton

파에 대한 논문에서 전단력에 의한 변형과 회전 판성을 고려한 Timoshenko 보이론을 적용한 선형 미분 방정식을 구하였다. 이 운동방정식은 Mottershead의⁽⁵⁾ 유한요소법에 의한 해석과 Pearson과⁽⁶⁾ Yildirim의⁽⁷⁻⁸⁾ 전달행렬법을 이용한 해석에 응용되었다. 또한 Wittrick과 Pearson은⁽⁹⁾ 코일스프링의 정확한 고유진동수를 구하기 위하여 Bernoulli-Euler 보이론을 사용한 동강성법에 의한 해석을 제시하였다.

본 논문은 Timoshenko 보이론과 원형계 해석을 위한 Frenet의 공식을 사용하여 코일스프링의 운동에 대한 지배 미분 방정식을 유도한 후, dispersion 관계로부터 고유진동수를 구하고, 그 결과를 전달 행렬법과 유한요소법으로 구한 결과 및 실험값과 비교하였다.

2. 이론적 배경과 운동방정식의 유도

Fig. 1 과 같이 반경이 R 이고 권선의 각이 α 인 코일스프링의 축이 x -축을 따라 놓여 있다. 권선을 따라 측정한 길이를 s , 권선의 각을 ϕ 라 하면, 이들 사이에는 식 (1)과 같은 관계를 갖는다.

$$\phi = s \cos \alpha / R \quad (1)$$

한편, 전역좌표 (x, y, z) 는 R 과 ϕ 를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x = R\phi \tan \alpha, \quad y = R \cos \phi, \quad z = R \sin \phi \quad (2)$$

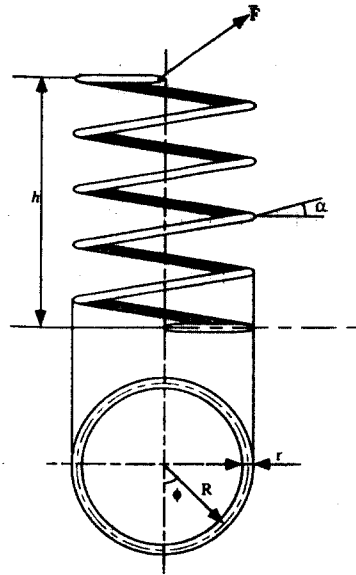


Fig. 1 Statically loaded coil spring

Fig. 2 와 같이 권선 위에 존재하는 한 점에서의 지역좌표에 대한 단위벡터를 접선성분 u , 법선성분 v 및 이 두 성분과 직각을 이루는 성분을 w 로 표시하면, 지역좌표계에서의 변위 (u, v, w) 와 전역좌표계에서의 변위 (u_x, u_y, u_z) 와의 관계는 식 (3)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \\ \cos \alpha & \sin \alpha \sin \phi & -\sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \phi & \cos \alpha \cos \phi \end{bmatrix} \text{이다.}$$

회전변위 및 힘과 모멘트도 식 (3)과 동일한 관계를 적용할 수 있다.

Frenet의 공식을 이용하면 권선상의 모든 변위와 힘을 s 에 대한 함수로 표현할 수 있다. 권선의 곡률 κ 와 비틀림 τ 는 다음과 같이 정의된다.

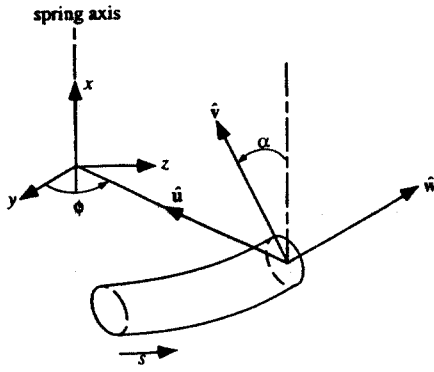


Fig. 2 Coordinate system of a coil spring

$$\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{R}, \tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} \quad (4)$$

권선의 파라미터와 지역좌표계의 단위벡터들 사이의 관계를 행렬식으로 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & -\kappa \\ -\tau & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Fig. 1 에서 보여주는 것과 같이 코일스프링이 임의의 하중 \mathbf{F} 를 받고 있다면, 권선상의 임의의 위치에 있는 단면은 단위벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 의 방향으로 힘과 모멘트가 발생하게 된다 (Fig. 2 참조). 이 힘과 모멘트에 의하여 권선은 축방향에 대한 선형과 회전의 연성운동을 포함한 변위를 발생된다. 권선의 선형변위를 δ , 각변위를 θ 라 하고, 위치 s 에 작용하는 집중하중과 모멘트를 \mathbf{P} 와 \mathbf{M} 이라 하면, 이들에 대한 단위벡터 방향의 분력은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_u & \delta_v & \delta_w \\ \theta_u & \theta_v & \theta_w \\ P_u & P_v & P_w \\ M_u & M_v & M_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Timoshenko 보이론에 의한 힘과 변위의 관계는 식

(7)과 같다.

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_u}{GA\gamma} + \theta_v & \frac{P_v}{GA\gamma} - \theta_u & \frac{P_w}{EA} \\ \frac{M_u}{EI_u} & \frac{M_v}{EI_v} & \frac{M_w}{GJ} \\ 0 & 0 & 0 \\ P_v & -P_u & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이 식에서 코일스프링의 영률을 E , 전단강성을 G , 권선의 단면적을 A , 전단형상계수를 γ 로 나타내었다. I_u 와 I_v 는 \mathbf{u} 와 \mathbf{v} 방향에 대한 2차 관성모멘트, J 는 \mathbf{w} 방향에 대한 극관성모멘트로 표시하였다. 본 논문에서는 원형 단면을 갖는 코일 스프링에 적용하므로, $I_u = I_v$ 이고 $J = I_w$ 로 나타낼 수 있다. 식 (6)을 미분한 결과에 식 (7)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 정적인 평형상태에 대한 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \mathbf{0} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

윗 식의 S_{ij} 는 시스템 행렬로 부록에 정의하였다.

달랑베르의 법칙에 따르면 관성력은 탄성력의 반대방향으로 작용하므로 식 (8)의 동적 평형 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \mathbf{0} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

이 식에서 T_{ij} 는 관성력에 대한 행렬로 부록에 정의하였다.

구속이 없는 파동에서(free wave) 권선상의 한 요소의 병진운동, 회전운동 및 응력은 위치에 따라 달라진다. 권선의 한 요소에 대한 응답은 시간에 대한 조화함수의 형태로 나타낼 수 있으므로 구속이 없는 파동에 대한 변위와 힘은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \\ \Pi \\ \Lambda \end{Bmatrix} e^{ks+j\omega t} \quad (10)$$

이 식에서 k 는 파동수(wavenumber)를 ω 는 각주파수를 표시한 것이다. 식 (10)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 12 원 선형연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(k[\mathbf{I}] - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ -\omega^2 T_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \\ \Pi \\ \Lambda \end{Bmatrix} = 0 \quad (11)$$

식 (11)이 물리적으로 의미를 갖기 위해서는 $(k[\mathbf{I}] - \mathbf{S})$ 의 행렬값이 0 이어야 한다. 만일 식 (11)에서 주파수의 값이 주어진다면 시스템 행렬에 대한 고유치 해석으로부터 구속이 없는 상태의 파동수를(free wavenumber) 구할 수 있다. 식 (9)의 처음 6 행으로부터 권선상의 한 위치 s 에서의 하중과 변위와의 관계를 구하면

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = -[S_{12}]^{-1} [S_{11}] \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} + [S_{12}]^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (12)$$

한편, 변위를 12 개 파동의 합으로 표시하면

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} e^{k_1 s} \\ \vdots \\ e^{k_n s} \end{bmatrix} \{a_i\} e^{j\omega t} \quad (13)$$

이 식에서 k_i 는 $[\Phi]$ 는 식 (11)의 고유값과 고유벡터 행렬을 나타내며, a_i 는 복소수 형태를 갖는 파동의 크기를 나타낸다.

식 (13)과 이를 s 에 대하여 미분한 값을 식 (12)에 대입하여 정리하면,

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = -[S_{12}]^{-1} [S_{11}] [\Phi] \begin{bmatrix} e^{k_1 s} \\ \vdots \\ e^{k_n s} \end{bmatrix} \{a_i\} + [S_{12}]^{-1} [\Phi] \begin{bmatrix} k_1 e^{k_1 s} \\ \vdots \\ k_n e^{k_n s} \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (14)$$

식 (13)으로부터 $s=0$ 과 L 에서의 변위벡터 \mathbf{U} 를 결정하면 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \delta(0) \\ \theta(0) \\ \delta(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi] \\ \hline [\Phi] e^{k_i L} \end{bmatrix} \{a_i\} = \mathbf{D}_1 \mathbf{a} \quad (15)$$

동일한 방법으로 식 (14)로부터 $s=0$ 과 L 에서의 힘과 모멘트 \mathbf{F} 를 결정하면

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} P(0) \\ M(0) \\ P(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_2 \mathbf{a} \quad (16)$$

식(15)와 식(16)로부터 \mathbf{a} 를 소거하면, 동강성계수 \mathbf{K} 에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$F = KU = (D_2 D_1^{-1})U \quad (17)$$

식 (17)로부터 동강성 계수행렬인 K 의 역행렬값이 최대가 되는 주파수가 시스템의 고유진동수임을 알 수 있다.

3. 해석 결과의 비교 및 고찰

본 논문에서 제시한 이론을 적용하여 승용차의 전방 현가장치에 사용된 코일스프링에 대한 고유진동수를 구하였다. 이 스프링의 권선의 반경은 6mm, 스프링의 반경은 65mm이며 높이는 320mm이다. 또한 권선의 각은 7.44° 며 권선 수는 6개이다.

동일한 모델에 대하여 유한요소해석 프로그램인 NASTRAN을 사용하여 432 개의 절점을 갖는 Euler-Bernoulli 보요소로 모델링한 후, Modified Householder법으로 고유진동수를 구하였다. 또한 Pearson^[8]이 제시한 방법에 따라서 전체 스프링을 32 개로 동일하게 나누어 구성된 전달행렬을 이용한 전달행렬법에 의한 해석을 수행하였다. 여기에 제시한 동강성법에 의한 해석을 위하여 MATLAB을 사용하여 프로그램을 작성하였다. 동일한 조건에서 본 논문에서 제시한 동강성법에 의한 해석이 전달행렬법에 비하여 약 2.5 배정도 빨리 결과를 얻을 수 있었다.

실험적 모드 해석은 가진 해머를 사용하여 free-

free와 fixed-free의 두 가지 경우에 대하여 수행하였다.

Table 1 에서 clamped-free 경계조건에 대한 해석 결과를 비교하였다. 실험에서 2 차 모드가 측정되지 않았는데, 이는 스프링의 횡방향 굽힘 모드로 1 차 모드와 매우 인접한 주파수에서 나타나기 때문에 측정하기가 곤란하였다. 참고문헌 (10)에서 여러 가지 경계조건에서 다양한 방법으로 구한 코일스프링의 고유진동수를 비교하였다.

Table 1. Natural frequencies in Hz of a spring with clamped-free boundary conditions, wire of radius $r=6\text{mm}$, helix radius $R=65\text{mm}$, helix angle $\alpha=7.44^\circ$, no. of active ture $n=6$, density $\rho=7800\text{kg/m}^3$, Young's modulus $E=2.09 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, Poisson's ratio $\nu=0.28$.

Test	Finite element method	Transfer matrix method	Dynamic stiffness method
1	7.94	9.4777	9.472
2	-	9.5054	9.500
3	20.94	21.429	21.36
4	24.25	24.194	24.17
5	40.13	42.182	42.10
6	42.00	42.942	42.86
7	61.75	63.310	63.11
8	71.31	71.281	71.20
9	89.25	88.435	88.22
10	91.81	90.095	89.89

4. 결론

본 논문에서는 Timoshenko 보이론과 Frenet 공식으로부터 유도한 동강성법을 사용하여 코일스프링

의 고유주파수를 구하였다. 고유주파수는 동강성 행렬의 역행렬의 고유값이 최대값을 구하여 결정하였다. 해석 결과를 유한요소법과 전달행렬법으로 구한 결과와 비교하였으며, 이들 모두가 실험 결과와 잘 일치하고 있음을 보여주었다.

후 기

이 논문은 1999 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) A.E.M. Love, 1899, " The Propagation of Waves of Elastic Displacement along a Helical Wire," Transaction of Cambridge Philosophy Society, 18, pp. 364-374.
- (2) S.P. Timoshenko, 1936, Theory of Elastic Stability, 1st Edn., New York: McGraw Hill.
- (3) A.M. Wahl, 1963, Mechanical Springs, 2nd Edn., New York: McGraw Hill.
- (4) W.H. Wittrick, 1966, "On Elastic Wave Propagation in Helical Springs," International Journal of Mechanical Sciences, 8, pp. 25-47.
- (5) J.E. Mottershead, 1980, "Finite Elements for Dynamical Analysis of Helical Rods," International Journal of Mechanical Sciences, 22, pp. 267-283.
- (6) D. Pearson, 1982, "The Transfer Matrix Method for the Vibration of Compressed Helical Springs," Journal of Mechanical Engineering Science, 24, pp. 163-171.
- (7) V. Yildirim, 1966, "Investigation of Parameters Affecting Free Vibration Frequency of Helical Springs," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, pp. 99-114.
- (8) V. Yildirim and N. Ince, 1997, "Natural Frequencies of Helical Springs of Arbitrary Shape," Journal of Sound and Vibration, 204 (2), pp.311-329
- (9) D. Pearson and W.H. Wittrick, 1986, "An Exact Solution for the Vibration of Helical Springs using a Bernoulli-Euler model," International Journal of Mechanical Sciences, 28, pp. 83-96.
- (10) J. Lee and D.J. Thompson, 1999, "Application of the Dynamic Stiffness Method to the Vibration of Helical Springs," ISVR Technical Memorandum No. 842, University of Southampton.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ -\tau & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_w} \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = 0, \quad S_{22} = -S_{11}^T$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I_w \end{bmatrix}$$