

경계요소법을 이용한 음원의 자유음장 복원에 대한 연구

⁰최한림*, 이덕주**

A study for the reconstruction of free field sound source from the measured data in a closed wall by using Boundary Element Method

Han Lim Choi and Duck Joo Lee

ABSTRACT

It is well known that acoustic signals, even measured in an anechoic chamber, can be contaminated due to the wall interference. Therefore, it is necessary to reconstruct the original signal from the measured data, which is very critical for the case of measurement of source signal in a water tunnel. In this thesis, new methods for the reconstruction of sound sources are proposed and validated by using Boundary Element Method from measured data in a closed space. The inverse Helmholtz integral equation and its normal derivative are used for the reconstruction of sound sources in a closed space. An arbitrary Kirchoff surface over the sources is proposed to solve the surface information instead of direct solution for the source. Although sound sources are not directly known by the inverse Helmholtz equation, the original sound source of pressure-field outside of the wall can be indirectly obtained by using this new method.

1. 서론

기계의 성능에 관심이 집중되던 과거와는 달리 시간이 흘러갈수록 소음에 대한 관심이 커지고 있다. 이에 따라 소음규제 법규등을 만족시키기위해

서 소음을 줄이려는 연구가 여러 분야에서 활발히 진행이 되고있다. 이러한 소음 저감 연구에서 가장 먼저 선행되어야 하는 것은 바로 소음의 정확한 측정이다. 이러한 정확한 측정으로부터 연구자들은 소음원의 특성을 파악할 수가 있게 되고 이러한 특성을 바탕으로 소음저감을 하게 된다.

하지만 일반적으로 완벽한 무향실에서 소음을 측정하지 못하는 경우에는 벽에서 일어나는 음파

* 한국과학기술원 대학원 기계공학과 항공우주전공

** 한국과학기술원 기계공학과 항공우주전공

의 산란등의 현상 때문에 기존의 실험만으로는 소음원의 특성을 파악하기가 어렵다. 게다가 스크류나 팬과 같은 복잡한 소음원이 있는 경우에는 그 소음원의 특성을 짐작하거나 모사하는 것조차도 어려운 일이다. 이에 본 연구에서는 모든 면이 벽으로 둘러싸인 공간안에 있는 임의의 소음원의 특성을 수치적인 경계요소법과 벽에서의 실험값을 통해서 알아낼 수 있는 방법을 고안 하였다.

2. 지배방정식 및 수치기법

정지한 압축성 매질에서 압력 및 속도를 아주 작은 교란양으로 가정하고 등엔트로피 과정일 때 속도 포텐셜 ϕ 에 대한 지배 방정식은 다음과 같은 선형 파동방정식이 된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

여기서 a_0 는 음속을 나타내며 $a_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ 처럼 정의된다. 만약 파동이 시간에 대하여 주기적인 함수라고 가정을 하면, 즉

$$\phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (2)$$

일때 (1) 식으로부터 다음과 같은 Helmholtz 방정식을 유도 할 수 있다.

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0 \quad (3)$$

여기서 k 는 파동수 이며 ω/a_0 와 같다. 이 식으로부터 Green's 2nd identity를 이용하여 체적적분을 수행하게 되면 다음과 같은 Helmholtz 적분방정식이 된다.

$$C(P) \phi(P) = \int_V \left[\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P, Q) \right] dS(Q) \quad (4)$$

위의 (4) 식은 위치에 상관없이 음장내 임의의 한점 (P) 에서의 음향량 (acoustic quantity) 은 표면 S 상에서의 단극 (monopole) 과 쌍극 (dipole) 값에 의하여 구할 수 있다는 것을 의미한다. 외부나 내부음장에 음원 (acoustic source) 이 있을 때는 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$C(P) \phi(P) = \int_V \left[\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P, Q) \right] dS(Q) + \int_V Q_{\infty}(X_{\infty}) G(P, X_{\infty}) dV \quad (5)$$

3. 자유음장 구현

본 연구에서 풀고자하는 문제는 그림 1과 같이 풍동이나 수동과 같은 닫혀진 공간안에 임의의 음원이 있을 때 공간의 밖에서 음원에 의한 소음이 어느 정도인지를 벽면에서 측정된 몇 개의 정보를 이용해서 알아내는 것이다.

하지만 임의의 닫혀진 공간 안에 있는 소음원이 어떤 것인지를 알 수가 없기 때문에 앞에서 유도된 경계요소법을 바로 이용할 수는 없다. 소음원을 모르는 상황에서 필요한 과정은 우선 소음원을 적절하게 모사를 하여야 하고 이 소음원을 미지수로 놓는 새로운 방정식이 필요하게 된다.

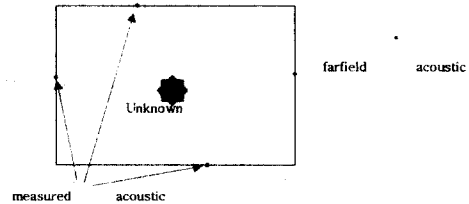


그림 1. 문제의 정의

3.1 소음원의 모사

임의의 소음원을 모사하는 가장 좋은 방법은 전산공력음향학(Computational Aero-Acoustics)에서 많이 쓰이는 Kirchhoff surface를 이용하는 방법이다. Kirchhoff Equation은 우리가 원하는 표면에서의 압력정보와 속도정보만으로 표면 바깥의 공간의 압력정보를 알 수 있는 식이다. 즉, 굉장히 복잡한 비선형의 소음원들이라도 Kirchhoff surface로 둘러싼 후 surface 외부의 정보를 표면의 정보로부터 구하게 되면, 복잡한 소음원을 일일이 규명하지 않아도 소음원의 효과를 충분히 모사 할 수 있는 장점이 있는 것이다.

3.2 소음원을 미지수로 도입한 방정식의 유도

소음원을 6개의 Kirchhoff surface를 이용해서 모사를 하게 되면 소음원에 의한 미지수가 12개가 새로 생기게 된다. 이를 이용해서 경계요소법의 식을 쓰게 되면 다음과 같다.

$$C(P_*)\phi(P_*) = \int_S \left[-\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P_*, Q) + \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P_*, Q) \right] dS(Q) \\ + \int_S \left[\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P_*, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P_*, Q) \right] dS(Q) \quad (6)$$

이 식의 우변의 첫번째 항은 닫혀진 공간의 표면 S에 대한 적분항이고 두번째 항은 Kirchhoff surface K에 대한 적분항이다. 이 식은 닫혀진 공간의 표면을 N개의 요소로 나누고 Kirchhoff surface를 M개로 나눈 경우에 식은 N개가 되고 미지수는 (2*M+N)개가 되어 풀 수가 없게 된다. 따라서 이 식을 풀기 위해서는 2*M개 만큼의 식이 더 있어야 하고 이를 위해서는 닫혀진 공간의 표면에서 2*M개 만큼의 측정이 이루어져야 함을 뜻한다.

3.3 유도된 방정식의 문제점

하지만 앞에서 유도된 방정식은 미지수와 식의 개수가 같은 방정식이라는 하나 행렬이 ill-posed 되어 있기 때문에 역행렬을 구하기가 굉장히 어렵다. 이러한 행렬의 해석을 위한 방법들이 많은 학자들에 의해서 연구가 되어 있고, 또 연구가 진행 중이다. 물론 이러한 방법들이 ill-posed 행렬의 풀이에 효과가 있기는 하지만 이런 방법들 역시 완전한 방법이 아니라 근사화된 방법으로서 앞에서 유도된 방정식의 해를 직접적으로 구하는데는 약간의 문제를 가지고 있다.

앞에서 유도된 방정식의 ill-posedness는 원래의 적분방정식에는 없었던 소음원에 의한 미지수 항들이 행렬안에 포함됨으로써 발생하는 것으로서 위의 행렬의 역행렬을 보통의 방법으로 풀어주게 되면 행렬의 ill-posedness 때문에 소음원의 표면 값들을 제대로 잡아 낼 수 없음을 알 수 있다. 하지만 여기서 중요한 것은 바로 닫혀진 벽 표면의 압력 값들이다. 이 값들은 소음원의 표면값들과는 달리 약간의 교란이 있기는 하지만 비교적 수치적으로 구한 엄밀해와 잘 맞는 것을 알 수 있다. 이것은 문제의 행렬의 대부분을 차지하고 있는 벽 표면의 압력값들의 계수항의 경우에는 well-posed의 특성을 갖고 있기 때문이다.

다음 절에서는 이 특성을 이용하여 소음원에 의한 음장을 구현하는 방법의 유도를 하도록 할 것이다.

3.4 벽외부의 음장구현

먼저 기본적인 경계요소법의 식을 다시 살펴보자.

$$C(P)\phi(P) = \int_S \left[-\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) + \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P, Q) \right] dS(Q) + \phi(P) \quad (7)$$

앞 절에서 우리는 위의 식에서 ϕ , 즉 벽 표면의 압력값들만을 비교적 정확하게 알아낼 수 있었다. 따라서 이것을 이용하면 다음식과 같이 각 표면의 요소들에 대한 ϕ 값들을 알 수 있다.

$$\phi(P) = C(P)\phi(P) - \int_S \left[-\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) + \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P, Q) \right] dS(Q) \quad (8)$$

그리고 이 식을 P 요소에 수직인 벡터(n_p)로 미분을 해주게 되면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p} = C(P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p} - \int_S \left[-\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial n_p} G + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial n_p} \right] dS(Q) \quad (9)$$

그런데 만일 벽 S의 표면이 강제라고 가정을 한다면, 우변의 $C(P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p}$ 항과 $\frac{\partial \phi(P)}{\partial n}$ 항은 0이 되어 위의 식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p} = - \int_S \left[-\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_p} \frac{\partial G}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p} \right] dS(Q) \quad (10)$$

즉, 벽 S 표면의 압력값 ϕ 와 그 압력의 미분항인 $\frac{\partial \phi}{\partial n_p}$ 를 알 수 있으면 소음원에 의한 입사파의 압력

의 벽표면에 수직인 방향의 미분항 $\frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p}$ 를 구할 수 있는 것이다. 하지만 위의 식에서

$\int_S \left[\phi(Q) \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p} \right] dS(Q)$ 항은 극특이성을 갖는 커널

$\frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p}$ 을 포함하고 있다. 이 커널은 $O(1/r^3)$ 의 차수를 갖고 있기 때문에 그것을 그대로 적분하는 것은 많은 에러를 발생시킬 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이 항을 Maue [1949]와 Mitzner [1966]

에 의해 유도된 다음과 같은 Maue 적분방정식을 이용하여 $(1/r^2)$ 로 한 차수 낮아진 식을 이용하여 적분하였다.

$$\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p} \phi dS = \int_S \{ (\hat{n}_p \times \nabla_p G) \cdot (\hat{n} \times \nabla \phi) + k^2 (\hat{n}_p \cdot \hat{n}) G \phi \} dS \quad (11)$$

이와 같은 방법으로 본 연구에서는 벽표면의 압력 정보만으로 벽표면에 도달하는 소음원의 입사 압력과 그 압력의 수직미분항을 구할 수 있으며, 이 정보들을 이용하여 다음과 같은 Kirchhoff Equation을 이용하여 벽 바깥의 임의의 점에 대해 소음원만의 정보를 알아낼 수 있다.

$$C(P)\phi(P) = \int_S \left[\phi(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} G(P, Q) \right] dS(Q) \quad (12)$$

위의 적분에서 S는 벽면이 될 것이고 그 표면의 정보로 들어가는 압력 관련항들 $(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial n})$ 은 앞에서 구한 값들을 이용하면 된다. 다음 장에서는 지금까지 유도한 경계요소법에 대한 검증과 함께 소음원의 자유음장 계산을 위한 식의 검증, 그리고 그 결과에 대해서 논의를 하도록 할 것이다.

4. 계산 결과

4.1 경계요소법의 검증

앞 절에서 유도된 적분형 지배방정식을 이용하여 음장을 해석하는데 있어서 검증을 하기 위해 우선 일정한 속도로 맥동하는 2D 실린더 주위의 음장을 엄밀해와 비교하여 보았다. 그림 2에서 보이는 바와 같이 해가 유일하게 구해지면서 엄밀해와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

방사문제와 더불어 음장의 해석에 중요한 부분을 차지하는 산란 문제 역시 2D 실린더의 경우에 대해서 엄밀해와 비교해보았다. 그림 3은 $r = 20a$ 지점에서 무차원 파동수 ka 가 10.0인 경우의 directivity pattern을 그린 것으로서 엄밀해와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

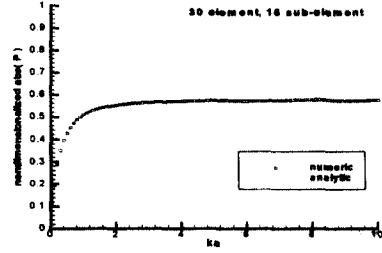


그림 2. 무차원 파동수에 따른 무차원 압력 ($r = 3a$)

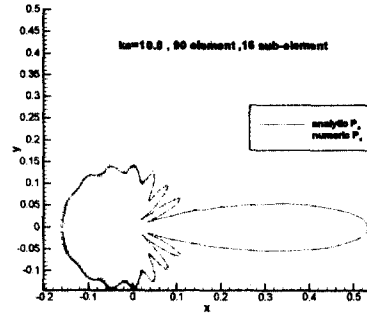


그림 3. $R = 20a$ 일때의 directivity ($ka = 10.0$)

4.2 소음원을 모사 한 후의 결과

이제 앞의 두 절에서 검증이 된 두 방법을 이용하여 소음원을 Kirchhoff surface로 모사를 하고 난 후의 결과에 대해서 논의를 할 것이다. 여기서도 마찬가지로 앞 절에서 사용한 수치적인 실험법을 이용하여 원래의 소음원에 의한 원거리 방사 압력과 본 연구에서 유도된 방법에 의한 결과를 비교 하였다. 그림 4는 새롭게 개발된 방법을 검증할 경우를 나타내고 있다. 그림에서 보이는 바와 같이 임의의 음원을 Kirchhoff surface로 써서 모사를 하였다. 이때 벽면에서 몇 개의 점에서 측정을 한다고 가정하고 벽면 바깥의 음장을 계산해보았다. 그림 5는 이런 방법에 의해서 음원이 단극과 쌍극으로 이루어진 경우에 있어서의 계산된 결과를 나타내고 있으며 연구에서 개발된 방법이 실제의 해와 잘 맞고 있음을 알 수 있다.



그림 4. 원형벽에 의해 둘러싸인 임의의 음원

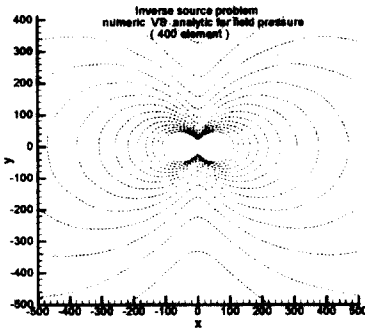


그림 5. Inverse source problem(자유음장복원)
단극+쌍극음원 (실선 : analytic, 점선 : numeric)

5. 결론

지금까지 경계요소법을 2D의 방사문제와 산란문제에 적용시켜보았고 그 결과가 엄밀해와 잘 일치한다는 것을 검증하였다. 하지만 산란 문제는 물체에 입사되는 음원이 명확히 규명이 된 경우에 적용이 가능한 방법으로서 음원을 정확하게 모사할 수 없는 경우에는 적용이 될 수 없는 문제점이 있다. 따라서 본 연구에서는 복잡하면서도 우리가 모르는 음원을 가상의 Kirchhoff surface로 싸서 음원을 모사하고, 이렇게 모사된 음원을 unknown항으로 만든 새로운 적분식을 유도하였다. 또 이 새로운 적분식에서 나타나는 행렬식의 ill-posedness를 극복할 수 있는 새로운 음원구현식을 이용하여 미지의 소음원에 의한 자유음장을 구현할 수 있었다. 본 연구에서 연구된 내용을 간략히 정리하면 다음과 같다.

1. 2차원 경계요소법을 이용하여 소음의 방사문제

와 실린더에 의한 산란문제를 검증하였다.

2. 소음원을 Kirchhoff surface를 이용하여 모사하면서 복잡한 소음원을 모사할 수 있었고, 이를 이용할 수 있는 새로운 적분식을 유도하였다.

3. 위의 적분식의 행렬의 ill-posedness를 극복할 수 있는 새로운 음원 구현방법을 고안하였으며, 이 방법을 수치적인 실험을 이용하여 검증하였다.

4. 결국 소음원을 모르는 경우에도 소음원을 둘러싼 임의의 공간 (풍동이나 수동과 같은)의 표면에서의 측정된 압력 값들만으로 벽으로 둘러싸인 임의의 외부공간으로 전파되는 소음원의 특성을 알아낼 수 있었다.

본 연구에서 유도된 식을 이용한다면 모르는 임의의 소음원의 특성을 알아내는 방법이 지금까지의 방법보다 훨씬 수월하게 수행이 될 수 있을 것이며, 임의의 음원이 있더라도 이를 둘러싼 벽으로 둘러싸인 다음 그 벽 표면에서의 압력 값들이 실제적인 실험을 통해 측정이 되면 그 정보만으로도 소음원의 특성을 파악할 수 있게 될 것이다. 소음원이 복잡하면 할수록 소음원을 모사하는 Kirchhoff surface의 요소수도 증가를 하게 되어 측정해야 하는 지점의 수도 증가를 하게 되나 이것은 필연적인 사항이다.

참고문헌

이강덕, [1996], 일반 경계조건을 가진 얇은 물체에 대한 직접 음향 경계요소법의 개발, 한국과학기술원 박사학위논문.

Colton, Kress, [1998], Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer
Gardner and Bernhard, [1988], Noise Source Identification Technique Using an Inverse Helmholtz Integral Equation Method, 110, pp.84-90.

Santana etc., [1984], Inverse Problems of Acoustic and Elastic waves, siam

Tikhonov etc., [1990], Numerical Methods for the solution of Ill-posed Problems, Kluwer Academic Publishers.