

경계배치법에 의한 근거리 음장 해석 기법 연구;
가중치를 갖는 선배열 음원의 최적 측정점 개수의

결정

김 원 호*

Study on Sound Field Analysis in Near-Field using Boundary
Collocation Method; Decision of Optimum Points of Measurement
for Line Array Sound Source with Weighting Value

Won-ho Kim

ABSTRACT

This paper describes the far-field estimation using the near-field measurement data. Measurement in far-field region gives us the acoustical characteristics of the source but in general measurement is made in near-field such as acoustic water tank or anechoic chamber, so far-field acoustical characteristics of the source should be predicted from near-field data. In this case, the number of measurement points in the near field which relates to the accuracy of the predicted field and the amount of data processing, should be optimized. Existing papers say that measurement points is proportional to kL and depends on geometry and directivity of the source. But they do not give us any definite criterion for the required number of measurement points. Boundary Collocation Method which is one of the far-field prediction methods, is analyzed based on Helmholtz integral equation and Green function and it has been found that the number of measurement points is optimized as $0.54kL$ which is about one half of the existing results.

* 국방과학연구소 수중음향센서연구실

1. 서론

파장에 대한 음원의 기하학적 크기 (방사면의 최대 면적)의 비보다 작은 거리에서는 방사면을 구성하고 있는 인접된 소자(element) 들간의 간섭에 의해 거리에 따른 음압 준위는 규칙성이 없으며, 음원 전방 1m에서의 음압 준위로 보상할 수가 없다. 따라서 측정 자료로부터 임의 점의 원 음장을 예측하기 위해서는 원거리 영역에서 측정이 이루어지는 것이 일반적이다.^[1] 따라서 원거리 영역 측정을 위해서는 호수 또는 바다와 같이 무한한 공간이 요구되지만 주변 선박, 바람, 파도 등에 의한 배경 잡음 등으로 인해 실험을 위한 제약 요소가 많이 수반되므로 음향 수조 또는 무향실과 같은 실험 조건을 효과적으로 제어할 수 있는 공간에서 이루어지고 있다. 따라서 음원의 크기 또는 주파수가 높은 경우에는 원거리 음장 조건을 만족하지 못 하므로 이들 근거리 측정 자료로부터 원거리 음장 특성을 예측할 필요가 있다. 이러한 근거리 음장 해석 방법들은 1950년대 이후 활발히 연구가 수행되어 왔으며^[2-11] 그중 Butler의 경계배치법(Boundary Collocation Method)^[11]은 비교적 간단한 방법으로 원거리 음장 예측 결과도 우수한 것으로 알려져 있다.

원거리에서의 음장 특성을 정확히 예측하기 위해서는 근거리에서의 측정점수가 충분히 많을수록 만족된 결과를 얻을 수 있다. 그러나 측정 지점수가 증가하면 비현실적이고 비경제적이므로 최소의 측정으로 정확한 예측 결과를 얻을 수 있는 최적 측정점수에 대한 기준이 필요하다. 이러한 최적 측정점수는 음원의 주파수와 크기의 함수인 kL 에 비례한다. 즉 kL 이 커지게 되면 지향성이 커지게 되는데^[12] 이 경우 근거리 음장의 공간적인 음장

특성의 변화가 커지게 된다. 따라서 근거리 음장의 공간적인 샘플링 자료로부터 원거리 음장을 예측하기 위해서는 이러한 변화에 대응될 수 있도록 측정되어야 한다. 본 논문에서는 경계배치법을 비교적 단순한 배열 형태인 선배열 음원에 적용하여 원거리 음장의 예측을 위한 근거리 음장 측정을 수행함에 있어 최적 측정점수에 대한 기준을 제시하고자 한다.

2. 선배열 음원의 음장 해석

일반적으로 음압에 대한 Helmholtz 적분식은 다음과 같이 기술할 수 있다.^[4]

$$P(p) = \frac{1}{4\pi} \int_s [-ik\rho c u(s_0) g(R) + P(s_0) \frac{\partial}{\partial n_0} g(R)] d s_0 \quad (1)$$

여기서, $g(R)$; 자유 공간에서의 Green 함수

p ; field 지점

s_0 ; 음원 지점

R ; field 지점과 음원 지점 간의 거리

u ; 법선 방향의 속도

k ; 파수 (wave number)

ρ ; 전파 매질의 밀도

c ; 전파 매질 내에서의 음속

n_0 ; 법선 방향

그리고 파동 함수의 전개는 Green 함수를 전개하므로서 구할 수 있으며, 축 대칭이고 구형 함수에 대한 Green 함수는 다음과 같이 주어진다.^[11]

$$g(R) = ik \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(kr) P_m(\cos \theta) \times h_m(kr) P_m(\cos \theta) \quad (2)$$

여기서, m : 상수

$j_m(kr)$: kr 값을 갖는

1종 spherical Bessel function

$P_m(\cos \theta)$: $\cos \theta$ 값을 갖는

m 차의 Legendre polynomial

$h_m(kr)$: kr 값을 갖는

spherical Hankel function

$$= j_m(kr) + i y_m(kr)$$

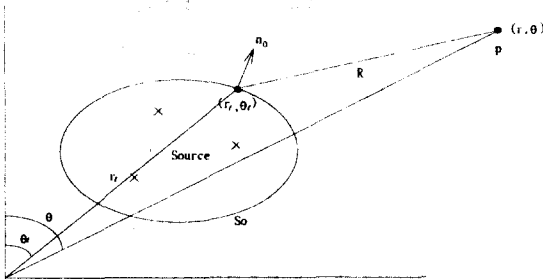


Fig. 1. Arbitrary shaped sound source and acoustic field point p

그림 1에서 (r_i, θ_i) 는 음원 지점, (r, θ) 는 음장 지점으로 (2)식을 (1)식에 대입하면 음장 지점 p의 음압은 다음과 같이 전개된다.

$$P(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ik(2m+1)}{4\pi} \times \int_S \{ -ik\rho c u(s_0) j_m(kr_i) P_m(\cos \theta_i) + P(s_0) \frac{\partial}{\partial n_0} [j_m(kr_i) P_m(\cos \theta_i)] \} ds_0 \times h_m(kr) P_m(\cos \theta) \quad (3)$$

또한 식(3)은 다음과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$P(p) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m h_m(kr) P_m(\cos \theta) \quad (4)$$

따라서 (3)식과 (4)식으로부터 음원의 특성 상수인 b_m 은 다음 식으로 주어진다.

$$b_m = \frac{ik(2m+1)}{4\pi} \times \int_S \{ -ik\rho c u(s_0) j_m(kr_i) P_m(\cos \theta_i) + P(s_0) \frac{\partial}{\partial n_0} [j_m(kr_i) P_m(\cos \theta_i)] \} ds_0 \quad (5)$$

여기서, 식(4)를 살펴보면 b_m 을 구하면 음원의 거리와 방위의 음장점의 음압을 구할 수 있음을 알 수 있다. 또한 식(4)는 선형 방정식이므로 측정 자료로부터 b_m 을 구하기 위해서는 m 의 최대 차수는 측정점수와 일치하게 된다. 식(5)는 축 대칭이고 구형과 함수를 갖는 일반적인 경우이며, 여기서 선배열 음원의 경우로 해석하면 다음과 같다.

선배열 음원은 $\theta_i = 0^\circ$ 인 축 상에 놓여 있으므로 $P_m(\cos \theta_i) = 1$ 이 되고, r_i 에 대한 법선 방향의 증분이 없으므로 두 번째 항은 제거된다. 그리고 면 적분은 선 적분으로 변환되므로

$$b_m = (2m+1) \sum a_l j_m(kr_i) \quad (6)$$

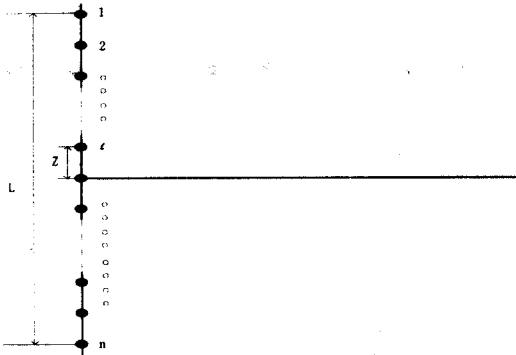
여기서, $a_l = \frac{k^2 \rho c u(s_0)}{4\pi}$ 로서 음원에 대한 음압 진폭 상수를 나타낸다.

3. 수치 해석

식(4)로부터 알 수 있듯이 음원의 음장분포는 b_m 을 알고 있으면 음원과 음장 지점 간의 거리와 방위 정보로부터 구할 수 있으므로 근거리 측

정 자료로부터 구한 b_m 으로부터 임의 지점의 음장 특성의 예측이 가능하게 된다. 본 논문에서 가정한 음원의 음원 위치는 원점을 기준으로 하여 등 간격으로 배열되어 있고 음원의 진폭은 배열을 구성하고 있는 모든 점음원이 동일 진폭을 갖는 경우와 선배열 중심에 위치한 점음원의 진폭이 가장 크고 중심에서 멀어질수록 진폭이 작아지는 경사진 가중치 (ramped weighting value)를 갖는 2가지 경우의 선배열 음원으로 가정하였다. 선배열을 구성하고 있는 점음원의 수가 홀수 개인 경우와 짝수 개인 경우로 구분하면 식 6의 b_m 은 다음과 같이 특성을 해석할 수 있다.

1. 점음원의 수가 홀수 개로 등간격 배열된 선배열 음원 ($n > 2$)



식(6)에서 r_l 는 원점에서 l 번째 점음원까지의 거리로서 $\left(\frac{n+1}{2} - l\right) Z$ 가 되며 여기서 Z 는 배열 간격이며, n 은 음원을 구성하고 있는 배열수가 된다.

그리고 Bessel 함수의 특성은

$$j_m(-kZ) = (-1)^m j_m(kZ) \quad (7-1)$$

$$j_m(0) = \begin{cases} 1 & ; \quad m=0 \\ 0 & ; \quad m \neq 0 \end{cases} \quad (7-2)$$

이므로 식(7-1)으로부터 b_m 은 다음과 같이 된다.

$$b_m = (2m+1) \left\{ [(-1)^m + 1] \times \sum_{l=1}^{(n-1)/2} a_l j_m \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right] + a_{(n+1)/2} j_m(0) \right\} \quad (8)$$

가. 동일 진폭 가중치

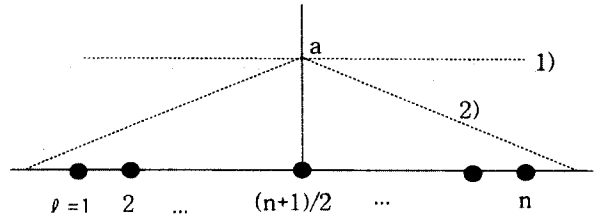


Fig. 2. Weigting value for line array with odd point source

그림 2의 1)의 경우로서 $a_1 = a_2 = \dots = a_l = a$ 이고, 식(7-2)를 이용하여 b_m 을 정리하면 다음과 같다.

1) $m = 0$ 인 경우

$$b_0 = a \left\{ 2 \sum_{l=1}^{(n-1)/2} j_0 \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right] + 1 \right\} \quad (9-1)$$

2) $m \neq 0$ 인 경우

$$b_m = 0, \quad m ; \text{ odd } (1, 3, \dots) \quad (9-2)$$

$$b_m = (2m+1) a \sum_{l=1}^{(n-1)/2} j_m \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right]$$

$m ; \text{even } (2, 4, \dots)$ (9-3)

나. 경사진 진폭 가중치

그림 2에서 2)의 경우로서 진폭치는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a_l = \frac{l}{\frac{n+1}{2}} a, \quad l=1, 2, \dots, (n+1)/2$$

(10-1)

$$a_l = \frac{n+1-l}{\frac{n+1}{2}} a, \quad l=(n+3)/2, \dots, n$$

(10-2)

따라서 b_m 은 다음과 같다.

1) $m = 0$ 인 경우

$$b_0 =$$

$$a \left\{ \frac{4}{n+1} \sum_{l=1}^{(n-1)/2} l j_0 \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right] + 1 \right\}$$

(11-1)

2) $m \neq 0$ 인 경우

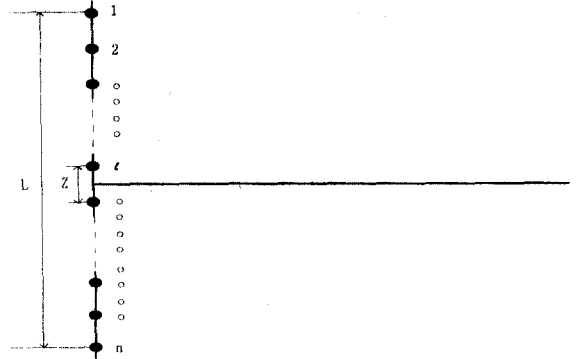
$$b_m = 0, \quad m ; \text{odd } (1, 3, \dots)$$

(11-2)

$$b_m = 2(2m+1) a \frac{2}{n+1} \times \sum_{l=1}^{(n-1)/2} l j_m \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right]$$

$m ; \text{even } (2, 4, \dots)$ (11-3)

2. 점음원의 수가 짝수 개로 등간격 배열된 선배열 음원 ($n \geq 2$)



가. 동일 진폭 가중치

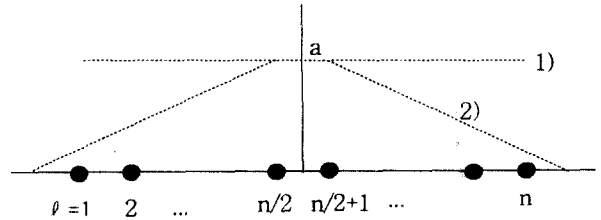


Fig. 3. Weigting value for line array with even point source

1) $m = 0$ 인 경우

$$b_0 = 2a \sum_{l=1}^{n/2} j_0 \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right]$$

(12-1)

2) $m \neq 0$ 인 경우

$$b_m = 0, \quad m ; \text{odd } (1, 3, \dots)$$

(12-2)

$$b_m = 2(2m+1) a \sum_{l=1}^{n/2} j_m \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right]$$

$m ; \text{even } (2, 4, \dots)$ (12-3)

나. 경사진 진폭 가중치

$$a_l = \frac{l}{\frac{n}{2}} a, \quad l = 1, 2, \dots, n/2 \quad (13-1)$$

$$a_l = \frac{n+1-l}{\frac{n}{2}} a, \quad l = n/2+1, \dots, n \quad (13-2)$$

1) $m = 0$ 인 경우

$$b_0 = a \frac{4}{n} \sum_{l=1}^{n/2} l j_0 \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right] \quad (14-1)$$

2) $m \neq 0$ 인 경우

$$b_m = 0, \quad m; \text{ odd } (1, 3, \dots) \quad (14-2)$$

$$b_m = (2m+1) a \frac{4}{n} \sum_{l=1}^{n/2} l j_m \left[\left(\frac{n+1}{2} - l \right) kZ \right] \quad (14-3)$$

$m; \text{ even } (2, 4, \dots)$

식 9, 11, 12 그리고 식 14에서 음원의 크기 $L = (n-1)Z$, 즉 $Z = \frac{L}{n-1}$ 이므로 b_m 은 주파수와 음원 크기의 무차원 함수인 kL 및 m 값에 따른 Bessel 함수의 특성에 의존하고 있음을 알 수 있다.

그리고 표1은 $kL = 4\pi$ 이고 3개의 점음원이 동일 진폭으로 구성된 선배열 음원에 대한 b_m 특성으로 m 이 13 이상에서는 b_m 이 0이 되어 음장 예측 계산 결과에 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

Table 1. b_m characteristics of line array source

; $n=3, kL = 4\pi$

m	b_m	m	b_m
0	1.000	13	0.000
1	0.000	14	0.001
2	-0.760	15	0.000
3	0.000	16	0.000
4	3.347	17	0.000
5	0.000	18	0.000
6	2.797	19	0.000
7	0.000	20	0.000
8	0.800	21	0.000
9	0.000	22	0.000
10	0.120	23	0.000
11	0.000	24	0.000
12	0.011		

그리고 kL 이 증가하면 b_m 이 0이 되는 m 또한 증가하고 있음을 식 9, 11, 12 그리고 식 14의 계산 결과로부터 알 수 있다.

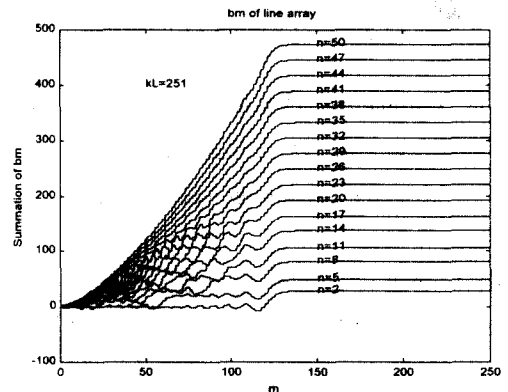


Fig. 4. Cumulative characteristics of b_m with respect to number of line array elements n with unit weighting value ($kL = 251$)

따라서 b_m 이 0이 되는 최적측정점수를 보다 명확히 살펴보기 위해 b_m 의 누적($\sum_m b_m$) 특성을 해석하였다.(그림 4, 그림 5) 그림 4는 kL 이 251로 일정한 상태에서 배열수 n 을 변화했을 때의 b_m 의 누적 특성으로써 누적된 b_m 이 일정한, 즉 기울기가 0인 m 의 위치는 배열수에 상관없이 동일한 지점에서 나타남을 알 수 있다. 즉 최적측정점이 되는 m 은 kL 만의 함수로 주어진다.

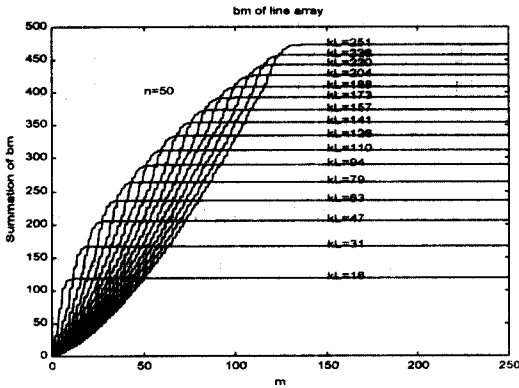


Fig. 5. Cumulative characteristics of b_m with respect to kL of line array elements n with unit weighting value ($n=50$)

그림5는 배열수 $n=50$ 으로 고정 상태에서 kL 이 변화했을 때의 $\sum_m b_m$ 특성이다. 그림은 $\sum_m b_m$ 이 m 및 kL 의 함수가 되고 있음을 보이고 있고, kL 값이 주어지는 경우 이 값은 특정 값에 수렴함을 보인다.

따라서 $\frac{\sum_m^m b_m}{\sum_m^{\infty} b_m} = 1 - \alpha$ 를 정의하고 이때의

음향측상 음압준위(Sound Pressure Level ; SPL)를 구하여 음압준위의 최종 수렴치의 범위를 설정하고 이때의 α 값을 구하면 α 값에 따른 최적측정점수를 구할 수 있다. 그림6은 α 가 10^{-1} 에서 10^{-5} 의 범위에서 동일 진폭을 갖는 선배열 음원의 최적측정점수이다.

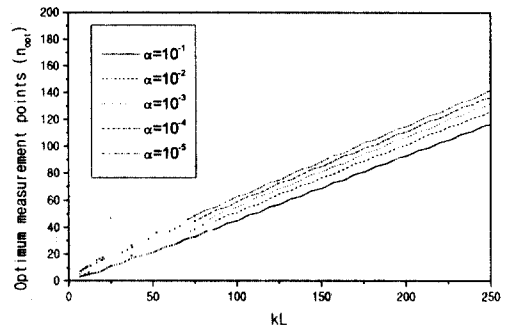


Fig. 6. Optimum measurement points as a function of kL for line array with unit weighting value ($\alpha = 10^{-1} \sim 10^{-5}$)

α 가 감소할수록 최적측정지점수는 증가하고 있으며, 표 1의 조건인 $kL = 4\pi$ 일 때 α 에 따른 최적측정지점수와 음향측상 음압준위의 차이는 표 2와 같다.

Table 2. SPL difference in acoustic axis with respect to α ($kL = 4\pi$, $n = 3$, unit weight)

α	Optimum measurement points	SPL difference in acoustic axis (dB)
10^{-1}	5	3.466
10^{-2}	7	0.387
10^{-3}	9	0.021
10^{-4}	11	0.008
10^{-5}	13	0

따라서 음향 측 상 음압 준위 오차를 0.5 dB 이하로 설정한다면 α 는 10^{-2} 보다는 작아야 하고, 표 1에서 해석되는 바와 같이 0 dB의 오차, 즉, 정확히 음향 측 상 음압 준위를 얻기 위해서는 측정 점수는 13 이상이어야 함을 보인다. 그림 7은 $\alpha = 10^{-5}$ 인 경우로 설정하여 kL 에 따른 동일 가중치의 선배열 음원에 대한 최적측정점수이다.

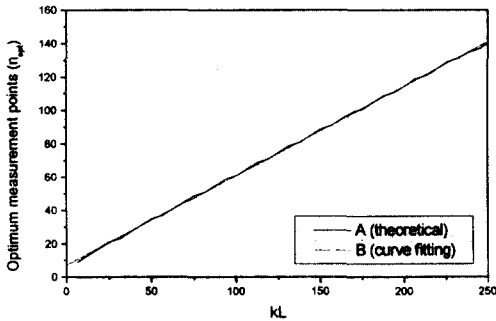


Fig. 7. Optimum measurement points as a function of kL ($\alpha = 10^{-5}$, unit weight)

그림 7에서 A는 계산 결과이고 B는 curve fitting 결과로서 최적측정점수는 다음 식으로 주어진다.

$$n_{opt} = 7.34615 \pm 0.2437 + (0.53533 \pm 0.00165) kL \quad (15)$$

동일 진폭의 선배열 음원의 최적측정점수 식 15는 $kL = 4\pi$ 인 B&K8103으로 구성된 동일 진폭의 선배열 음원에 대한 측정 결과로부터 동일한 결과를 얻어^[13] 식 15의 타당성을 검증할 수 있다.

다음은 경사진 가중치를 갖는 선배열 음원에 대해 살펴보면 다음과 같다. 동일 진폭의 경우와 마찬가지로 kL 이 일정한 상태에서 배열수 n 을 변화했을 때의 b_m 의 누적 특성은 그림 8과 같이 최적측정점은 배열수에 상관없이 동일한 지점에서 나타남을 알 수 있다.

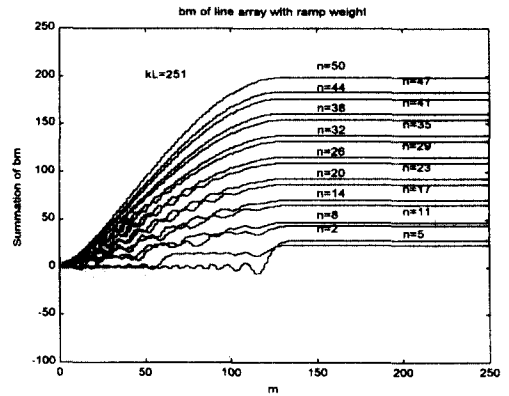


Fig. 8. Cumulative characteristics of b_m with respect to number of line array elements n with ramped weight

그리고 $kL = 4\pi$ 이고 $n = 3$ 일 때 α 에 따른 최적측정지점수와 음향측상 음압준위의 차이는 표 3과 같다.

Table 3. SPL difference in acoustic axis with respect to α ($kL = 4\pi$, $n = 3$, ramped weight)

α	Optimum measurement points	SPL difference in acoustic axis (dB)
10^{-1}	3	7.041
10^{-2}	5	2.229
10^{-3}	7	0.219
10^{-4}	9	-0.026
10^{-5}	11	-0.006
10^{-6}	13	0

이 경우 음압 준위의 오차가 0 dB 인 α 는 10^{-6} 이 되며, 이에 대한 kL 에 따른 최적측정점수는 그림 9의 결과로부터 구할 수 있다.

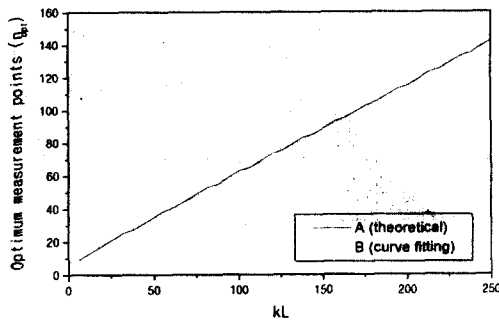


Fig. 9. Optimum measurement points as a function of kL ($\alpha = 10^{-6}$, ramped weight)

$$n_{opt} = 7.6 \pm 0.24712 + (0.53841 \pm 0.00167) kL \quad (16)$$

식 15와 16으로부터 최적측정점수는 가중치의 변화에는 상관없이 약 0.54의 비례상수로 kL 에 비례하며, kL 이 작은 경우에는 최적측정점수는 kL 보다 많아야 하나 kL 이 비례 상수에 비해 상대적으로 커지는 경우 최적측정점수는 약 $0.54kL$ 로 결정됨을 보인다.

4. 결론

근거리에서 측정된 음장분포 자료를 활용하여 원거리에서의 음장분포를 예측하기 위해서는 근거리에서의 측정점수를 최적화하는 것이 필요하다. 이러한 최적측정점수는 주파수(k)와 크기(L)의 함수인 kL 에 비례하나 음원의 기하학적 형태 또는 지향 특성에 따라 kL 의 의존성이 다르게 나타난다.

본 논문에서는 선배열 음원에 대한 최적측정점수를 고찰하였다. 여기서 선배열 음원은 등간격 배열이고 동일 진폭을 갖는 경우와 경사진 진폭을 갖는 2 가지 경우로 가정하였으며, 음압에 대한 Helmholtz 적분식과 Green 함수를 적용하여 해를 구하였다.

선배열 음원에 대한 원거리 음장 예측을 위한 최적측정점수에 대한 기준을 도출하였으며, 본문에서 기술한 바와 같이 최적측정점수는 kL 이 증가함에 따라 $0.54kL$ 로 수렴하여 기존의 결과표 (kL 이상)^[11] 보다 거의 반 이상으로 측정점수를 줄여도 정확한 음장 예측이 가능함을 보였다.

참 고 문 헌

- (1) Robert J. Urick, Principles of Underwater Sound, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1983), chap.4, pp. 72.
- (2) J. Pachner, "On the Dependence of Directivity Patterns on the Distance from the Emitter", J. Acous. Soc. Am. Vol. 28, No. 1, pp. 86-90, 1956
- (3) C. W. Horton and G. S. Innis, Jr., "The Computation of Far-Field Radiation Patterns from Measurements Made near the Source", J. Acous. Soc. Am. Vol. 33, No. 7, pp. 877-880, 1961
- (4) D. D. Baker, "Determination of Far-Field Characteristics of Large Underwater Sound Transducers from Near-Field Measurements", J. Acous. Soc. Am. Vol. 34, No. 11, pp. 1737-1744, 1962
- (5) G. Chertock, "Sound Radiation from vibrating Surfaces", J. Acous. Soc. Am. Vol. 36, No. 7, pp. 1305-1313, 1964
- (6) W. J. Trott, " Underwater-Sound-Transducer Calibration from Nearfield Data", J. Acous. Soc. Am. Vol. 36, No.8, pp. 1557-1568, 1964
- (7) A. L. Van Buren, " Cylindrical Nearfield Calibration Array", J. Acous. Soc. Am. Vol. 56, No. 3, pp. 849-855, 1974
- (8) R. D. Marciniak, "A Nearfield, Underwater Measurement System", J. Acous. Soc. Am. Vol. 66, No. 4, pp. 955-964, 1979
- (9) A. L. Van Buren, "A 5- to 50-kHz Synthetic Cylindrical Nearfield Calibration Array", J. Acous. Soc. Am. Vol. 77, No. 5, pp. 1927-1932, 1985
- (10) A. L. Van Buren, "Near-Field Calibration Arrays for Acoustic Wavefield Determination", IEEE Trans. Instrumentation Meas. Vol. 41, No. 1, pp. 22-26, 1992
- (11) John L. Butler, "Solution of Acoustical-Radiation Problems by Boundary Collocation", J. Acous. Soc. Am. 48, pp. 325-336, 1970
- (12) L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, Fundamentals of Acoustics, (John Wiley & Sons, New York, 1982), chap.8, pp. 163 ~ pp. 197
- (13) 김원호, 윤종락, 1999, "경계배치법(Boundary Collocation Method)에 의한 근거리 음장 자료로부터 원거리 음장의 예측; 최적 측정점 개수의 결정