

압전 비틀림 변환기의 진동특성 해석

오 권 오 수*, 김 진 오**

Vibration Characteristics of Piezoelectric Torsional Transducers

Oh Soo Kwon, Jin O. Kim

ABSTRACT

The paper deals with a theoretical study on the vibrational characteristics of piezoelectric torsional transducers. The differential equations of piezoelectric torsional motion have been derived in terms of the circumferential displacement and the electric potential. Applying mechanical and electrical boundary conditions has yielded the characteristic equations of natural vibration in several transducer types. Numerical results have clarified the effect of the piezoelectric phenomenon on the mechanical resonance and the effect of the elastic block of a Langevin-type transducer on the natural frequency.

1. 서론

역학적 양인 응력(또는 압력)과 전기적 양인 전압(또는 전하)간의 상호 변환인 압전현상은 요즘 다양한 분야에서 활용되고 있다.⁽¹⁾ 지난 수십년간 꾸준히 압전현상이 활용되어 오면서 그 응용 범위가 넓어지고 있는 분야의 하나가 센서와 액추에이터이다.⁽²⁾ 그중 압전 변환기(transducer)는 전기신호를 받아 초음파를 발생시키는 역압전현상과, 감지된 초음파를 전기신호로 바꿔주는 정압전현상을 모두 활용한다.

압전 변환기들의 대부분은 압전소자의 두께 방향 종진동을 이용하고, 일부는 전단운동을 이용한다. 반면에 본 논문은 탄성 봉에 비틀림 진동을 발생시킬 필요에 의해 제작하고 있는 비틀림 변환기를 대상으로 한다. 봉의 비틀림 진동과 인접 점성유체의 상호작용을 이론적으로 규명해오고 있는데,⁽³⁾ 압전 비틀림 변환기를 완성하면 그에 관한 실험적 검증이 가능해질 것이다.

압전현상 대신 자왜현상(magnetostriction)을 이용하는 방식으로는 비틀림 변환기가 제작되어 사용된 바 있다.⁽⁴⁾ 그러나 그러한 변환기는 출력이 약해 진동 발생보다는 파동신호를 발생하여 전파시간을 계측하는 방식에 사용될 수밖에 없다는 한계가 있다. 이는 전파시간으로부터 전파속도를

추출하는 과정이 필요하여, 계측시스템을 자동화하는 데에 한계가 있었다. 또한 자왜소자는 특수한 니켈 합금 또는 코발트 합금인데, 소량의 소자를 구하는 것이 어렵다. 따라서 압전소자를 사용하는 비틀림 변환기를 필요로 하게 되었다.

압전 비틀림 변환기는 종진동 변환기에 비해 훨씬 복잡할 수밖에 없다. 그렇지만 제작에 관한 아이디어가 이미 제시된 것도 있고,^(5,6) 실제로 제작된 사례도 보고되어 있다.⁽⁷⁾

본 논문은 압전 비틀림 변환기를 제작하기 위해 설계하는 과정에서 필요한 진동특성 해석을 다룬다. 원통형 압전 비틀림 소자를 대상으로 역학적 비틀림 진동과 압전현상의 결합에 의한 특성 방정식을 압전 비틀림 변환기의 구조별로 유도한다. 해석결과를 구체적인 사례에 적용하여 압전 비틀림 변환기들의 고유진동수를 계산하고, 압전현상이 고유진동에 미치는 효과를 규명하며 Langevin형 변환기에서 탄성 블록이 고유진동수에 미치는 영향을 정량적으로 파악한다.

2. 압전 비틀림 운동의 정식화

압전층의 두께 방향 진동에 대해서는 전기-역학적 관계식이 잘 정리되어 있다.⁽⁸⁾ 그와 같은 방식을 따라서, 비틀림 진동을 하는 원통형 압전체의 운동을 표현하기 위하여 원주 방향 변위 $u(r, z, t)$ 와 전기 퍼텐셜 $\phi(r, z, t)$ 를 사용한다. 이때 원형 단면에서의 원주방향 전단응력 $\tau_{z\theta}$ 와 단

* 숭실대학교 대학원 기계공학과
** 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

면의 전기적 변위 D 는 전단 변형률 ($\partial u/\partial z$) 및 전기장 ($-\partial\phi/\partial z$)과의 관계가 다음과 같다.

$$\tau_{z\theta} = G \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1)$$

$$D = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2)$$

여기서 G 는 전단탄성계수(shear modulus), ε 는 압전용력정수(piezoelectric stress constant), ζ 는 유전율(permittivity)이다.

힘의 평형으로부터 얻은 식과 정전기적 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

여기서 ρ 는 질량 밀도이다. 식(1)과 (2)를 식(3)과 (4)에 대입하여 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

여기서 $c = [\hat{G}/\rho]^{1/2}$ 는 비틀림 파동의 전파속도이고, $\hat{G} = G + \varepsilon^2/\zeta$ 는 수정된 전단탄성계수이다.

전극에 가해지는 전기신호가 진동수 ω 로 시간 t 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면 $u(r, z, t)$ 와 $\phi(r, z, t)$ 도 다음과 같이 조화함수 형태로 간주할 수 있다.

$$u(r, z, t) = \tilde{u}(r, z) e^{j\omega t} \quad (7)$$

$$\phi(r, z, t) = \tilde{\phi}(r, z) e^{j\omega t} \quad (8)$$

식(7)과 (8)을 식(5)와 (6)에 대입하면 다음과 같이 $\tilde{u}(r, z)$ 와 $\tilde{\phi}(r, z)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \quad (10)$$

여기서 $k = \omega/c$ 는 파동수이다.

식(9)의 해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$\tilde{u}(r, z) = U(r)(A \cos kz + B \sin kz) \quad (11)$$

여기서 $U(r)$ 은 비틀림 운동의 반경방향 기본 모드인 경우 반지름 r 에 비례하는 함수인데, 좀더 일반적인 상황을 표현할 수 있도록 r 의 함수로 남겨둔다. 식(11)을 식(10)에 대입한 후 $\tilde{\phi}(r, z)$ 의 해를 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{\phi}(r, z) = \frac{\varepsilon}{\zeta} U(r)(A \cos kz + B \sin kz) + a(r)z + b(r) \quad (12)$$

식(11)과 (12)에서 결정되지 않은 $A, B, a(r), b(r)$ 은 경계조건에 따라 결정된다.

3. 비틀림 변환기 구조별 특성방정식

앞 절에서 유도한 운동방정식과 해의 형태를 이용하여, 여러 가지 압전 비틀림 변환기 구조에 대해 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여, 고유진동 특성방정식을 구한다.

3.1 단층 변환기

원통형의 압전 비틀림 변환기 하나가 Fig. 1에 보인 바와 같이 있다. 압전 변환기의 두께는 l 이고, 양쪽 면 사이에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다.

변환기의 한쪽 면이 고정되고 다른 쪽 면이 자유로운 경우 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \tilde{u} = 0 \quad (13a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (13b)$$

$$z=l \text{ 에서 } \tilde{r} = 0 \quad (13c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (13d)$$

전단용력 $\tau_{z\theta} (= \tilde{r}(r, z) e^{j\omega t})$ 는 식(1)에 표현된 관계를 가지므로, 식(11)과 (12)를 (13a-d)에 대입하면 해가 존재할 조건으로부터 다음의 특성방정식을 얻는다.

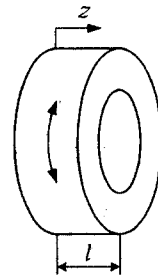


Fig. 1 Single-layer transducer.

$$\hat{G}kl \cos kl - \frac{\epsilon^2}{\zeta} \sin kl = 0 \quad (14)$$

변환기의 양쪽 면이 자유로울 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \tilde{\tau} = 0 \quad (15a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (15b)$$

$$z=l \text{ 에서 } \tilde{\tau} = 0 \quad (15c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (15d)$$

경계조건(15a-d)를 이용하여 얻어지는 특성방정식은 다음과 같다.

$$\hat{G}kl \sin kl - 2\frac{\epsilon^2}{\zeta}(1 - \cos kl) = 0 \quad (16)$$

3.2 이중 변환기

동일한 압전 비틀림 변환기 2개가 Fig. 2에 보인바와 같이 한 쌍으로 결합되어 있다. 두께가 l 인 압전체 1과 2로 구성된 2층 변환기는 가운데를 대칭면으로 하여 양쪽 면에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 변환기의 양쪽 면이 자유로울 때, 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \quad (17a)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 \quad (17b)$$

$$\tilde{\phi}_1 = 0 \quad (17c)$$

$$\tilde{\phi}_2 = 0 \quad (17d)$$

$$z=-l \text{ 에서 } \tilde{\tau}_1 = 0 \quad (17e)$$

$$\tilde{\phi}_1 = V_0 \quad (17f)$$

$$z=l \text{ 에서 } \tilde{\tau}_2 = 0 \quad (17g)$$

$$\tilde{\phi}_2 = V_0 \quad (17h)$$

여기서 첨자 1과 2는 각각 대응하는 압전체를 나타낸다.

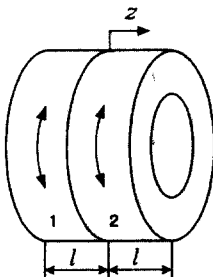


Fig. 2 Two-layer transducer.

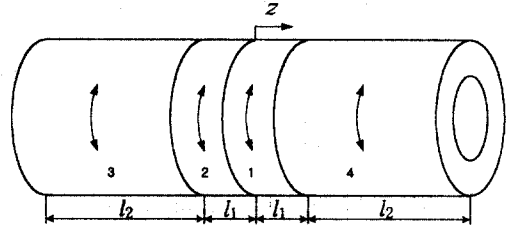


Fig. 3 Langevin-type two-layer transducer with elastic blocks.

8개의 경계조건(17a-h)를 이용하여 압전 비틀림 변환기의 특성방정식을 구하면 다음의 두 식으로 귀결된다.

$$\hat{G}kl \cos kl - \frac{\epsilon^2}{\zeta} \sin kl = 0 \quad (18a)$$

$$\hat{G}kl \sin kl - 2\frac{\epsilon^2}{\zeta}(1 - \cos kl) = 0 \quad (18b)$$

여기서 식(18a)는 한쪽이 고정되고 다른 쪽은 자유로운 압전 비틀림 변환기의 특성방정식(14)과 같고, 식(18b)는 양단이 자유로운 1층 압전 비틀림 변환기의 특성방정식(16)과 같다. 따라서 대칭적으로 결합된 비틀림 변환기의 경우 대칭면을 기준으로 한쪽을 2가지 경계조건(고정-자유, 자유-자유)에 대해서 해석을 하면 전체의 고유진동수를 구할 수 있음을 알 수 있다.

3.3 Langevin형 이중 변환기

압전 변환기의 공진주파수를 낮추어 원하는 주파수의 진동을 만들어 주도록 하기 위하여, 압전체에 탄성 블록을 결합시키는 "볼트 체결 랑주방형 변환기 (BLT : bolt-clamped Langevin-type transducer)가 사용된다. 본 절에서는 비틀림 진동 응용으로 Fig. 3에 보인 바와 같이 두께가 l_1 인 압전체 1과 2가 결합되고 그 양쪽에 두께가 l_2 인 탄성블록 3과 4가 결합된 구조에 대해서 진동 특성을 해석한다. 다섯 개의 경계면에 대한 경계조건을 설정하여 특성방정식을 구하려면 대단히 복잡한 수식을 얻게 될 것이다. 따라서 앞절에서 확인한 바를 토대로, Fig. 4와 같이 대칭면의 한쪽 부분만을 대상으로, 대칭면의 경계조건을 두 가지(고정, 자유)로 각각 설정하여 특성방정식을 구한다.

Fig. 4와 같이 탄성블록이 부착된 단층 압전 비틀림 변환기의 대칭면이 고정된 상태에서 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있을 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } \tilde{u}_1 = 0 \quad (19a)$$

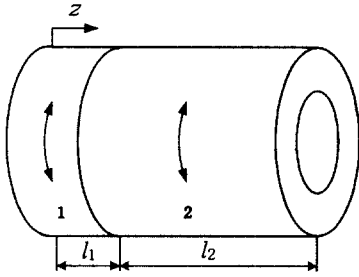


Fig. 4 Symmetric half of the Langevin-type transducer.

$$\tilde{\phi}_1 = 0 \quad (19b)$$

$$z = l_1 \text{ 에서 } \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \quad (19c)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 \quad (19d)$$

$$\tilde{\phi}_1 = V_0 \quad (19e)$$

$$z = l_1 + l_2 \text{ 에서 } \tilde{\tau}_2 = 0 \quad (19f)$$

6개의 경계조건(19a-f)를 이용하여 압전 비틀림 변환기의 특성방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\left(\hat{G}_1 k_1 l_1 \cos k_1 l_1 - \frac{\epsilon^2}{\xi} \sin k_1 l_1 \right) \cos k_2 l_2 - G_2 k_2 l_1 \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_2 = 0 \quad (20)$$

탄성 블록 3과 4가 없다면, $G_2 = 0, l_2 = 0$ 이므로 식(20)은 식(14)와 같게 된다.

변환기의 양단이 자유로운 상태에서 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있을 때, 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z = 0 \text{ 에서 } \tilde{\tau}_1 = 0 \quad (21a)$$

$$\tilde{\phi}_1 = 0 \quad (21b)$$

$$z = l_1 \text{ 에서 } \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \quad (21c)$$

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 \quad (21d)$$

$$\tilde{\phi}_1 = V_0 \quad (21e)$$

$$z = l_1 + l_2 \text{ 에서 } \tilde{\tau}_2 = 0 \quad (21f)$$

6개의 경계조건(21a-f)를 이용하여 압전 비틀림 변환기의 특성방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{G}_1 k_1 \left[\hat{G}_1 k_1 l_1 \sin k_1 l_1 - 2 \frac{\epsilon^2}{\xi} (1 - \cos k_1 l_1) \right] \cos k_2 l_2 + G_2 k_2 \left(\hat{G}_1 k_1 l_1 \cos k_1 l_1 - \frac{\epsilon^2}{\xi} \sin k_1 l_1 \right) \sin k_2 l_2 = 0 \quad (22)$$

탄성블럭 3과 4가 없다면, 식(22)는 식(16)과 같게 된다.

4. 수치계산 결과 및 고찰

앞절의 해석결과를 구체적인 사례에 적용하여, 압전 비틀림 변환기들의 고유진동수를 계산하고 압전현상의 효과와 탄성블럭의 영향을 고찰한다. 식(14), (16), (18), (20) 또는 (22)에 있어서 미지수인 k 는 진동수 $f (= \omega/2\pi)$ 는 $\omega = kc$ 의 관계로부터 다음의 관계가 있다.

$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (23)$$

k 또는 f 는 수치계산 도구에 의존하여 구할 수 있는데, Mathematica⁽⁹⁾의 FindRoot 기능을 사용하면 계산이 간편하다.

계산을 위해 인용된 압전소자는 Zr과 Ti의 비가 52:48로 구성된 PZT로서 필요한 물성치들이 Table 1에 정리되어 있다.^(10,11) 변환기의 두께는 4mm로 전제하였다. 또한 랑주방형 변환기에 사용되는 탄성 블럭의 재질은 알루미늄 합금 2014-T6으로 선정되고 그 물성치가 Table 2에 정리되어 있다.⁽¹²⁾ 탄성 블럭의 두께는 30mm로 하였다.

Table 1 Electromechanical properties of a PZT (Zr/Ti=52/48)

Electromechanical Properties	Values
mass density, ρ	7550 kg/m ³
permittivity, ξ	$5419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$
piezoelectric strain constant, d_{15}	$494 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
elastic constant, s_{44}^E	$48.2 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$
piezoelectric stress constant, $\epsilon (= d_{15}/s_{44}^E)$	10.25 C/m ²
shear modulus, $G (= 1/s_{44}^E)$	20.7 GPa
modified shear modulus, $\hat{G} (= G + \epsilon^2/\xi)$	40.1 GPa

Table 2 Elastic properties of aluminum alloy 2014-T6.

Properties	Values
mass density, ρ	2800 kg/m ³
shear modulus, G	28 GPa

Table 3 Natural frequencies of a single-layer transducer with fixed-free boundary conditions.

mode	wavenumber × thickness			natural frequency		
	piezoelectric k_{pi}	elastic k_{ei}	$k_{pi}l - k_{ei}$	piezoelectric f_p (kHz)	elastic f_e (kHz)	f_p/f_e
1	1.18	1.57	-0.39	108	103	1.05
2	4.61	4.71	-0.10	422	310	1.36
3	7.61	7.85	-0.06	714	517	1.38
4	10.95	11.00	-0.05	1004	724	1.39

4.1 단층 변환기

변환기의 한쪽 면이 고정되고 다른 쪽 면이 자유로운 경우, 압전 고유진동수가 식(14)와 (23)으로부터 계산된다. 이와 같이 두께 방향의 기본 모드부터 4개의 모드에 대해 계산된 압전 파동수 k_p 와 압전 고유진동수 f_p 가 Table 3에 기재되어 있다. 여기서 파동수를 변환기 두께와 곱하여 무차원화한 값을 기재하였다. 압전 현상이 고유진동수에 미치는 영향을 파악하기 위하여, 압전체 대신 순수 탄성체인 경우에 대해서 식(14)에 $\epsilon = 0$ 과 $\hat{G} = G$ 로 하여 구한 탄성파동수 k_e 와 탄성 고유진동수 f_e 도 Table 3에 기재되어 있다. 여기에 탄성 파동수를 기준으로 압전 파동수의 차이 $k_p - k_e$ 도 제시하였는데, 이로부터 알 수 있다시피 기본 모드에서는 압전효과에 의해 파동수가 크게 저하되고 고차 모드로 갈수록 그 영향은 줄어든다. 이런 현상은 두께 방향의 압전 종진동 변환기에서 나타나는 현상과 일치한다.⁽⁸⁾ 그리고 두 고유진동수의 비 f_p/f_e 는 고차모드로 가면서 일정한 값에 수렴하는데, 이는 $\sqrt{\hat{G}/G}$ 이다.

변환기의 양쪽 면이 자유로운 경우, 압전 고유진동수가 식(16)과 (23)으로부터 계산된다. 이 경우에도 압전 파동수 및 압전 고유진동수와 탄성 파동수 및 탄성 고유진동수를 구하고 Table 4에 기재하여 비교한다. 이 경우에는 강체모드부터 짝

수차 모드에서는 압전 효과가 파동수에 변화를 주지 않고, 홀수차 모드에서는 Table 3에서 관찰한 것과 같다.

4.2 이중 변환기

양쪽 면이 자유로운 2층 변환기의 경우, 압전 고유진동수는 식(18a,b)와 (23)으로부터 계산되는데, 식(18a,b)는 식(14) 및 (16)과 동일하므로 Table 3과 Table 4에 기재되어 있는 압전 고유진동수를 모아서 Table 5에 2층 변환기의 압전 고유진동수 f_p 로 기재하였다. 이 결과를 다음절의 결과와 비교하고자 한다.

4.3 Langevin형 이중 변환기

랑주방향 2층 변환기의 경우에 있어서 압전 고유진동수는 식(20) 및 (22)와 (23)으로부터 계산된다. 단층 변환기에 대한 계산과 같은 방식으로 수치계산 도구를 이용하여 계산한 압전 고유진동수가 Table 5에 기재되어 있다. 압전층의 두께의 7.5배인 탄성 블록이 결합됨으로 인해 랑주방향 압전 변환기의 고유진동수는 약 15~20% 정도인 것으로 나타났다.

필요로 하는 고유진동수 값을 갖는 압전 비틀림 변환기를 설계 제작함에 있어서, 압전 소자의 두께를 크게 하는 것은 현실적으로 곤란하므로 적절한 두께의 탄성 블록을 결합하는 방식이 가능함을 확인하였다.

Table 4 Natural frequencies of a single-layer transducer with free-free boundary conditions.

mode	wavenumber × thickness			natural frequency		
	piezoelectric k_{pi}	elastic k_{ei}	$k_{pi}l - k_{ei}$	piezoelectric f_p (kHz)	elastic f_e (kHz)	f_p/f_e
0	0	0	0	0	0	-
1	2.36	3.14	-0.78	217	207	1.05
2	6.28	6.28	0	576	414	1.39
3	9.21	9.42	-0.21	845	621	1.36
4	12.57	12.57	0	1152	828	1.39

Table 5 Natural frequencies of a two-layer transducer and a Langevin-type two-layer transducer, both with free-free boundary conditions.

mode	piezoelectric natural frequency		
	two-layer, f_p (kHz)	Langevin-type two-layer, f_L (kHz)	f/f_p
1	108	22.3	0.21
2	217	39.9	0.18
3	422	65.4	0.15
4	576	83.4	0.14
5	714	106	0.15
6	845	128	0.15
7	1004	148	0.15
8	1152	172	0.15

5. 결론

비틀림 진동을 발생시키는 압전 변환기들의 고유진동 특성을 해석하여 특성방정식을 유도하였다. 구한 방정식에 물성치를 대입하여 고유진동수를 계산하였다.

단층변환기를 대상으로 압전 효과가 비틀림 진동의 고유진동수에 미치는 영향에 대해서 알아보았는데, 한쪽 면이 고정되고 다른 면이 자유로운 경우에는 기본 모드에서 압전효과로 인한 파동수 저하는 크지만 탄성계수보다 수정된 탄성계수 값이 크기 때문에 고유진동수는 거의 그대로 유지되었다. 그리고 고차모드로 갈수록 파동수 저하가 줄어들어 압전현상이 고유진동수에 미치는 영향은 수정된 탄성계수에 해당하는 특정 값에 수렴하였다. 양쪽 면이 모두 자유로운 경우에는 강제 모드부터 짝수차 모드에서는 압전 효과가 파동수에 영향을 주지 않고, 홀수차 모드에서는 한쪽 면이 고정된 경우의 결과와 같은 경향을 보였다.

탄성 블럭이 결합된 랑주방형 이층 변환기의 고유진동수를 구하고, 탄성 블럭이 결합되지 않은 이층 변환기의 고유진동수와 비교하였다. 그 결과 탄성 블럭의 영향으로 변환기의 고유진동수가 현저히 낮아짐을 정량적으로 파악하였다. 이와 같은 해석 결과를 토대로, 탄성블럭의 두께를 적절히 선정함으로써 변환기의 고유진동수를 원하는 값으로 낮출 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- Ikeda, T., 1996, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford.
- Uchino, K., 1997, *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- 김진오, 전한용, 2000, "봉의 비틀림 고유진동에 대한 인접 점성유체의 영향," 한국소음진동 공학회지, 제10권, 제1호, pp. 168-173.
- 김진오, 1999, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성과 인접 점성유체 간의 상호작용," 한국음향학회지, 제8권, 제5호, pp. 28-34.
- Mishiro, S., 1987, "Torsional Vibration Apparatus," United States Patent 4,652,786.
- Mishiro, S., 1988, "Torsion Vibrator," United States Patent 4,787,265.
- 根本佐久良雄, 森榮司, 1972, "ホルト締め電気ひすみねしり振動子," 日本音響學會誌, 28卷3号, pp. 117-126.
- Miu, D. K., 1993, *Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics*, Springer-Verlag, New York, Ch. 6.
- Wolfram, S., 1988, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Co., New York.
- 岡崎清, 1983, *セラミック誘電体工學*, 第3版, 學獻社, 第8章.
- Berlincourt, D. A., Cmolik, C., and Jaffe, H., 1960, "Piezoelectric Properties of Polycrystalline Lead Titanate Zirconate Compositions," Proceedings of the IRE, pp. 220-229.
- Gere, J. M., Timoshenko, S. P., 1990, *Mechanics of Materials* 3rd ed., PWS Publishing Co., pp. 777-782.