한국소음진동공학회 창립10주년 기념 소음진동학술대회논문집, pp.831~836

다양한 경계조건을 갖는 등방성 반구형셸의 자유진동해석

이영신*, 0김현수**, 양명석**

Free vibration analysis of the isotropic hemi-spherical shell with various boundary condition

Young-Shin Lee*, Hyun-Soo Kim**, Myung-Seog Yang**

ABSTRACT

In this study, the Rayleigh inextensional theory and extensional theory for thin shells was employed to predict the natural frequencies of the hemi-spherical shell with free and simply supported boundary condition. The frequencies and mode shapes from theoretical calculation were compared with those of commercial finite element code, ANSYS. In order to validate the theory, modal test was also performed by impact test and FFT analysis. Modal test and FEM analysis of the free, simply supported and clamped boundary condition was also carried out.

1. 서 론

구형셸(spherical shell)은 원통셸(cylindrical shell) 및 원추셸(conical shell)과 더불어 각종 도움 구조물, 압력용기, 안테나, 유체저장탱크 또는 항공기 및 해저구조물등에 광범위하게 사용되는 구조이다. 이러한 구조물들은 외부 가진과의 공진에 의한 설계성능의 저하, 과도한 진동 또는 파괴를 유발할 수 있다. 따라서, 외부 가진과의 공진을 예방하고 구조설계시의 기초자료로 활용하기 위해 이러한 부분구조물의 고유진동특성을 해석하는 것은 대단히 중요하다.

구형셸의 동적해석에 관한 연구는 이미 19세기 말엽에 Rayleigh, Lamb 및 Love등에 의해 시작되었는데, 이때는 주로 종(Bell)의 기하학적 형상과 음향특성과의 관계를 규명하고자 하는 목적에서 연구가 시작되었다. 특히 Love는 고전적 셸이론을 종합적으로 체계화하였으나 Love이후 구형셸에 구형셸에 관한 연구는 1~2편 외에는 20세기 전반까지 거의 연구가 이루어지지 않고 있었다. 그러나 20세기 중반에 접어들면서 군사산업 및 우주항공분야의 급격한 발달로 구형셸의 동적특성이 요구됨에 따라 이 분야의 연구가 새로이 활기를 띄게 되었다.

얇은 각 구형셸(shallow Spherical Shell)의 자유진동에 관한 연구는 1955년의 Reissner[1], 1961년의 Hoppmann[2]등의 발표가 있었으며, 등방성 셸의 축대칭 진동에는 1961년의 Baker[3]를 위시하여 1962년에 자유 경계를 갖는 구형셸의 진동특성을 해석한 Kalnins[4], 1965년에 충격가진법을 이용한 실험을 통해 연구한 Hwang[5]등이 있다. 하지만 1970년대에는 구형셸에 대한 연구가 다소 침체되었다가 1980년에 Souza[6]는 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 등방성 재질의 고정경계조건을 갖는 구형셸의 고유진동특성을 구하고, 근사법을 사용한 해석결과와 비교하였다. 최근의 연구로는 1997년 등방성 및 적층 구형셸의 자유진동특성에 대해 유한요소법을 이용하여 연구한 Gautham[7]등의 연구가 있다. 국내에서는 1988년 권우근[8]등이 직교이방성 구형셸의 자유 진동에 관한 연구와 1999년 이영신[9]등이 단순지지된 등방성 반구형셸에 대해 신장이론을 이용하여 연구한 바 있다.

이전의 연구에서 구형셸에 관한 대부분의 연구가 얇은셸의 신장이론 또는 유한요소법을 이용하

* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과
** 충남대학교 기계설계공학과 대학원

여 수행되었지만 신장이론의 경우 수식의 전개과정에서 구형셸의 진동특성에 대한 두께의 영향을 계산할 수 없고 셸의 저차 진동모드에서는 셸중앙면 변위가 주로 신장보다는 굽힘의 거동을 하므로, 이러한 이론에 바탕을 둔 해석결과들은 실제 구형셸의 진동특성과는 대단히 큰 오차를 보인다.

본 연구에서는 자유경계 및 단순지지조건을 갖는 등방성 재질의 반구형셸의 진동특성을 해석하기 위해 Rayleigh에 의해 제안된 셸의 비신장이론 및 Kalnins[4]에 의해 제시된 신장이론을 적용하여 진동수방정식 및 진동모드형상을 유도하였다. 또, 적용된 이론의 타당성을 검토하기 위해 충격가진법을 이용한 진동실험 및 유한요소법을 수행하였다. 그리고, 반구형셸의 진동수에 대한 경계조건의 영향을 고찰하기 위해 고정경계조건을 갖는 반구형셸에 대한 실험 및 유한요소법을 수행하였다.

2. 이론 전개

2.1 비신장이론을 이용한 수식화

수식전개를 위한 해석모델은 Fig.1과 같다. Fig.1에서 ϕ는 반구형셸의 극점을 기준으로 자오선방향의 각도, θ는 반구형셸의 원주방향의 각도, u, v, w는 각각 ϕ 및 θ에 대한 법선방향, 원주방향 그리고 반경반향의 변위, 그리고 h는 구형셸의 두께이다.

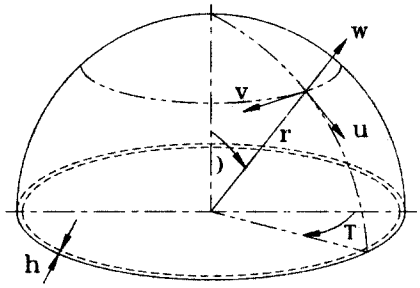


Fig.1 The geometry of hemi-spherical shell

Fig. 2는 반구형셸에 대하여 자유진동시에 발생되는 일반적인 원주방향모드(n=0,1,2)와 반경방향모드(m=1)에 대한 형상이다. 진동수 방정식 유도를 위한 수식전개에서 원주방향 및 반경방향변위의 적용시 적절한 삼각함수를 이용하여 다음의 모드형상을 잘 구현할 수 있도록 가정한다. 반경방향 모드는 경계조건에 따라 셸경계(ϕ=90°)에서 차이가 발생된다.

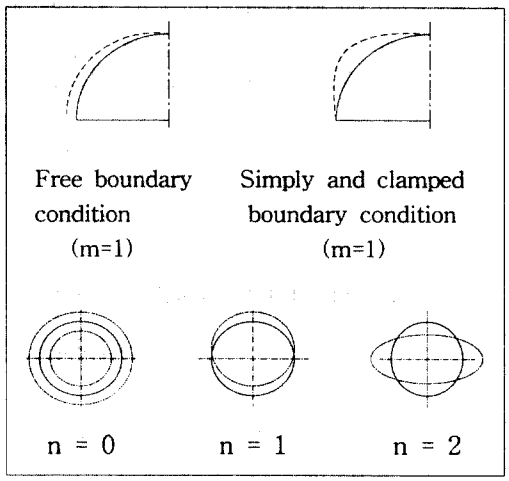


Fig.2 General mode shape of the hemi-spherical shell with free, simply and clamped boundary condition

Rayleigh의 비신장이론은 얇은 셸의 자유진동시 저차진동에서의 변형에너지와 운동에너지가 셸 중앙면의 신장보다는 굽힘과 관련된 모드형상에 주로 지배를 받는다는 가정에 기초를 둔 이론으로 자유진동시 반구형셸의 모드형상을 정확하게 표현할 수 있는 변위식을 가정하고 최대운동에너지 및 최대내부에너지식을 구하면 다음과 같다.

T=최대 운동에너지

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int_A [\rho h(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) A_1 A_2] dA \qquad (1)$$

여기서, A_1, A_2는 각각 구형셸의 Lame parameter[10]로서 $A_1 = a$, $A_2 = a\sin\theta$ 이고, u,v,w는 구형셸의 변위, ω는 반구형셸의 고유진동수, $\cdot$는 변위의 시간에 대한 미분, a는 구형셸의 반지름이다.

V=최대 내부에너지

$$= \frac{1}{2}\int_A \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ((k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2 + 2(1-\nu)k_{12}^2) A_1 A_2) dA \qquad (2)$$

구조물의 자유진동시 감쇠가 없다고 가정하면, 다음의 관계식을 이용하여 고유진동수를 구할 수 있다.

$$T = V \qquad (3)$$

자유경계조건을 갖는 반구형셸에 위의 비신장이론을 적용하여 진동수 및 모드형상을 유도하자.

셸이론에서 셸중앙면의 변형률관계식을 이용하여 자유경계조건을 만족시키는 반구형셸의 변위식을 구하면,

$$u=-Aa\sin\Phi\tan^{n}\frac{\Phi}{2}\sin n\theta$$
$$v=Aa\sin\Phi\tan^{n}\frac{\Phi}{2}\cos n\theta \qquad (4)$$
$$w=Aa(n+\cos\Phi)\tan^{n}\frac{\Phi}{2}\sin n\theta$$

여기서, n은 원주방향의 모드수이다.
식(5)를 식(1)에 대입하면 자유경계를 가지는 반구형셸의 최대운동에너지를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$T=A^2\frac{\pi a^4\omega^2}{2}\int_0^{\Phi_0}h\rho\tan^{2n}\frac{\Phi}{2}[(n+\cos\Phi)^2+2\sin^2\Phi]\sin\Phi\,d\Phi \qquad (5)$$

그리고, 구형셸에 대해 셸이론의 곡률 변화관계식을 이용하면, 구형셸의 최대내부에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$V=2\pi(n^3-n)^2A^2\int_0^{\Phi_0}[\frac{1}{6}\frac{E}{2(1+\nu)}h^3\sin^{-3}\Phi\tan^{2n}\frac{\Phi}{2}]d\Phi \qquad (6)$$

또, 단순지지경계조건을 만족시키는 Φ=90° 인 반구형의 변위식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u=\frac{Ar\cos[2n\Phi]\sin m\theta\sin\omega t}{2n}$$
$$v=\frac{Ar(\cos\Phi\cos2n\Phi+2n\sin\Phi\sin2n\Phi)}{2mn}\times\cos[m\theta]\sin\omega t$$
$$w=Ar\sin[2n\Phi]\sin m\theta\sin\omega t \qquad (7)$$

위의 변위식을 식(1) 및 식(2)에 대입하면 최대운동에너지식 및 최대내부에너지식을 구할 수 있다.

2.2 신장이론을 이용한 수식화

신장이론을 이용하여 자유경계조건을 갖는 반구형셸에 대한 진동수방정식은 다음과 같다[4].

i) asymmetric mode(n=1,2,3..)

$$[n^2-1-(1+\nu)\Omega^2]\left[1-\frac{n^2}{1+(1+\nu)\Omega^2}\right]P_k^n(0)$$
$$P_m^n(0)+\frac{n^2}{1+(1+\nu)\Omega^2}\frac{dP_m^n(0)}{d\Phi}\frac{dP_k^n(0)}{d\Phi}=0 \qquad (8)$$

ii) axisymmetric mode(n=0)

$$\frac{(1-\nu)(1-\Omega^2)}{1+(1+\nu)\Omega^2}[1+(1+\nu)\Omega^2]P_n^0(0)=0 \qquad (9)$$

단순지지경계를 갖는 구형셸의 자유진동은 셸 경계($\Phi=\Phi_0$)에서의 조건 $N_\Phi=N_{\Phi\theta}=w=0$ 을 고려하면 진동수방정식은 다음과 같이 유도된다.

i) asymmetric mode(n=1,2,3..)

$$m\left[1+\nu+\frac{(\nu-1)(\Omega^2-1)[1-m^2+(1+\nu)\Omega^2]}{1+(1+\nu)\Omega^2}\right]\times\left[1-\frac{m^2}{1+(1+\nu)\Omega^2}\right]P_k^m(\cos\Phi)P_n^m(\cos\Phi)$$
$$-\frac{(1-\nu)m^2}{1+(1+\nu)\Omega^2}\frac{(1-\Omega^2)m^2}{1+(1+\nu)\Omega^2}\frac{dP_n^m(\cos\Phi)}{d\Phi}\times\frac{dP_k^m(\cos\Phi)}{d\Phi}=0 \qquad (10)$$

ii) axisymmetric mode(n=0)

$$\left[-1-\nu-\frac{(\nu-1)(\Omega^2-1)[1+(1+\nu)\Omega^2]}{1+(1+\nu)\Omega^2}\right]\times P_n^0(\cos\Phi)=0 \qquad (11)$$

여기서, $P_k^n(0)$및 $P_s^n(0)$은 associated Legendre 함수이고 s, k는 degree로서 다음과 같이 정의된다.

$$s(s+1)-2=\frac{(1+\nu)\Omega^2}{1-\Omega^2}[3-(1-\nu)\Omega^2] \qquad (12)$$
$$k(k+1)-2=2(1+\nu)\Omega^2$$

여기서, Ω는 고유 진동수 매개변수로서 $\Omega^2=\frac{\rho\omega^2r^2}{E}$로 정의되고, ω는 각진동수[rad/sec]이다.

3. 진동 실험

진동실험은 유도된 수식의 타당성과 다양한 경계조건을 갖는 반구형셸의 진동특성을 해석하기 위해 충격가진법을 이용하여 수행되었다.

Fig. 3은 진동실험에 사용된 실제 반구형셸의 사진이다.

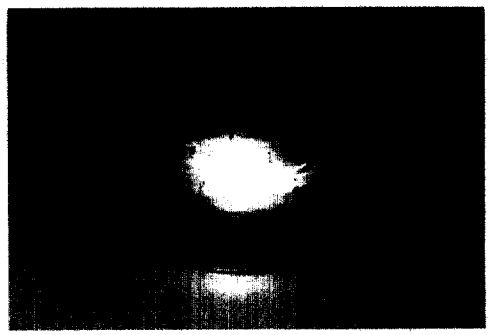


Fig.3 The photograph of specimen

Fig. 4는 자유경계를 갖는 반구형셸의 진동실험의 개략도이다. 진동수 및 모드형상은 I-Deas test module을 사용하여 구하였고, 모드형상을 파악하기 위해 실험에 앞서 원주방향으로 10° 간격 및 자오선방향으로 10° 간격으로 가진점을 표시하여 실험시 총 289점을 가진 하였다.

Fig. 5는 구형셸의 진동실험에서 반구형셸의 단순지지 및 완전고정경계조건을 구현하기 위한 지그이다. 완전지지 경계조건은 반구형셸 경계부분($\phi=\pi/2$)을 강철판에 용접을 하고, 이것을 고정치에 볼트로 체결하여 구현하였다. 여기서, 진동실험시 발생되는 음향에 의한 영향을 제거하기 위해 구형셸 고정 강판에 직경 300mm의 원형구멍을 뚫었다. 단순지지경계조건은 반구형셸의 안쪽 edge부분을 총 48개의 M6볼트를 이용하여 반경방향 변위를 구속할 수 있도록 하였다.

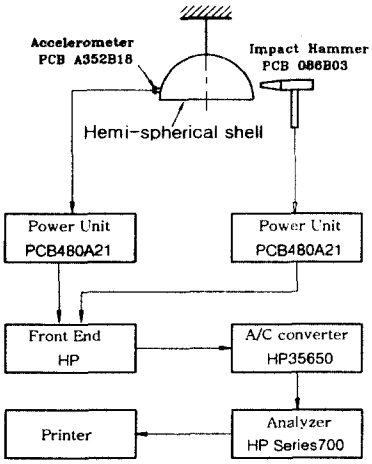
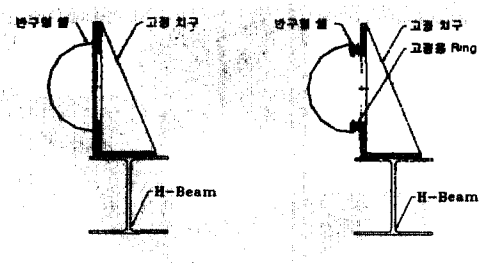


Fig.4 Schematic diagram of the experimental test



(a) (b)

Fig.5 The jig of hemi-spherical shell (a)clamped (b)Simply supported boundary conditon

반구형셸의 치수와 물성치는 다음과 같다.

셸의 반경: r =173.9 mm
셸의 두께: t =2.2 mm
탄성계수 : E =210 GPa
밀 도 : ρ =7861 kg/m³
포아송비 : ν =0.3

4. 유한요소해석

제시된 진동수방정식과 진동실험을 검증/비교하기 위해 상용유한요소 프로그램인 ANSYS 5.3 코드를 이용한 해석을 수행하였다.

유한요소 모델링에 사용된 요소는 4절점으로 구성된 셸요소(Shell63)이다. 해석된 경계조건은 i) 자유경계 ii)단순지지 iii)완전고정경계조건 3가지이다. ii)단순지지 경계조건은 반구형셸 경계(ϕ =90°)에서의 반경방향의 변위만을 고정하였고, iii)완전고정 경계조건은 반구형셸경계에서 모든 변위 및 회전을 구속하였다.

해석된 반구형셸의 치수와 물성치는 실제 실험에 사용된 시편의 재질과 동일하다.

5. 결과 및 고찰

자유 및 단순지지경계조건을 갖는 반구형셸의 고유진동수를 신장이론 및 비신장이론을 이용하여 진동수방정식을 유도하고 진동실험 및 유한요소해석을 수행하였다. 또, 완전고정경계조건에 대하여 유한요소해석 및 진동실험을 수행하였다.

Fig. 6은 자유경계를 갖는 반구형셸에 대하여 신장이론을 적용하여 Kalnins[4]에 의해 제안된 해석결과와 본 해석에서 수행된 진동실험 결과와의 비교이다. 실제 진동실험 결과와의 비교에서 신장이론을 이용한 Kalnins의 해석은 구형셸의 n=2,3…에 해당되는 축비대칭 고유진동수에 대해서는 예측할 수 없음을 볼 수 있다. 이 결과에 따라 자유경계를 갖는 반구형셸의 진동특성을 해석하기 위해서는 다른 이론을 적용해야 함을 확인할 수 있었다

Fig. 7은 자유경계조건을 가지는 반구형셸에 대해 여러 가지 방법을 이용하여 구한 고유진동수이다. 실험결과를 기준으로, 비신장이론을 적용하여 구한 결과는 n=2에서 3%, 고차진동에서 최대 20%의 오차를 보이나 전체적으로 잘 일치한다. 또, 실험과 유한요소해석결과가 아주 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서, 진동실험에서는 나타나지 않은 n=0, 1의 고차 모드형상에 대해서 유한요소해석만으로도 실제실험결과를 예측할 수 있을 것으로 생각된다. 신장이론을 적용했을 때 n=0, 1진동모드에 대

해서는 유한요소결과와 잘 일치하지만 나머지 진동모드(n=2,3,4...)에 대해서는 진동수를 예측할 수 없음을 볼 수 있다. 이는 단순지지된 반구형셸의 진동이 n=0, 1에서는 셸의 신장에 관련된 거동에 주된 영향을 받고, 나머지 다른 진동모드에서는 셸의 굽힘거동에 주된 영향을 받기 때문이라 판단된다.

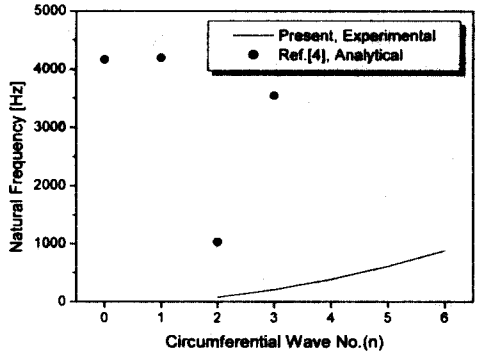


Fig. 6 Comparison of natural frequencies of the hemi-spherical shell with free boundary condition;r=173.9mm, h=2.2mm, m=1

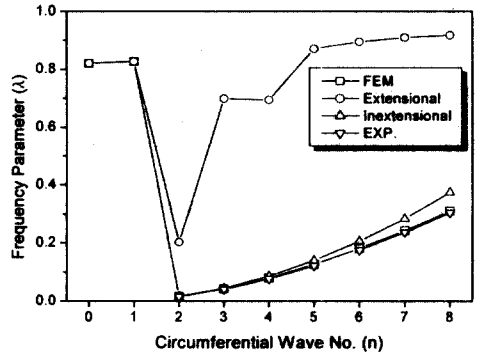


Fig. 7 Comparison of frequency parameters ($\lambda = [\rho r^2 \omega^2 (1-\nu^2)/E]^{1/2}$) of the hemi-spherical shell with free boundary condition from analytical, experimental and FEM results, m=1

본 연구에서 단순지지 경계조건을 갖는 반구셸에 대해서 이론해석은 자유경계조건의 경우와 마찬가지로 Rayleigh법을 적용한 비신장이론과 신장이론 모두를 적용하여 해석하였다. Fig. 8은 각각의 해석방법의 비교를 위하여 원주방향 파수에 따른 진동수변화를 함께 나타내었다. 기본고유진동수는 원주방향 1차모드 (1,1)에서 실험이 0.1967로 나타났으나, 신장이론을 적용한 해석값은 0.5712로 실험과 해석값이 큰 차이를 보이고 있다. 진동실험결과와 유한요소 해석결과는 거의 동일하고, 신장이론을 적용한 해석결과는 n=0 진동모드에서 0.9055로 실험 및 유한요소해석결과와 각각 12%, 1.3%의 오차로 비교적 잘 일치한다고 판단되나 나머지 진동차수에서는 큰 오차를 보인다. 비신장이론을 적용한 해석은 n=0, 1차 진동모드에 대해서는 해석하지 못하고, 해석결과는 2차 고유진동수, (1,2) 진동모드에서 0.0739로 진동실험결과와는 큰 차이를 보이며 고차로 갈수록 그 오차가 점점 감소해 (1,5)진동모드에서는 거의 동일한 진동수를 보이고, 그 후 다시 증가하여 n=7 모드에 해당하는 진동수에서는 1.1729로 가장 크게 나타났다. 반경방향 2차 모드가 처음 나타나는 것은 0.8018으로 원주방향 n=0 모드에서였다.

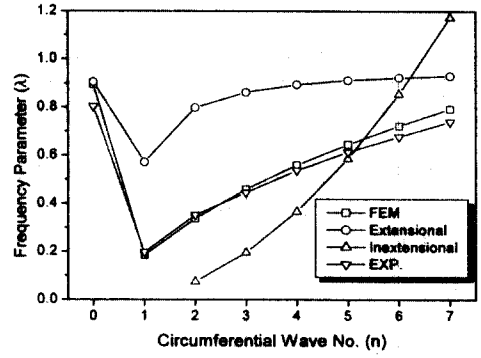


Fig. 8 Comparison of frequency parameters ($\lambda = [\rho r^2 \omega^2 (1-\nu^2)/E]^{1/2}$) of the hemi-spherical shell with simply supproted boundary condition from analytical, experimental and FEM results, m=1

고정경계를 갖는 반구형셸에 대하여 진동실험 및 유한요소해석이 수행되었으며 Souza[6]의 이론해석 결과와 비교하였고 그 결과를 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 5.4에서 모든 진동차수에서 이론해석결과, 유한요소해석결과 그리고 진동실험결과가 잘 일치함을 볼 수 있다. Souza는 그의 연구에서 고정경계를 갖는 구형셸의 자유진동에 대해 신장과 굽힘의 영향을 동시에 고려하는 고유진동수 및 진동모드형상을 제시하였다[6]

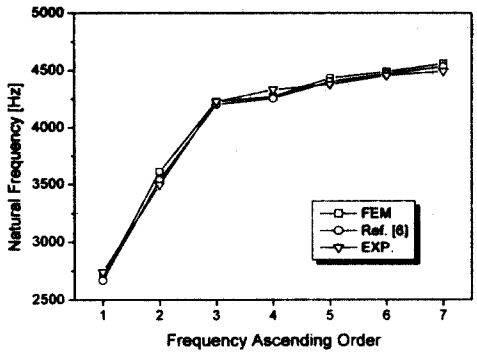


Fig. 9 Comparison of frequency parameters ($\lambda = [\rho r^2 \omega^2 (1-\nu^2)/E]^{1/2}$) of the hemispherical shell with clamped boundary condition from analytical, experimental and FEM results

6. 결 론

다양한 경계조건을 갖는 반구형셸의 자유진동 특성을 일반셸의 비신장이론 및 신장이론을 적용한 해석적 방법, 진동실험 그리고 유한요소법을 이용하여 수행하였고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 반구형셸에 대한 진동수 방정식을 일반셸의 신장이론 및 비신장 이론에 기초하여 유도하였다. 자유경계를 가지는 구형셸에 대하여 비신장 이론을 적용한 해석결과는 고유진동특성을 잘 예측하였다.
2) 셸의 신장이론을 적용한 해석결과는 자유 및 단순지지경계를 갖는 얇은 반구형셸에 대한 축대칭 진동특성을 잘 예측하였다.
3) 단순지지경계를 갖는 반구형셸의 축비대칭 진동에 대한 이론식 해석결과는 실험 및 유한요소해석결과와 상당히 큰 오차를 보이는데, 이는 단순지지경계를 갖는 구형셸의 자유진동시 셸의 비신장 거동외에 신장거동이 동시에 발생하기 때문으로 생각되며, 이 두 가지 영향을 동시에 고려할 수 있는 이론식의 개발이 향후 연구과제이다.
4) 자유경계에서는 반구형셸의 굽힘거동과 관계된 진동모드형상이 발생하지만, 단순지지나 고정경계조건과 같이 경계에서의 구속력이 강해질수록 고유진동수가 선형적으로 증가하고 저차 고유진동수에서 셸의 산장과 관련된 진동모드형상이 발생하였다.

참고문헌

(1) E. Reissner, 1955, "On Axisymmetrical Vibrations of Shallow Spherical Shells," J. of Applied Math., Vol. 13. No. 3, pp. 279-290.
(2) W. H. Hoppmann II, 1961, "Frequences of Vibration of Shallow Spherical Shells," Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 28, pp. 305-307
(3) W. C. Baker, 1961, "Axisymmetric Mode of a Spherical Shell", J. of Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 12, pp. 1749-1758
(4) P. M. Naghdi and A. Kalnins, 1962, "On Vibrations of Elastic Spherical Shells", Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol.29, No. 1, pp. 65~72.
(5) Chintsun Hwang, 1966, "Some Experiments on the Vibration of a Hemispherical Shell", Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.33, No. 4, pp. 817~824.
(6) V.C.M. Souza, 1980, "An Energy Analysis of the Free Vibrations of Isotropic Spherical shells", Journal of Sound and Vibration, Vol. 73, No. 3, pp. 379~404.
(7) B. P. Gautham and N. Ganesan, 1997, "Free Vibration Characteristics of Isotropic and Laminated Orthotropic Spherical Caps", Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 1, pp. 17~40.
(8) 권우근, 1988, "직교이방성 구형셸의 진동해석," 충남대학교 석사학위논문
(9) 이영신,최명환,김현수,양명석 1999, "단순지지된 얇은 반구형셸의 자유진동해석," 제9차 유도무기학술대회,국방과학연구소, pp.426~431
(10) W. Sodel, 1993, "Vibration of Shell and Plates", 2nd ed. Marcel Dekker, Inc., New York.