

기포로 채워진 캐비티가 압력 센서의 주파수 응답 특성에 미치는 영향

°강관형, 이무열, 김영기

Effect of Gas-Filled Cavity on Frequency Response of a Pressure Transducer

°Kwan Hyoung Kang, Mu-Yeol Lee, Young-Gi Kim

ABSTRACT

The resonant frequency of a gas-filled cylindrical Helmholtz resonator in a liquid is obtained analytically. The equation of motion of the resonator is derived by using the condition of equilibrium of forces acting on the mass in the neck of the resonator. The reaction force on the upper side of the cylinder due to the acceleration of external fluid and sound radiation is obtained by using the analytical results for the baffled circular-piston problem. From the frequency response function of the resonator, a formula to predict the resonant frequency of the resonator is derived. It is shown that the resonant frequency of the Helmholtz resonator significantly decreases due to the cushioning effect of gas inside the cavity. Therefore, when a pressure transducer is to be installed in a pin-hole type mounting method, much care should be paid to remove the gas from the cavity.

1. 서론

수중에서 소음 및 모형체 표면의 난류 변동 압력의 계측시 센서는 Fig. 1과 같이 계측면에 평행하게 설치 (flush mounting) 되거나 핀홀(pin-hole) 방식을 통해 설치될 수 있다. Fig. 1에 나타낸 바와 같이 RESON사의 TC4050 류의 수중침음기는 계측면이 넓기 때문에 난류 경계층 유동에 의하여 유효된 표면 변동 압력 계측시 공간적 분해능이 저하될 수 있으므로 핀홀 형태로 설치되는 것이 바람직하다.

선박 프로펠러 캐비테이션에 의해 유발되는 기

진력은 모형선의 선미에 Fig. 2와 같은 형태로 변동압력 센서를 설치하여 계측된다. 그런데 이 때 모형선의 표면의 곡률에 의하여 센서를 면에 평행하게 설치하는 것이 거의 불가능하다. 이에 따라서 센서의 들출에 의한 유동 교란을 최소화하기 위하여 센서를 모형체 내부로 약간 들어가게 설치하기도 한다. 이 경우 센서와 유체 사이에 형성되는 캐비티에는 초기부터 기포가 채워져 있을 수도 있고, 터널의 내부에 있는 기포들이 캐비티로 모여들어 기포가 채워지게 될 수도 있게 된다.

수중에서 센서를 핀홀 형태로 설치하거나 혹은 작은 캐비티 내부에 설치하는데 있어서 문제가 될 수 있는 것은 캐비티에 공기가 차게 된다는 것이

다. 이 경우 기포로 채워진 캐비티와 외부 유체의 상호 작용에 의하여 단순히 물이나 공기가 채워져 있는 경우에 비하여 시스템의 공진 주파수가 크게 변할 수 있다. 본 연구에서는 이와 같이 캐비티 내부의 기포가 압력 계측시의 센서의 주파수 응답 특성에 미치는 영향에 대하여 고찰하여 보았다.

2. 정식화

좌표는 (r, θ, x) 원통 좌표계를 사용한다(Fig. 3 참조). 캐비티는 천반사가 일어나는 강체판(rigid baffle)에 설치되어 있는 것으로 가정한다. 목 부분은 원통형 형상을 갖고며 반경은 a , 목의 길이는 h 로 나타내고, 캐비티의 체적은 V 로 각각 나타낸다. 편의상 영역을 외부 유동 영역($x > 0$), 목 영역($-h < x \leq 0, |r| \leq a$), 캐비티 영역의 세 영역으로 나누며 각각의 부위에는 물성이 다른 유체가 채워져 있는 것으로 설정한다. 각 영역에 있어서의 인자들은 필요한 경우 각각 첨자 1, 2, 3을 붙여서 나타내기로 하나 외부 유체 부분에 대해서는 첨자를 생략하도록 한다.

해석시 센서 표면은 강체판으로 간주되었으며 따라서 센서의 동적 거동에 의한 영향은 무시되었다. 또한 센서 계측면의 민감도(sensitivity)는 위치에 관계없이 일정한 것으로 가정하였다. 목 영역의 유체의 압축성에 의한 효과는 무시하였고, 정적인 상태로부터의 목 영역을 차지하고 있는 유체의 x 축 방향으로의 변위는 $w(t)$ 로 나타내기로 한다.

본 연구에서는 외부 유체의 흐름은 없는 것으로 간주하며 캐비티를 가진하는 압력은 캐비티로부터 원방에서 입사되는 음파에 대해서만 한정한다. 따라서 외부 유동장의 지배방정식은 다음과 같은 파동 방정식이 된다.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

위에서 c 는 외부 유체에서의 음파의 전달 속도이며, 압력 p 는 아래와 같이 세 성분으로 나눌 수 있다.

$$p = p_I + p_D + p_R. \quad (2)$$

위에서 p_I 는 입사파에 의한 압력을 나타낸다. 입사파는 평면파로 가정하고 캐비티에 연직으로 입사할 경우만을 고려한다. 즉,

$$p_I(x, t) = P_I(x)e^{-iat}, \quad P_I(x) = P_o e^{-ikx}. \quad (3)$$

p_D 는 $x = 0$ 의 벽면에서의 반사파에 의한 압력을 나타내며 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(p_I + p_D)}{\partial x} = 0, \text{ at } x = 0. \quad (4)$$

p_R 는 캐비티 목 영역 유체의 피스톤 운동에 의해 유발되는 압력을 나타내고 원형 막의 피스톤 운동에 대한 방사 문제(radiation problem)를 해석하여 구해진다. 이 때 피스톤 표면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial p_R}{\partial x} = \begin{cases} -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \text{if } r \leq a, x = 0 \\ 0, & \text{if } r > a, x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

3. 해석

입사파의 산란 문제(scattering problem)의 해로서 식 (1)의 지배 방정식과 식 (4)의 경계 조건을 만족시키는 해는 다음과 같다.

$$p_I + p_D = P_o (e^{ikx} + e^{-ikx}) e^{-iat} = 2P_o \cos kx e^{-iat}. \quad (6)$$

방사 문제는 기존에 잘 알려진 원형 피스톤(baffled cylindrical piston) 문제와 동일하게 취급될 수 있다. 이 문제의 풀이 과정은 기존의 문헌들에 상세히 나와 있으므로 상세한 해석 과정은 생략하고 그 결과만을 이용하기로 한다.⁽¹⁾ 먼저 경계면의 운동을 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{w} = \bar{\chi} H(a-r), \quad \dot{\bar{\chi}} = -\omega^2 w_o. \quad (7)$$

위에서 H 는 Heaviside 함수이다. 위와 같은 원형 피스톤의 운동에 의해 유발되는 계면($x=0$)에서의 압력은 다음과 같아진다.

$$p_R(r,0) = i\rho\dot{\chi}a \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma r)J_1(\gamma a)}{(k^2 - \gamma^2)^{1/2}} d\gamma \quad (8)$$

위의 압력에 의해 목 영역의 가상의 원통 표면에 가해지는 힘은 아래와 같이 표면 적분을 통해 구해진다.

$$\begin{aligned} F_R &= 2\pi \int_0^a p_R(r,0) r dr \\ &= 2\pi i\rho\dot{\chi}a^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\gamma a)}{\gamma(k^2 - \gamma^2)^{1/2}} d\gamma \end{aligned} \quad (9)$$

F_R 는 다음과 같이 가속도에 비례하는 성분과 속도에 비례하는 성분으로 분리가 가능하다.

$$\begin{aligned} F_R &= (R - i\omega M)\dot{w} = (R - i\omega M)(-i\omega)w \\ &= M\ddot{w} + R\dot{w} \end{aligned} \quad (10)$$

위에서 $M\ddot{w}$ 는 외부 유체의 가속에 의해, $R\dot{w}$ 는 소음 방사에 의해 각각 목 영역 유체에 가해지는 힘이며, M , R 은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= \frac{\rho\pi a^3 H_1(2ka)}{(ka)^2}, \\ R &= \rho c\pi a^2 \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} \right] \end{aligned} \quad (11a,b)$$

위에서 J_0 은 영차 Bessel 함수를 나타내고, H_1 은 Struve 함수이며 다음과 같이 정의된다.⁽²⁾

$$H_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(n+5/2)} \quad (12)$$

편의상 부가 질량 계수(α)와 감쇠 계수(ζ)를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{\rho\pi a^3} = \frac{H_1(2ka)}{(ka)^2}, \\ \zeta &= \frac{R}{\rho c\pi a^2} = \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

식 (10)에 의하여 목 영역의 위 면에 작용하는 힘(F_U)는 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned} F_U &= S[p_I(0,t) + p_D(0,t)] + F_R \\ &= 2Sp_I(0,t) + M\ddot{w} + R\dot{w}. \end{aligned} \quad (14)$$

한편, 캐비티의 목 부분의 유체의 질량은 다음과 같다.

$$m = \rho_2 Sh. \quad (15)$$

피스톤의 변위와 캐비티 체적 변화와는 $\Delta V = Sw$ 의 관계가 있고, 이로 인한 캐비티 내부의 유체의 밀도의 변화는 $\Delta\rho_3/\rho_3 = -\Delta V/V = -Sw/V$ 와 같다. 따라서 캐비티 내부의 압력의 변화(p_c)는 피스톤의 변위와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$p_c = -\frac{\sigma}{S}w, \quad q \equiv \rho_3 c_3^2 \frac{S^2}{V}. \quad (16)$$

위에서 q 는 캐비티의 강성(stiffness)을 나타낸다. 따라서 목의 아래쪽에 작용하는 힘(F_L)은 다음과 같아진다.

$$F_L = Sp_c = -Sqw. \quad (17)$$

그런데, 목 부분 유체의 피스톤 운동은 상부 유체뿐만 아니라 캐비티 내부의 유동을 가속하여 목 부분의 유체에는 이로 인하여 유발되는 압력이 작용하게 된다. 이 힘은 별도로 캐비티 내부의 유동을 해석하여 구해야 하나 여기서는 상부 유동의 해석을 통하여 얻어진 결과를 이용하기로 한다. 캐비티 내부에서의 소음 방사는 없으므로 추가적으로 가해지는 힘(F_{Lc})은 다음과 같아진다.

$$F_{Lc} \approx -M_3 \ddot{w}, \quad M_3 = \frac{\rho_3 \pi a^3 H_1 (2k_3 a)}{(k_3 a)^2}. \quad (18)$$

위에서 $k_3 = \omega/c_3$ 이다. 위 힘을 고려한 목 영역의 아래쪽에 작용하는 힘은 다음과 같아진다.

$$F_L' = F_L + F_{Lc} = -Sqw - M_3 \ddot{w}. \quad (19)$$

따라서 목 부위의 유체의 운동 방정식은 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned} m\ddot{w} &= F_L' - F_U \\ &= -qw - M_3 \ddot{w} - \{2SP_i + M\ddot{w} + R\dot{w}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

위 식을 다시 정리하면 다음과 같은 일자유도를 갖는 선형 진동계의 지배 방정식을 얻게된다.

$$(m + M + M')\ddot{w} + R\dot{w} + qw = -2SP_i \quad (21)$$

그런데 $w = w_0 e^{-i\omega t}$ 이고, 캐비티 내부의 유체의 가속으로 인한 효과를 무시하면 캐비티 내부의 압력은 w 와 식 (16)과 같은 관계를 갖게 되므로 위 식은 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\{[1 - \omega^2(m + M + M')/q] - i\omega R/q\} p_c = 2p_i(0, t).$$

위 식을 통하여 압력에 대한 주파수 응답 함수 (F_p)는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{p_c}{p_i(0, t)} \equiv F_p = \frac{2}{[1 - \omega^2(m + M + M')/q] - i\omega R/q}. \quad (22)$$

위에서 공진 주파수(f_r)는 다음과 같아진다.

$$f_r = \frac{c_3}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{S}{\rho_2/\rho_3 \cdot [L + (M+M')/(S\rho_2)]}V}. \quad (23)$$

그런데 부가 질량 M 과 M_3 은 $ka \ll 1$ 인 경우 아래와 같이 근사 된다.⁽³⁾

$$M \approx \frac{8}{3} \rho_1 a^3, \quad M_3 \approx \frac{8}{3} \rho_3 a^3$$

위의 결과를 식 (23)에 대입하면 식 (23)은 다시 아래와 같이 나타내 진다.

$$f_r = \frac{c_3}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2} \cdot \frac{S}{[L + 0.85(\rho/\rho_2 + \rho_3/\rho_2)a]V}} \quad (24)$$

위 식을 통하여 수중에 위치한 캐비티에 공기가 찬 경우 ($\rho_3 \ll \rho$, $c_3 < c$) 공진 주파수가 매우 감소하게 됨을 알 수 있다. 한편, 캐비티에 외부의 유체와 동일한 유체가 채워져 있는 경우 즉, $\rho = \rho_2 = \rho_3$ 이고 $c = c_3$ 인 경우, 위 식은 다음과 같이 일반적으로 잘 알려진 플랜지가 있는 Helmholtz 공명기의 공명 주파수가 된다.⁽³⁾

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{S}{[L + 1.75a]V}} \quad (25)$$

4. 계산예 및 토의

계산은 Table 1과 같은 네 가지 경우에 대하여 수행하였다. "Case 3"은 정압이 증가하여 캐비티 내부의 공기가 수축되고 이에 따라 외부 유체가 부분적으로 목 영역으로 유입되는 경우를 모사하기 위하여 고려되었다. 계산상 캐비티의 치수는 센서 설치를 위한 치구 가공의 현실성을 고려하여 $a = 1\text{mm}$, $h = 1\text{mm}$ 로 두었고, 캐비티의 형상은 센서의 형상이 원통형임에 따라 반경(a_3)이 5mm, 높이(h_3)가 0.5mm인 원통형인 것으로 설정하였다.

Fig. 4는 식 (22)의 주파수 응답 함수를 수치적으로 계산하고 식 (24)를 이용하여 공진 주파수를 구하여 비교한 것이다. Table 2는 두 식으로 통하여 구해진 공진 주파수를 비교한 것인데 두 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 보다 중요한 것은 Fig. 4에서 알 수 있는 바와 같이 공기의 영향에 의하여 공기가 없을 경우 약 40kHz이던 Helmholtz 공명기의 공진 주파수가 약 600Hz까지 감소된다는 것이다. 따라서 공기중에서 편향 방식으로 센서를 설치할 경우 공기를 제거하기 위하여 세심한 주의를 기울여야 할 것으로 판단된다.

Table 1. Conditions for sample calculation

Case	External fluid	Fluid in neck	Fluid in cavity
1	Water	Water	Water
2	Water	Air	Air
3	Water	Water	Air
4	Air	Air	Air

Table 2. Comparison of calculated resonant frequency

Case	Resonant frequency, Hz		Error (%)
	Eq. (22)	Eq. (25)	
1	39,645.0	39723.8	0.20
2	579.6	579.9	0.05
3	396.4	393.5	0.74
4	9,378.1	9396.7	0.20

또한 캐비티 내부 유체는 공기이고 외부 유체가 각각 물과 공기인 “Case 2”와 “Case 4”에 대한 공진 주파수를 비교하여 보면 상당히 차이가 큼을 알 수 있다. 즉, “Case 4”에 비하여 “Case 2”는 외부 유체의 가속에 의해 부가 질량이 크게 증가하여 궁극적으로 공진 주파수가 작아지는 효과가 발생되었다. 이 결과를 통하여 수중에 있는 기포가 찬 캐비티의 공진 주파수는 반드시 외부 유체의 가속에 의한 부가 질량 효과와 소음 방사에 의한 감쇠 효과를 고려해야만 된다는 것을 알 수 있다.

한편, 목 영역에 물이 유입되는 경우에 해당하는 “Case 3”은 “Case 2”에 비하여 공진 주파수가 더욱 감소하는 것을 알 수가 있다. 이것은 진동계의 질량이 증가하기 때문이다. Fig. 4에서 “Case 1”과 “Case 4”를 비교해 보면 동일한 조건에 대하여 물의 경우가 공기의 경우에 비해서는 공진 주파수 측면에서 우월함을 알 수가 있다. Fig. 6은 주파수 응답 함수의 위상 각을 계산하여 나타낸 것이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 공진 주파수 근처에서 급격하게 증가하며 공진 주파수 이상에서는 비교적 일정한 값을 유지함을 알 수 있다.

5. 결론

공기가 찬 캐비티가 센서의 주파수 응답 특성에 미치는 영향을 이론적으로 해석하였으며 이를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 수중에 위치한 공기가 채워진 Helmholtz 공명기의 주파수 응답 함수는 식 (22)와 같으며, 공진 주파수는 식 (24)를 통하여 예측될 수 있다.
- 2) 공기의 영향으로 인하여 Helmholtz 공명기의 공진 주파수가 급격히 저하될 수 있다. 따라서 수중에서 핀홀 방식으로 압력 센서를 설치할 경우 기포를 제거하기 위한 세심한 주의가 요구된다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실 사업 (National Research Laboratory Program) 과제의 일부로 수행되었다. 과제 수행에 대한 지원에 심심한 감사로 표현한다.

참고문헌

- (1) Junger, M. C., and Feit, D., 1986, Sound, Structures, and Their Interaction, 2nd Ed., The MIT Press, pp. 92-109.
- (2) Abramowitz, M., and Stegun, I. A., 1972, Handbook of Mathematical Functions, 9th Ed., Dover Publications, Inc., New York, p. 496.
- (3) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V., 1982, Fundamentals of Acoustics, 3rd Ed., John Wiley & Sons.

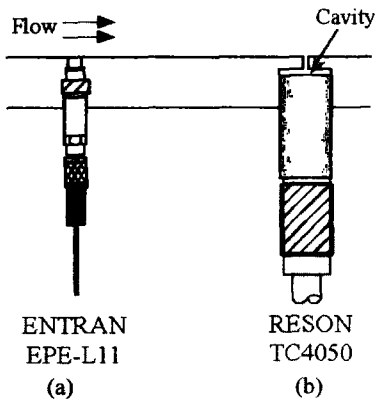


Fig. 1. Typical method of pressure-transducer mounting: (a) Flush mount; (b) Pin-hole mount

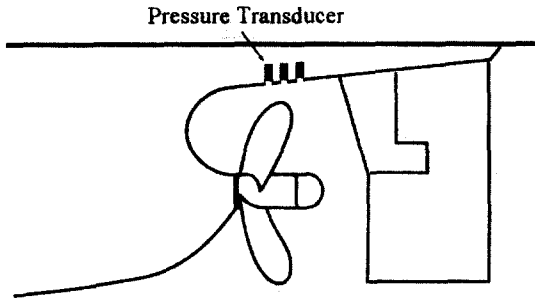


Fig. 2. Arrangement of pressure sensor to measure the propeller-induced fluctuating pressure on model-ship hull

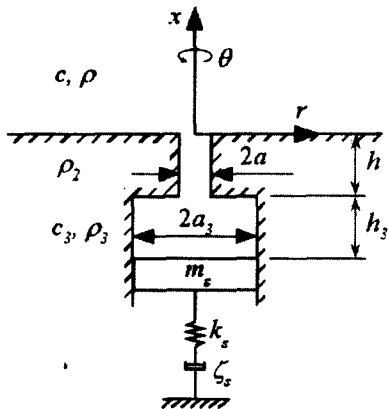


Fig. 3. Coordinate system and definition of variables

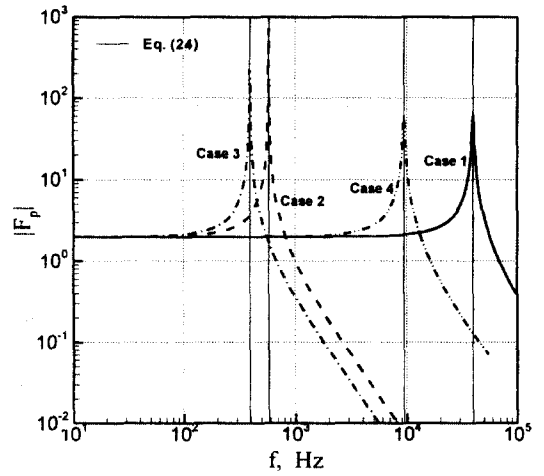


Fig. 4. Frequency response function of air-field Helmholtz resonator

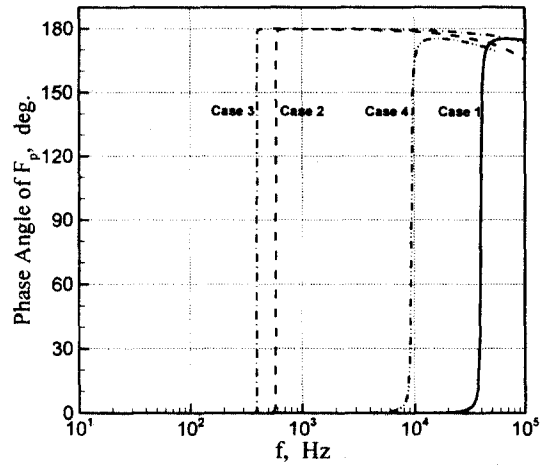


Fig. 5. Phase angle of frequency response function of air-field Helmholtz resonator