

지지부의 운동을 가진 회전원판의 복소모드시험

°함 종석*, 이종원*

(Complex Modal Testing for Rotating Disks with Support Motion)

(Jong-Seok Ham, Chong-Won Lee)

ABSTRACT

Complex modal testing method for rotating disks with support motion is introduced, which handles the pairs of two point excitation and responses of the disk as complex input and output, respectively. This method utilizes the directivity information and the separation over the rotational speed of forward and backward traveling wave modes or bending coupled modes in the directional frequency response functions(dFRFs). This method synthesizes the normal/reverse dFRFs and complex wave dFRF, which were originally applied to rotating shaft and rotating disk, respectively, and is applied to complex system with dynamically coupled rotating disks and shaft. Experiments with a commercial hard disk drive spindle system demonstrate the validity of this method.

1. 서론

최근 컴퓨터 하드디스크, CD-ROM, DVD 등의 회전기기에 있어서 고속회전, 고성능 및 고정밀성이 요구되고 있으나 진동문제가 중요한 제약조건이 되고 있다. 따라서 효과적인 모드해석에 대한 방법의 요구된다. 일반적으로 회전축계에 있어서 원판은 강체로 모델링 해왔는데, 좀더 정확한 진동해석을 위해서는 탄성체로 모델링 해야 하며, 이때 회전축과 원판의 동력학적인 연성으로 인하여 진동해석이 매우 복잡하게 된다.

회전체역학 분야에서 축과 디스크로 구성된 시스템의 진동해석에 대하여 많은 연구가 있었으나, 주로 원판의 탄성이 축의 거동에 미치는 영향에 관심이 있었으며[1, 2], 몇몇 연구는[3, 4] 축과 디스크의 연성의 중요성을 논하였다. 따라서 최근에는 원판자체의 운동 뿐만 아니라 지지계의 운동도 고려하여 연구를 진행하는 추세이다.[5,6]

가장 최근의 연구에서 다중 원판이 이를 지지하는 강체 축과 연성이 일어나는 복잡한 진동현상에 대하여 축과 디스크의 연성으로 인한 동역학적인 성질과 회전속도에 따른 모드분리 현상을 이용하여 수치해석과 실험에 의해서 모드규명을 한 바 있다[7]. 이 연구에서는 원판을 회전시키면서 주파수 응답함수를 워터폴 플롯으로 나타내어 각 모드의 회전 수에 따른 주파수 분리현상을 이용하여 모드를 규명하였다.

본 연구에서는 지지 축과 다중원판으로 구성된 계에 대하여 쌍의 가진점과 응답점을 복소 입력과

출력으로 취하는 복소 모드 시험법을 다룬다. 이는 과 방향성 주파수 응답함수[8]와 축 선회에 대한 방향성 주파수 응답함수[9, 10]의 방향성과 각 모드의 주파수 분리현상을 이용하는 방법으로서, 이미 독자적인 응용에서 연구된 바 있는 원판의 복소모드 시험법[8]과 축의 복소 모드 시험법[9, 10]을 통합하여 축과 원판의 진동이 동시에 존재하는 경우 원판의 진동을 통하여 효과적으로 시스템을 규명하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 운동방정식

그림 1의 전형적인 상업용 하드디스크 스피indle 계는 여러 개의 원판을 가지고 있는 축이 베어링으로 지지되는 조립체이며, 해석모델은 그림 2와 같다. 계의 운동은 4개의 좌표계로 나타낸다. 관성좌표계 X, Y, Z 의 X 축은 베어링의 중심선을 지나고, 좌표계 XYZ 은 관성좌표계와 평행하며 그원점은 원판의 중심에 있다. 또 좌표계 xyz 은 X 축을 중심으로 축과 함께 회전하는

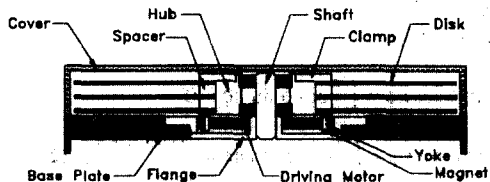


Figure 1. Schematic of a typical three-disk HDD spindle system.

*한국과학기술원 기계공학과

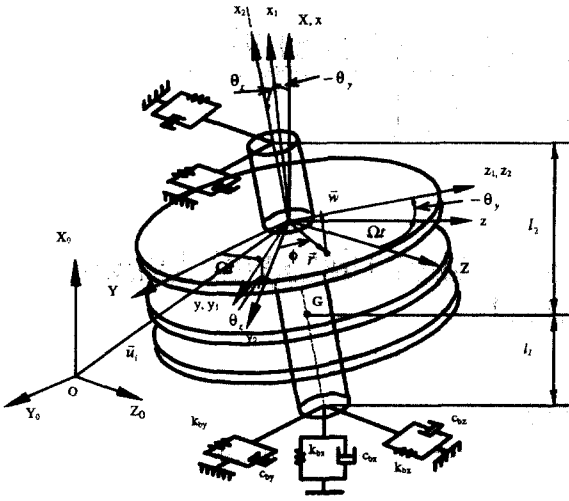


Figure 2. Analysis model and the coordinate system

좌표계이며, 좌표계 $x_2 y_2 z_2$ 은 원판에 고정되어 있고, 그 방향은 y 축을 중심으로 $-\theta$, 회전한 다음, z_2 축을 중심으로 θ_z 만큼 회전하는 것으로 정의한다. 원판은 고전적인 원판(classical plate)으로 가정하여, 각 부분의 에너지 표현식과 해밀턴의 원리를 사용해서 부록 1과 같이 운동방정식을 유도할 수 있다. 이 식들은 논의의 편의를 위해서 베어링들은 등방성이고, 베어링들의 계의 질량 중심에 관한 모멘트 합력을 영이라고 가정하면 축의 회전 (rotary)과 횡방향 (translational) 운동은 연성이 일어나지 않는다. 이 식들은 원판의 운동을 다음식과 같이 원판 자체의 고유모드를 시도함수 (trial function)로 하여 Galerkin의 방법을 사용하거나, 변분 형태의 식으로부터 이산화 할 수 있다.

$$w^{(i)}(r, \phi, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} R_{mn}^{(i)}(r) \{a_{mn}^{(i)}(t) \cos n\phi + b_{mn}^{(i)}(t) \sin n\phi\} \quad (2.1)$$

여기서 m 과 n 은 각각 원판 모드의 절원 수와 절직경 수 이고, $R_{mn}^{(i)}(r)$ 은 원판의 반경방향 모드형상, 그리고 $a_{mn}^{(i)}(t)$ 과 $b_{mn}^{(i)}(t)$ 은 일반 좌표계이다. 또 원주방향 시도 함수 간에 다음 관계가 있다.

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \cos n\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin n\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \sin n\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi \cos n\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq 1 \\ \pi & \text{for } n = 1 \end{cases}, \quad (2.2)$$

이 식과 부록의 운동 방정식으로부터 절직경이 한개인 원판모드는 축의 세차모드와 연성을

일으키고, 절직경이 없는 원판모드는 축의 축방향 모드와 연성을 일으키를 알 수 있다. [4, 6, 7] N 개의 동일한 원판들과 회전 좌표계에서 다음의 복소 좌표를 도입하면,

$$\psi = \theta_z + j\theta_y, \quad c_{mn}^{(i)} = a_{mn}^{(i)} + jb_{mn}^{(i)}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.3)$$

이산화 된 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_T (\ddot{\psi} - j\Omega(\alpha-2)\dot{\psi} + (\alpha-1)\Omega^2\psi + \omega_i^2\psi) - \sum_i \sum_m B_{m1}^{(i)} (\ddot{c}_{m1} + \Omega^2 c_{m1}) = \tau_\psi$$

$$(M_i + \sum_i M_i) \ddot{u}_{Gx} + \sum_i \sum_m B_{m0}^{(i)} \ddot{a}_{m0}^{(i)} + 2k_{bx} u_{Gx} = f_x$$

$$A_{mn}^{(i)} \{ \ddot{c}_{mn}^{(i)} + \omega_{mnc}^{(i)2} c_{mn}^{(i)} \} - B_{mn}^{(i)} \delta_{n1} (\ddot{\psi} + \Omega^2 \psi) + B_{mn}^{(i)} \delta_{n0} \ddot{u}_{Gx} = f_{mn}^c$$

$$A_{mn}^{(i)} = \int_{(i)} \pi \rho_d h R_{mn}^{(i)2}(r) dr \quad B_{mn}^{(i)} = \int_{(i)} \pi \rho_d h R_{mn}^{(i)}(r) r^2 dr$$

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{J_T}, \quad \tau_\psi = \tau_z + j\tau_y$$

$$f_{mn}^c = f_{mnc} + jf_{mns}$$

$$= \int f_{w_i} R_{mn}(r) \cos n\phi r dr d\phi + j \int f_{w_i} R_{mn}(r) \sin n\phi r dr d\phi \quad (2.4)$$

여기서 k_i 는 축 지지부의 강성, J_T 는 전체 시스템의 반경관성모멘트, α 는 극관성 관성모멘트에 대한 반경 관성모멘트의 비, $R_{mn}^{(i)}$ 는 원심력이 있는 상태에서의 디스크의 반경방향 모드형상, $\omega_{mnc}^{(i)}$ 는 회전원판의 회전 좌표계에서의 고유진동수, 그리고 Ω 는 회전 속도이다. 식 (2.4)는 다음의 변환에 의하여 쉽게 회전 좌표계에서 고정 좌표계로 변환할 수 있다.

$$\tilde{\psi} = \psi e^{j\Omega t}, \quad \tilde{c}_{mn}^{(i)} = c_{mn}^{(i)} e^{jn\Omega t} \quad (2.5)$$

여기서 $\tilde{\psi}$ 와 $\tilde{c}_{mn}^{(i)}$ 는 복소 정지 좌표계이다.

2.1 비연성 운동방정식

원판 진동모드의 절 직경 수가 2개 이상일 때 축과 원판은 동력학적으로 연성이 일어나지 않으므로, 식 (2.4)에서 정규화 된 원판의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{c}_{mn}^{(i)} + \omega_{mnc}^{(i)2} c_{mn}^{(i)} = f_{mn}^c \quad (2.6)$$

이 식을 정지 좌표계로 표시하면

$$\ddot{c}_{mn} - 2jn\Omega \dot{c}_{mn} + (\omega_{mnc}^2 - n^2\Omega^2) c_{mn} = f_{mn}^c \quad (2.7)$$

이고, 여기서 편의상 (-)와 첨자를 생략하였다. 또 이 식을 후리에 변환하면

$$C_{mn}(j\omega) = H_{fc}^{mn}(j\omega)F_{mn}(j\omega) \quad (2.8)$$

이다. 여기서 $C_{mn}(j\omega)$, $F_{mn}(j\omega)$ 는 각각 c_{mn} 와 f_{mn}^c 의 후리에 변환이고 좌표계에서 정의된 좌표방향성 주파수 응답함수(wave dFRF)는 다음과 같다.[8]

$$H_{fc}^{mn}(j\omega) = \frac{-1}{2\omega_{mn}(\omega - \omega_{mn}^F)} + \frac{1}{2\omega_{mn}(\omega - \omega_{mn}^B)}$$

$$\omega_{mn}^F = (\omega_{mn} + n\Omega), \omega_{mn}^B = -(\omega_{mn} - n\Omega) \quad (2.9)$$

여기서, ω_{mn}^F 와 ω_{mn}^B 는 각각 원판의 전진과 후진방향의 좌주파수(traveling wave frequency)이다. 또 이 식의 복소공액 모드는 다음과 같으며 이는 계의 완전한 응답을 표시하는데 필요하다.

$$\hat{C}_{mn}(j\omega) = H_{fc}^{mn}(j\omega)\hat{F}_{mn}(j\omega)$$

$$H_{fc}^{mn}(j\omega) = \frac{1}{2\omega_{mn}(\omega + \omega_{mn}^F)} + \frac{-1}{2\omega_{mn}(\omega + \omega_{mn}^B)}$$

$$= \bar{H}_{fc}^{mn}(-j\omega) = H_{fc}^{mn}(-j\omega) \quad (2.10)$$

$\hat{C}_{mn}(j\omega)$ 와 $\hat{F}_{mn}(j\omega)$ 는 각각 $\bar{c}_{mn}(t)$ 와 \bar{f}_{mn}^c 의 후리에 변환이다. 여기서 $H_{fc}^{mn}(j\omega)$ 는 완전히 $H_{fc}^{mn}(j\omega)$ 에 의존하며 일반적으로 다음의 관계에 있다.

$$\hat{C}_{mn}(j\omega) \neq \bar{C}_{mn}(j\omega), \hat{F}_{mn}(j\omega) \neq \bar{F}_{mn}(j\omega) \quad (2.11)$$

한편, 축의 비연성 운동방정식은 회전 좌표계에서

$$J_T(\ddot{\psi} - j\Omega(\alpha - 2)\dot{\psi} + (\alpha - 1)\Omega^2\psi + \omega_i^2\psi) = \tau_\psi$$

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{J_T}, \tau_\psi = \tau_z + j\tau_y \quad (2.12)$$

이고, 이 식의 후리에 변환은 다음과 같다.

$$\Psi(j\omega) = H_{\tau\psi}(j\omega)T_\psi(j\omega), \hat{\Psi}(j\omega) = H_{\tau\hat{\psi}}(j\omega)\hat{T}_\psi(j\omega)$$

$$H_{\tau\psi}(j\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}}} \left(\frac{-1}{\omega - \omega_F} + \frac{1}{\omega + \omega_B} \right)$$

$$H_{\tau\hat{\psi}}(j\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}}} \left(\frac{1}{\omega + \omega_F} + \frac{-1}{\omega - \omega_B} \right)$$

$$= H_{\tau\psi}(-j\omega) = \bar{H}_{\tau\psi}(j\omega)$$

$$\omega_F = \frac{\Omega(\alpha - 2)}{2} + \sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}}$$

$$\omega_B = \sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}} - \frac{\Omega(\alpha - 2)}{2} \quad (2.13)$$

여기서 \hat{T}_ψ 와 $\hat{\Psi}$ 는 각각 τ_ψ 와 Ψ 의 후리에 변환이다. 여기서 $\alpha=2$ 를 제외한 일반적인 경우에 전진 및 후진모드의 고유진동수의 크기가 다르며 정지 좌표계에서의 주파수는 다음과 같다.

$$\bar{\omega}_F = \omega_F + \Omega = \sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}} + \frac{\Omega\alpha}{2}$$

$$\bar{\omega}_B = -\omega_B + \Omega = \left(\sqrt{\omega_i^2 + \frac{\Omega^2\alpha^2}{4}} - \frac{\Omega\alpha}{2} \right) \quad (2.14)$$

식 (2.9)와 (2.13)으로부터 전진 파 모드 주파수와 세차모드 주파수는 방향성 주파수 응답함수의 양의 주파수 영역에서 나타나며 후진모드 주파수는 음의 주파수 영역에서 나타남을 알 수 있으며 이는 나중에 모드 확인에 이용된다.

2.1 연성 운동방정식

식 (2.4)로부터 굽힘 연성모드에 대한 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_y \\ \hat{\mathbf{q}}_z \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_y \\ \hat{\mathbf{q}}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_y \\ \hat{\mathbf{q}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{q}_y = [\theta_z, a_{01}^{(1)}, a_{01}^{(2)}, \dots, a_{M1}^{(N)}]^T$$

$$\mathbf{q}_z = [\theta_y, b_{01}^{(1)}, b_{01}^{(2)}, \dots, b_{M1}^{(N)}]^T$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} J_T & -B_{01} & -B_{01} & \dots & -B_{M1} \\ -B_{01} & A_{01} & 0 & \dots & 0 \\ -B_{01} & 0 & A_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_{M1} & 0 & 0 & 0 & A_{M1} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 - \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} J_T(\omega_i^2 + (\alpha - 1)\Omega^2) & -B_{01}\Omega^2 & -B_{01}\Omega^2 & \dots & -B_{M1}\Omega^2 \\ -B_{01}\Omega^2 & A_{01}\omega_{01c}^2 & 0 & \dots & 0 \\ -B_{01}\Omega^2 & 0 & A_{01}\omega_{01c}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_{M1}\Omega^2 & 0 & 0 & \dots & A_{M1}\omega_{M1c}^2 \end{bmatrix}$$

여기서, M 과 N 은 각각 관심있는 원판 진동 모드의 절직경 수와 원판의 개수이다. Lamda 행렬이론[10]을 이용하여 주파수 응답함수를 구하고, 다음과 같이 복소표기를 채택하면

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_y + j\mathbf{q}_z, \quad \mathbf{g} = \mathbf{f}_y + j\mathbf{f}_z, \quad (2.16)$$

다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{P}(j\omega) = [\mathbf{H}_{gp}(j\omega)\mathbf{H}_{\hat{g}p}(j\omega)] \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{G}}(j\omega) \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

여기서 $\mathbf{P}(j\omega)$, $\hat{\mathbf{P}}(j\omega)$, $\mathbf{G}(j\omega)$ 그리고 $\hat{\mathbf{G}}(j\omega)$ 는 각각 $\mathbf{p}(t)$, $\hat{\mathbf{p}}(t)$, $\mathbf{g}(t)$, $\hat{\mathbf{g}}(t)$ 의 후리에 변환이며 방향성 주파수 응답함수와 보통의 주파수 응답함수와의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{H}_{gp}(j\omega) &= \mathbf{H}_{yy} + \mathbf{H}_{zz} - j(\mathbf{H}_{zy} - \mathbf{H}_{yz}) \\ 2\mathbf{H}_{\hat{g}p}(j\omega) &= \mathbf{H}_{yy} - \mathbf{H}_{zz} + j(\mathbf{H}_{zy} + \mathbf{H}_{yz}) \\ \mathbf{H}_{gp}(j\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{\hat{g}p}(-j\omega) \\ \mathbf{H}_{\hat{g}p}(j\omega) &= \overline{\mathbf{H}}_{gp}(-j\omega) \end{aligned} \quad (2.18)$$

계가 등방성일 경우 다음의 관계식이 성립한다.

$$\mathbf{H}_{gp} = 0 \quad (2.19)$$

3. 관측자 기반 주파수 응답함수(dFRF from ground-based observer)

그림 2에서 원판의 한 점의 변위는 축의 작은 각도 변화를 가정하면

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= u_{ix}\bar{n}_x + u_{iy}\bar{n}_y + u_{iz}\bar{n}_z + \\ &(-\theta_y\bar{n}_y + \theta_z\bar{n}_z) \times (r \cos \theta\bar{n}_y + r \sin \theta\bar{n}_z) + w_i\bar{n}_{x2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\theta = \phi + \Omega t$$

이고, 외부 측정장치로 측정되는 수직방향의 근사화된 변위는

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}^{(i)}(r)(a_{mn}^{(i)}(t) \cos n\theta + b_{mn}^{(i)}(t) \sin n\theta) \\ &- r\{\theta_z \cos \theta + \theta_y \sin \theta\} + u_{ox} \end{aligned} \quad (3.2)$$

로 나타낼 수 있으며, 각각은 원판의 변형, 축의 기울어짐 그리고 축의 상하운동으로 구성된다. 이 식을 복소수 표기법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_i(r, \theta, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty} (c_{mn}^{(i)}(t)e^{-jn\theta} + \bar{c}_{mn}^{(i)}(t)e^{jn\theta}) R_{mn}^{(i)}(r) \\ &- \frac{r}{2} (\psi(t)e^{-j\theta} + \bar{\psi}(t)e^{j\theta}) + u_{ox}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

이 식의 후리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= \frac{1}{2} \sum (C_{mn}(j\omega)e^{-jn\theta} + \hat{C}_{mn}(j\omega)e^{jn\theta}) R_{mn}(r) \\ &- \frac{r}{2} (\Psi(j\omega)e^{-j\theta} + \hat{\Psi}(j\omega)e^{j\theta}) + U_{ox}(j\omega) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$U_{ox}(j\omega) = H_{ox}(j\omega)F_x(j\omega).$$

원판 위의 한 점 (r_l^f, θ_l^f) 에 수직으로 힘을 가하면 다음과 같이 표현된다.

$$f(r, \theta, t) = \frac{f_0(t)\delta(r - r_l^f)\delta(\theta - \theta_l^f)}{r}$$

$$f_{mn}(t) = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta, t) e^{jn\theta} R_{mn}(r) r dr d\theta$$

$$= f_0(t) R_{mn}(r_l^f) e^{jn\theta_l^f}$$

$$\tau = \tau_z + j\tau_y$$

$$= -f_0(t) \{\cos \theta_l^f + j \sin \theta_l^f\} = -f_0 e^{j\theta_l^f}$$

$$f_x = \frac{f_0}{r_l^f}$$

$$F_{mn}(j\omega) = F(j\omega) R_{mn}(r_l^f) e^{jn\theta_l^f}$$

$$T_\psi(j\omega) = -F(j\omega)e^{j\theta_l^f}, \quad F_x(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{r_l^f} \quad (3.5)$$

여기서 $F(j\omega)$ 는 $f_0(t)$ 의 후리에 변환이다. 식 (3.5)을 식 (3.4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(j\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty} (H_{fc}^{mn} F e^{jn(\theta_l^f - \theta_k^f)} + H_{fc}^{mn} F e^{-jn(\theta_l^f - \theta_k^f)}) R_{mn}(r_l^f) R_{mn}(r_k^f) \\ &+ \frac{r_k^f}{2} (H_{tv} e^{j(\theta_l^f - \theta_k^f)} + H_{tv} e^{-j(\theta_l^f - \theta_k^f)}) + \frac{H_x F}{r_l^f} = H_{tot}(j\omega) F(j\omega) \end{aligned} \quad (3.6)$$

따라서 관측자 기반 주파수 응답함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} H_{tot}(j\omega) &= \frac{1}{2} \sum (H_{fc}^{mn}(j\omega) e^{jn\theta_k} + H_{fc}^{mn}(j\omega) e^{-jn\theta_k}) R_{mn}(r_l^f) R_{mn}(r_k^f) \\ &+ \frac{r_k^f}{2} (H_{tv}(j\omega) e^{j\theta_k} + H_{tv}(j\omega) e^{-j\theta_k}) + \frac{H_x(j\omega)}{r_l^f} \end{aligned} \quad (3.7)$$

절직경 수가 2개 이상이거나 균형 모드인 비연성의 경우에는 식 (2.9)와 (2.10)에서 파 방향성 주파수 응답함수(wave dFRF)를, 식 (2.13)에서 축의 방향성 주파수 응답함수를 구할 수 있으며, 연성인 경우에는 2.1절의 방법으로 구할 수 있다. 원판과 축의 복소 표기에 의한 주파수 응답함수는 방향성 정보를 가지며 이를 각각 파방향성 주파수 응답함수와 축의 방향성 주파수 응답함수라 정의하고 이를 벡터형식으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{H}_{sp} = [H_{cv}, H_{fc}^{00}, H_{fc}^{01}, \dots]^T$$

$$\mathbf{H}_{\hat{sp}} = \overline{\mathbf{H}}_{sp}(-j\omega) \quad (3.8)$$

이다. 이 식은 연성과 비연성 모드를 포함한다. 축 방향의 운동은 방향성을 나타내지 않으므로 생략한다.

4. 복소 모드 시험

이 절에서는 2군데의 가진과 응답을 이용한 복소 모드 시험법에 대하여 설명한다. 응답과 가진을 복소 표기로 나타내면

$$p = w_1 + jw_2, \quad g = f_1 + jf_2$$

방향성 주파수 응답함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \begin{bmatrix} H_{sp}(j\omega) & H_{\hat{sp}}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G(j\omega) \\ \hat{G}(j\omega) \end{Bmatrix}, \\ 2H_{sp}(j\omega) &= H_{11}(j\omega) + H_{22}(j\omega) - j\{H_{21}(j\omega) - H_{12}(j\omega)\} \\ 2H_{\hat{sp}}(j\omega) &= H_{11} - H_{22} + j\{H_{21} + H_{12}\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

측정점과 가진점을 다음과 같이 하면

$$\begin{aligned} \theta_{11} = \theta_{22} = 0, \theta_{12} = -\theta_{21} = -\theta_0 = -\frac{\pi}{2} \\ r_1^r = r_2^r = r_1^f = r_2^f = r_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

정방향(normal) 및 역방향(reverse) 주파수 응답함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2H_{sp} &= \sum R_{mn}^2(r_0) \{H_{fc}^{mn} [1 + \sin n\theta_0] + H_{fc}^{mn} [1 - \sin n\theta_0]\} \\ &\quad + r_0 \{H_{cv} [1 + \sin \theta_0] + H_{cv} [1 - \sin \theta_0]\} + \frac{H_x}{r_0} \\ 2H_{\hat{sp}} &= \sum jR_{mn}^2(r_0) \cos n\theta_0 \{H_{fc}^{mn} + H_{fc}^{mn}\} \\ &\quad + jr_0 \cos \theta_0 \{H_{cv} + H_{cv}\} + j \frac{H_x}{r_0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

위의 식에서 $\sin n\theta_0 = 1$ ($n=1, 5, 9$)이 성립하는 경우에는, 전체 정방향 주파수 응답함수(normal dFRF)에는 축의 축 방향 운동 외에 파 방향성 응답함수와 축의 정방향 복소 주파수 응답함수만 남고 공액(complex conjugate) 주파수 모드는 나타나지 않는다. 즉, 전진방향 모드는 음의 주파수 영역에 나타나고 후진방향 모드는 음의 주파수 영역에 나타난다.

반면에 $\sin n\theta_0 = -1$ ($n=3, 7, 11$)인 경우에, 전체 정방향 주파수 응답함수에 축의 축 방향 진동 외에 공액(complex conjugate) 방향성 주파수 응답함수

만이 나타나므로 위와는 반대로 전진방향 모드는 음의 주파수 영역에, 후진방향 모드는 양의 주파수 영역에 나타난다. 위의 두 가지 경우 모두, 역방향 주파수 응답함수에서는 축의 축 방향 진동 외에 나타나지 않으므로 축의 축 방향 진동 모드만이 정방향 및 역방향 함수의 양과 음의 주파수 영역에서 같은 주파수의 크기와 진동크기로 나타난다.

절직경수가 짝수일 경우 전진 및 후진방향 모드가 전체 정방향 및 역방향 주파수 응답함수의 양과 음의 주파수 영역에서 대칭으로 나타난다.

5. 모드분리

고정 좌표계에서 회전 원판의 비연성 모드의 분리는

$$\omega_{mn}^F - |\omega_{mn}^B| = 2n\Omega, n=1,2,3,\dots \quad (5.1)$$

이고, 비연성 축의 전후방 세차모드의 분리는

$$\tilde{\omega}^F - |\tilde{\omega}^B| = \alpha\Omega, \quad 0 < \alpha = J_p/J_T \leq 2. \quad (5.2)$$

그러나 연성모드의 경우에는 모드분리가 달라지며 참고문헌[7]에 구체적으로 연구되어 있다. 이를 요약하면, 축의 세차모드와 원판의 절직경수가 한 개인 모드와 연성되어 다중원판의 경우 균형모드와 불균형모드가 생기는데 균형모드는 축이 강제인 경우 원판이 동역학적으로 서로 상쇄되어 비연성 모드의 경우와 같아진다. 그러나 불균형모드의 경우에는 1차 굽힘연성모드와 2차 굽힘연성 모드가 생기는데, 각 연성모드의 경우에 전진과 후진 모드의 분리는 축과 원판의 형상, 지지부의 강성, 회전속도, 전체 시스템의 극관성 모멘트와 반경방향 관성모멘트의 비에 의해 결정된다. 일반적으로 1차 굽힘연성모드의 주파수 크기는 항상 원판의 (0, 1)의 모드보다 작으며, 2차 연성모드는 (0,1) 와 (1,1)의 사이에 있게 된다

5. 실험

실험은 5장 짜리 하드디스크 스피들 시스템에 대하여 수행하였으며 주파수 응답함수는 원판이 여러 속도로 회전할 때 충격시험으로 구하였다. 2점 가진과 2점 측정법을 사용하였는데 2점의 각도는 90도가 되게 하였다. 먼저 주파수 응답함수 H_{11}, H_{12}, H_{21} 그리고 H_{22} 를 구한 다음 식 (4.1)로써 방향성 주파수 응답함수를 구하였다.

그림 3은 회전속도를 변화시키면서 충격시험을 하여 주파수 응답함수의 크기를 워터폴 플롯(Waterfall plot)으로 나타낸 것이다. (0,2) 와 (0,3)의 원판모드는 회전수에 따른 모드 분리로서 쉽게 구분이 가능하며, 450-700 Hz 영역에 여러 모드가 중첩되어 있다. 여기에는 모드의 분리가 거의

회전속도의 2배가 되는 모드 2쌍이 존재하는데, 주파수가 낮은 모드의 쌍이 1차 불균형 모드(1F, 1B) 이고 약간 높은 것이 균형 원판 모드((0,1)F, (0,1)B)이다. 2차 불균형모드의 주파수는 매우 크므로 이 그림에는 나타나지 않는다. 모드분리가 일어나지 않는 모드는 1차 축 방향 불균형 모드(axial)와 균형원판 (0,0) 모드이다.

그림 4은 원판이 정지하고 있을 때의 정방향 및 역방향 주파수 응답함수를 나타내고 있으며, 그림 5와 그림 6은 각각 회전속도가 초당 10과 20일 때의 방향성 주파수 응답함수를 나타낸 것이다. 이들 그림에서 1차 불균형 모드인 1F와 1B는 각각 정방향 주파수 응답함수(normal dFRF)의 양과 음의 주파수 영역에서 나타나며, 전진모드(후진모드)의 주파수 크기는 거의 회전속도만큼 증가(감소)한다. 그러나 역방향 주파수 응답함수(reverse dFRF)는 거의 사라지고 공액모드인 1F와 1B는 정방향 및 역방향 주파수 응답함수에서 거의 사라진다.

균형 모드인 (0,1)F와 (0,1)B는 1차 불균형 모드인 1F와 1B의 경우와 거의 동일하지만 1차 불균형 모드는 주파수의 크기가 균형모드보다 작다.

절 직경 수가 3개인 원판모드 (0,3)F와 (0,3)B는 균형 모드인 (0,1)F와 (0,1)B의 경우와 비슷하지만 정방향 주파수 응답함수에서 전진모드는 음의 주파수 영역에서 나타나고 후진모드는 양의 주파수 영역에서 나타나고 주파수 크기는 회전속도의 3배 만큼 증가 및 감소한다.

또한 이러한 모드(1차 불균형 모드, 절직경이 홀수인 원판모드)는 등방성 시스템의 경우 공액 모드가 나타나지 않지만, 위 결과에서 나타나는 것은 계의 비등방성, 측정오차에 기인한 것이라고 판단되고, 특히 식 (4.3)의 가진과 응답의 각도(phase angle error θ_0)의 차이로 인한 오차는 절 직경 수가 커질수록 공액 모드의 크기는 상대적으로 크다.

축 방향 모드와 (0,0)의 원판모드는 음과 양의 주파수 영역에서 같은 주파수 크기로 나타나며 진동의 크기가 같고 회전속도가 변해도 모드분리는 발생하지 않는다.

6. 결론

방향성 주파수 응답함수를 이용한 복소모드 시험법은 지지부와 연성된 회전원판의 진동모드 규명하는데 매우 유용하다. 이러한 방법은 방향성 주파수 응답함수의 방향성과 회전속도에 따른 모드분리의 현상을 이용하는 것이다. 특히 1차 불균형 모드의 주파수 크기는 균형 모드보다 작고 모드분리는 비슷하며, 전진 및 후진모드는 각각 정방향 주파수 응답함수의 양과 음의 주파수 영역에서 나타나지만 역방향 주파수 응답함수에서는 사라진다.

이상의 성질을 이용해서 본 시스템의 진동모드를 쉽게 규명할 수 있었다.

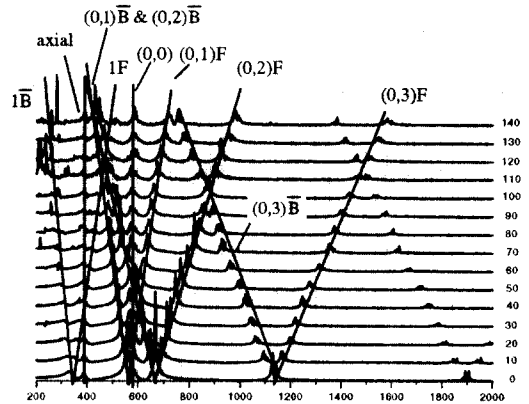


Figure 3. Waterfall plot of the five-disk HDD spindle system.

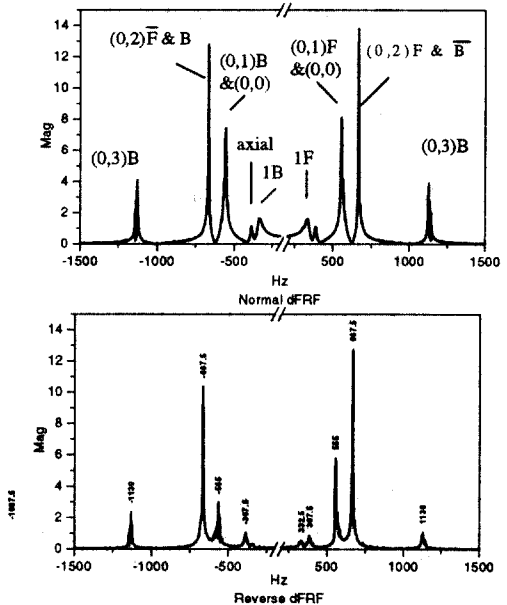


Figure 4. dFRFs of the five-disk HDD spindle system: 0 rps

$$\begin{aligned}
& (J_2 + \sum_i J_{i2}) \ddot{\theta}_y - (J_1 - J_2 - J_3 + \sum_i (J_{i1} - J_{i2} - J_{i3})) \Omega \dot{\theta}_z \\
& + (J_1 - J_3 + \sum_i (J_{i1} - J_{i3})) \Omega^2 \theta_y - \sum_i \int r_i (\ddot{w}_i + \Omega^2 w_i) \sin \phi dm_i \\
& + c_{br} \{ \dot{u}_{oz} (l_2 - l_1) + \dot{\theta}_y (l_1^2 + l_2^2) \} + k_{br} \{ u_{oz} (l_2 - l_1) + \theta_y (l_1^2 + l_2^2) \} = 0 \\
& (J_3 + \sum_i J_{i3}) \ddot{\theta}_z + (J_1 - J_2 - J_3 + \sum_i (J_{i1} - J_{i2} - J_{i3})) \Omega \dot{\theta}_y \\
& + (J_1 - J_2 + \sum_i (J_{i1} - J_{i2})) \Omega^2 \theta_z - \sum_i \int r_i (\ddot{w}_i + \Omega^2 w_i) \cos \phi dm_i \\
& + c_{br} \{ \dot{u}_{Gy} (l_2 - l_1) + \dot{\theta}_z (l_1^2 + l_2^2) \} + k_{br} \{ u_{Gy} (l_2 - l_1) + \theta_z (l_1^2 + l_2^2) \} = 0 \\
& (M_s + \sum_i M_i) \ddot{u}_{Gx} + \sum_i \int \ddot{w}_i dm_i + 2c_{bx} \dot{u}_{Gx} + 2k_{bx} u_{Gx} = 0 \\
& (M_s + \sum_i M_i) (\ddot{u}_{Gy} - 2\Omega \dot{u}_{Gz} - \Omega^2 u_{Gy}) + c_{br} \{ 2\dot{u}_{Gy} + (l_2 - l_1) \dot{\theta}_z \} \\
& + k_{br} \{ 2u_{Gy} + (l_2 - l_1) \theta_z \} = 0 \\
& (M_s + \sum_i M_i) (\ddot{u}_{Gz} + 2\Omega \dot{u}_{Gy} - \Omega^2 u_{Gz}) + c_{br} \{ 2\dot{u}_{Gz} + (l_1 - l_2) \dot{\theta}_y \} \\
& + k_{br} \{ 2u_{Gz} + (l_1 - l_2) \theta_y \} = 0
\end{aligned}$$

$$\theta_z = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} : \text{Euler angles;}$$

점자 G, i : 계의 도심, i 번째 원판

u_{ik}, u_{Gk} ($k = x, y, z$): 축 중심선 변위

J_1, J_2, J_3 : 계의 관성모멘트

J_{in} ($n = 1, 2, 3$): i 번째 원판의 관성모멘트

M_s, M_i : 계의 질량

c_{bk}, k_{bk} ($k = r, x, y$): 베어링의 댐핑, 강성계수