

6 자유도 HexaSlide 형 병렬기구의 선형화된 운동방정식 유도

◦ 김종필* · 류제하**

Derivation of Linearized Dynamic Equations of Motion for HexaSlide Type Parallel Manipulators

Jongphil Kim and Jeha Ryu

Key Words : Parallel Manipulators, Dynamics, Equivalent Linearization

Abstract

This paper presents an equivalent linearization method and application to the equations of motion of a 6 degree-of-freedom PRRS HexaSlide type parallel manipulators which are characterized as the architecture with constant link lengths that are attached to moving sliders on the ground and to a mobile platform. Since dynamic equations of parallel manipulators are complicated and highly nonlinear, control bandwidth, adjustable control gain as well as vibration characteristics cannot be easily found. The proposed equivalent linearization method can be applied over specified workspace as well as on a path of mobile platform. Through an equivalent linearization method, one can easily get a simple linear dynamic model. This linearized dynamic model may be utilized in a simplified computed torque control strategy.

1. 서론

대부분의 산업용 로봇은 직렬형 기구구조를 가지고 있다. 직렬형 기구는 개루프(open chain)의 기구학적 구조로 인해 넓은 작업공간을 갖고, 제어기 설계의 유연성이 좋은 반면에 각부의 오차가 직접 누적되어지며 강성이 좋지 않으므로 고정밀 작업이나 고속작업에 용이하지 않다. 최근 10여년간 이러한 단점에 대한 대안으로 병렬형 기구가 관심을 끌고 있다.

병렬형 기구는 운동부와 구동부가 2개 이상의 링크에 의해 폐루프(closed chain)의 기구학적 구조를 가지고 있다. 이로 인해 하중이 각각의 링크에 분산되어지고, 각 링크는 인장 압축력만 받게 되어 가벼운 구조로 매우 큰 강성을 가지게 된다. 따라서 고속, 고가속도 운동에 유리한 특징을 갖는다. 또한 각 부에서 발생한 오차가 직접 누적되지 않고 평균화 하여 나타나기 때문에 고정밀 작

업에 유리하다. 그러나 직렬기구에 비해 작업공간이 좁고 기구학적, 동역학적 특징이 매우 복잡하여 고난도의 보간 기술 및 제어 기술이 요구되어진다.

HexaSlide 형 병렬기구는 구동부가 고정된 면을 따라 움직이는 PRRS 기구 구조를 갖고있다. 일정한 경사를 갖는 베이스에 직선안내가 설치되어 있고 슬라이더가 이 직선안내를 따라 병진운동을 한다. 플랫폼과 슬라이더는 고정된 길이의 링크에 의해 서로 결합되어 있으며, 베이스에 설치된 구동기가 볼 스크류를 통해 슬라이더의 운동을 만들어 낸으로써 플랫폼의 6 자유도 운동을 가능케 한다. 슬라이더와 링크와는 유니버설 조인트에 의해, 링크와 플랫폼과는 구형 조인트에 의해 결합되어 있다. 따라서, 정적 구조물을 형성하고 있을 때 링크는 인장, 압축력만 받게 되고, 굽힘모멘트에 의한 변형이 발생하지 않으므로 매우 큰 강성을 가지게 된다. HexaSlide 형 병렬기구는 직선안내가 상하방향으로 경사를 갖기 때문에 Hexaglide에 비해

* 광주과학기술원 기전공학과

** 광주과학기술원 기전공학과 부교수

화 하는 매개변수 \mathbf{a} 를 찾아낼 수 있다.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \langle x_1^2 \rangle & \langle x_1 x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 x_n \rangle \\ \langle x_2 x_1 \rangle & \langle x_2^2 \rangle & \cdots & \langle x_2 x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n x_1 \rangle & \langle x_n x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n^2 \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle x_1 f(\mathbf{X}) \rangle \\ \langle x_2 f(\mathbf{X}) \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n f(\mathbf{X}) \rangle \end{pmatrix} \quad (7)$$

이를 matrix 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle^{-1} \langle f(\mathbf{X})\mathbf{X} \rangle \quad (8)$$

3. 병렬기구 운동방정식의 선형화

3.1 작업공간내의 등가 선형화

병렬기구의 운동방정식은 직렬기구와 달리 카터시안 공간으로 유도되어지며, 일반적으로 식(9)의 형태를 지닌다. 여기서 \mathbf{X} 는 운동부(mobile platform)의 세 병진 운동좌표 및 세 회전 운동좌표들을 나타내며, $\boldsymbol{\tau}(t)$ 는 기구의 구동부에서 발생시키는 구동력을 나타낸다.

$$\mathbf{T}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (9)$$

이러한 비선형 운동방정식을 선형화 하기 위해서 inertia matrix $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ 는 constant matrix \mathbf{M} 으로 등가 치환 되어져야 한다. 또한 $\mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})$ 는 $\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X}$ 로 선형화 할 수 있다. 이때 식(9)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + (\mathbf{T}(\mathbf{X}) - \mathbf{M})\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}\mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (10)$$

즉, ${}^T\mathbf{E} = \mathbf{T}(\mathbf{X}) - \mathbf{M}$, ${}^H\mathbf{E} = \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}\mathbf{X}$ 를 최소화 하는 \mathbf{M} , \mathbf{C} , 그리고 \mathbf{K} 를 구하면 식(9)의 비선형 운동방정식을 등가 선형화 시킬 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (11)$$

특히, 벡터 함수 $\mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})$ 가 $\dot{\mathbf{X}}$ 과 \mathbf{X} 로 explicit 하게 표현되어 지지 않더라도 용이하게 \mathbf{C} 과 \mathbf{K} 를 찾아낼 수 있다. 이러한 선형식에서 \mathbf{M} 은 선형화된 등가질량 matrix, \mathbf{C} 와 \mathbf{K} 는 각각 기구부의 운동에 의해 나타나는 등가 댐핑, 등가 강성 matrix로 해석할 수 있으며, 기구부 구조물 자체 변형에 의한 구조강성 matrix와는 별개이다.

먼저, inertia matrix를 선형화 하기위한 매개변수 \mathbf{M} 을 구하여 보자.

$$\langle {}^i e_{ij}^2 \rangle = \langle (t_{ij} - m_{ij})^2 \rangle \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_{ij}} \langle {}^i e_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (13)$$

식(13)로부터 m_{ij} 를 구할 수 있다.

$$m_{ij} = \frac{\langle t_{ij} \rangle}{V_x} \quad (14)$$

여기서 V_x 는 $\langle 1 \rangle$ 을 나타내며, 각각 세 개의 병진과 회전좌표계가 span 하는 공간의 부피를 의미한다. 이를 matrix 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V_x} \langle \mathbf{T}(\mathbf{X}) \rangle \quad (15)$$

다음으로 식(16)을 최소화하기위한 매개변수 \mathbf{C} 과 \mathbf{K} 를 구하여 보자.

$$\langle {}^h e_i^2 \rangle = \left\langle \left(h_i(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) - \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{x}_k - \sum_{k=1}^n k_{ik} x_k \right)^2 \right\rangle \quad (16)$$

식(16)의 매개변수 c_{ij} 와 k_{ij} 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}} \langle {}^h e_i^2 \rangle = -2 \left\langle \left(h_i \dot{x}_j - \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{x}_k \dot{x}_j - \sum_{k=1}^n k_{ik} x_k \dot{x}_j \right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}} \langle {}^h e_i^2 \rangle = -2 \left\langle \left(h_i x_j - \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{x}_k x_j - \sum_{k=1}^n k_{ik} x_k x_j \right) \right\rangle = 0$$

정리하여 matrix 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{C} \langle \dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}}^T \rangle + \mathbf{K} \langle \mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}^T \rangle = \langle \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})\dot{\mathbf{X}}^T \rangle \quad (17)$$

$$\mathbf{C} \langle \dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}^T \rangle + \mathbf{K} \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle = \langle \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})\mathbf{X}^T \rangle$$

최종적으로 \mathbf{C} 와 \mathbf{K} 는 다음과 같다.

$$[\mathbf{C} \ \mathbf{K}] \quad (18)$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})\dot{\mathbf{X}}^T \rangle & \langle \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X})\mathbf{X}^T \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \dot{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}}^T \rangle & \langle \dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}^T \rangle \\ \langle \mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}^T \rangle & \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle \end{bmatrix}^{-1}$$

앞에서 구한 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 값을 식(12)과 식(16)에 대입하면 선형화 지수를 구할 수 있다.

$$LN = \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_{ij} - m_{ij})^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \left(h_i(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) - \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{x}_k - \sum_{k=1}^n k_{ik} x_k \right)^2 \right\rangle \quad (19)$$

3.2 경로에 따른 등가 선형화

일정한 작업공간이 아닌 운동부의 경로에 대해 선형화 되어진 운동방정식을 유도할 수 있다. 이

경우 병렬기구의 운동방정식은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\mathbf{T}(t)\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (20)$$

\mathbf{R} 은 시간 t 가 span 하는 subspace이며, 식(21)의 선형화 지수를 최소화하는 매개변수 \mathbf{a} 를 찾아내어 등가 선형화 된 운동방정식을 구성한다. 이렇게 정의된 선형화 지수는 단 한번의 적분을 포함하므로 작업공간내의 선형화 방법보다 계산로드가 매우 줄어들게 된다.

$${}^lLN \equiv \int (f(\mathbf{X}) - f'(\mathbf{X}, \mathbf{a}))^2 dt \quad (21)$$

여기서, operator 는 $\langle \bullet \rangle = \int (\bullet) dt$ 을 의미하게 된다. 따라서 등가 선형화 되어진 관성행렬은 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{T}(t) \rangle}{t_{final} - t_{initial}} \quad (22)$$

\mathbf{C} 와 \mathbf{K} 값도 식(23)과 같이 구할 수 있다.

$$[\mathbf{C} \quad \mathbf{K}] \quad (23)$$

$$= \left[\langle \mathbf{H}(t)\dot{\mathbf{X}}(t)^T \rangle \langle \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t)^T \rangle \right] \left[\begin{array}{c} \langle \dot{\mathbf{X}}(t)\dot{\mathbf{X}}(t)^T \rangle \langle \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{X}}(t)^T \rangle \\ \langle \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}(t)^T \rangle \langle \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^T \rangle \end{array} \right]^{-1}$$

4. Numerical Example: HexaSlide 형 병렬기구 운동방정식의 선형화

병렬기구의 운동방정식은 주로 Newton-Euler 방법으로 유도되어진다. 이는 복잡한 기구학 구조에 의해 differential equation 을 풀어야 하는 Lagrange 방법을 이용할 경우 그 유도과정이 매우 복잡해지기 때문이다. 역기구학을 통해 각 요소의 운동 정보를 구하고 Newton-Euler equation 들을 연립하여 풀으므로써 다음과 같은 HexaSlide 형 병렬기구의 운동방정식을 구해낼 수 있다[5].

$$\mathbf{T}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau} \quad (24)$$

여기서,

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{a_1^T n_1} & \frac{n_2}{a_2^T n_2} & \dots & \frac{n_6}{a_6^T n_6} \\ \frac{\widetilde{GB}_1 n_1}{a_1^T n_1} & \frac{\widetilde{GB}_2 n_2}{a_2^T n_2} & \dots & \frac{\widetilde{GB}_6 n_6}{a_6^T n_6} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} mI_{3 \times 3} + \sum s_{6,i} & -m\widetilde{CG} - \sum s_{6,i} \widetilde{CB}_i \\ \widetilde{GB}_i s_{6,i} & I - \sum \widetilde{GB}_i s_{6,i} \widetilde{CB}_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{a_1^T n_1} & \frac{n_2}{a_2^T n_2} & \dots & \frac{n_6}{a_6^T n_6} \\ \frac{\widetilde{GB}_1 n_1}{a_1^T n_1} & \frac{\widetilde{GB}_2 n_2}{a_2^T n_2} & \dots & \frac{\widetilde{GB}_6 n_6}{a_6^T n_6} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m(\tilde{\omega}\tilde{\omega}CG - g) + \sum s_{7,i} \\ \tilde{\omega}I\omega + \sum \widetilde{GB}_i s_{7,i} + \sum f_{pi} \end{pmatrix}$$

$$s_{6,i} = \frac{m_{s_i} n_i n_i^T}{(a_i^T n_i)^2} + \frac{m_{\tilde{n}_i} n_i n_i^T}{4(a_i^T n_i)^2} + \frac{\tilde{a}_i I_{ii} \tilde{n}_i \tilde{a}_i}{l^2 (a_i^T n_i)^2} + \frac{m_{\tilde{I}_i}}{4a_i^T n_i} (n_i a_i^T + a_i n_i^T + a_i^T n_i I_{3 \times 3})$$

$$s_{7,i} = s_{6,i} \tilde{\omega} \tilde{\omega} \widetilde{CB}_i + \frac{\tilde{n}_i^T \tilde{n}_i}{(a_i^T n_i)^2} \left(l m_{s_i} n_i + \frac{1}{l} \tilde{a}_i I_{ii} \tilde{n}_i a_i + \frac{1}{4} m_{\tilde{I}_i} (a_i^T n_i a_i + n_i) \right) - \frac{1}{a_i^T n_i} \left(m_{s_i} n_i a_i^T g + \frac{1}{l} \tilde{a}_i \tilde{\omega}_{ii} I_{ii} \omega_{ii} + \frac{1}{2} m_{\tilde{I}_i} (n_i a_i^T g + a_i^T n_i g) \right)$$

를 나타내며, a_i 는 i 번째 직선안내 길이방향의 단위벡터를, n_i 는 i 번째 링크 길이방향의 단위벡터를 의미한다. m_{s_i} 는 i 번째 슬라이더의 질량, $m_{\tilde{n}_i}$ 는 i 번째 링크의 질량, m 은 플랫폼의 질량을 의미하며, I 는 플랫폼의 회전관성, I_{ii} 는 i 번째 링크의 회전관성을 의미한다.

이러한 HexaSlide 형 병렬기구의 복잡한 비선형 운동방정식을 식(22)과 식(23)의 경로에 따른 등가 선형화 방법에 적용하여 보았다. Fig2.은 플랫폼의 운동경로가 $\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ -1.2 \ 0 \ 0 \ 0]$ 로부터 출발하여 $\ddot{\mathbf{X}} = [0.05 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.002 \ 0.005 \ 0.001]$ 의 가속도를 가지고 3초간 운동할 때의 실제 구동력($\boldsymbol{\tau}$, 식(24))을 보여준다. Fig3.는 동일 경로에 대해 등가 선형화 되어진 식을 통해 구해진 구동력을 보여준다. Fig4.는 실제와 등가 선형화 되어진 결과의 차이를 보여준다. Fig5.는 플랫폼이 수직위치 $z = -1.2\text{m}$ 에서 반지름 $r = 0.1\text{m}$ 로 1초에 1회전 할 때 실제 구동력을, Fig6.는 등가 선형화 되어진 식을 통한 구동력을, Fig7.은 실제와 등가 선형화 되어진 결과의 차이를 보여준다.

회전속도를 달리하며 실제 구동력과 등가 구동력 사이의 상대 오차를 살펴보면, 5초에 1회전시 5.79%, 1초에 1회전시 2.93%, 1초에 5회전시 3.30%으로 플랫폼의 속도에 그리 큰 영향을 받지 않음을 살펴볼 수 있다.

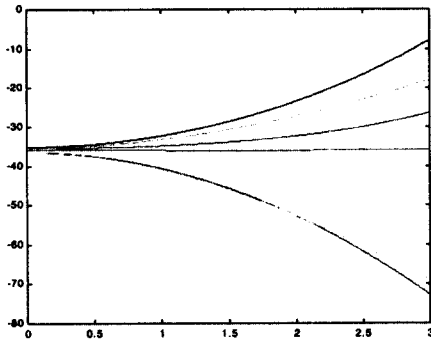


Fig2. Real driving force (equation(24)) when trajectory of platform is $\dot{X} = [0.05 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.002 \ 0.005 \ 0.001]$.

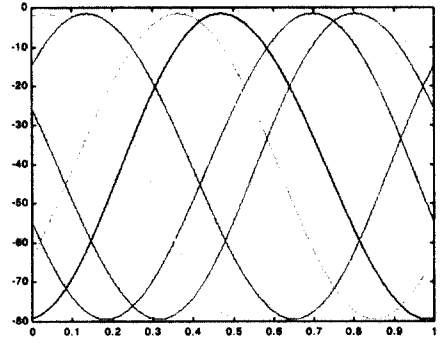


Fig5. Real driving force when trajectory of platform is circle trajectory with radius $r=0.1m$ and 60rpm velocity.

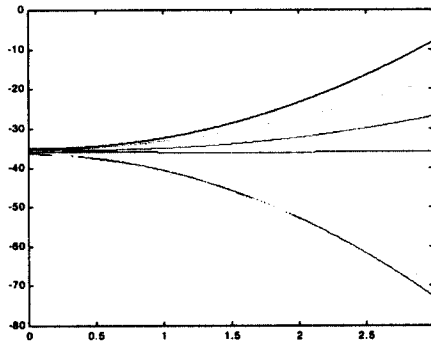


Fig3. Equivalent driving force when trajectory of platform is $\dot{X} = [0.05 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.002 \ 0.005 \ 0.001]$.

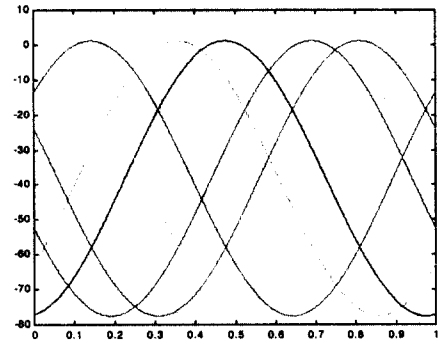


Fig6. Equivalent driving force when trajectory of platform is circle trajectory with radius $r=0.1m$ and 60rpm velocity.

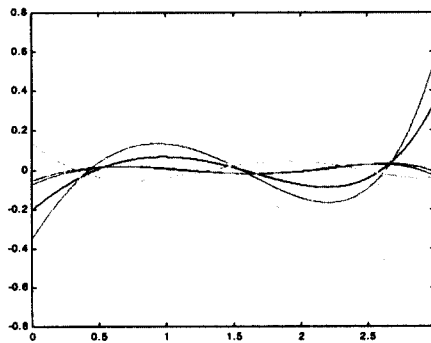


Fig4. The differences between real driving force and equivalent driving force when trajectory of platform is $\dot{X} = [0.05 \ 0.01 \ 0.03 \ 0.002 \ 0.005 \ 0.001]$.

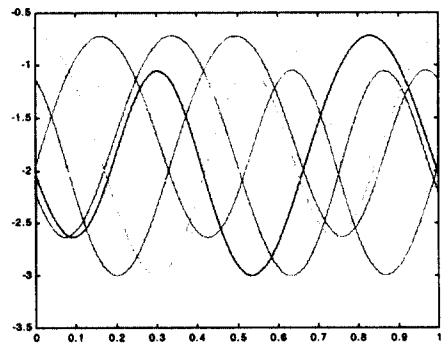


Fig7. The differences between real driving force and equivalent driving force when trajectory of platform is circle trajectory with radius $r=0.1m$ and 60rpm velocity.

5. 결론 및 향후연구과제

병렬형 기구는 페루프의 기구학적 구조로 인해 직렬형 기구에 비해 매우 복잡한 운동방정식을 가진다. 이 논문에서는 이러한 비선형 운동방정식의 등가 선형화 방법을 제시하였고, HexaSlide 형 병렬 기구의 운동방정식에 적용하여 보았다. 병렬기구의 운동방정식을 mean square error criterion 을 이용하여 constant mass, damper, stiffness matrix 로 등가 선형화 하는 이 방법은 기구의 수행속도에 그리 큰 영향을 받지 않으며 이러한 선형화 방법을 통해 단순화 되어진 선형 운동방정식을 얻을 수 있다. 향후에는 이렇게 유도된 선형운동방정식을 사용하여 계산토크제어나 적응제어기법에 응용하고 구조강성 및 댐핑 행렬을 고려하여 고속운동시의 진동 특성 등을 파악하는 연구를 수행할 예정이다.

감사의 글

본 연구는 교육부 BK21 프로젝트의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) R. Soylu, and A. Sarrafi. 1996. "Linearization and optimization of robot dynamics via inertial parameter design." *J. of Robotic Systems* 13(8), pp. 527-538
- (2) N. D. Anh, and W. Schiehlen. 1999. "A technique for obtaining approximate solutions in Gaussian equivalent linearization." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168(1999) pp. 113-119
- (3) A. H. Nayfeh, and D. T. Mook. "Nonlinear oscillations." John Wiley & Sons, 1979
- (4) T. K. Caughey. 1963. "Equivalent linearization techniques." *J. of Acoust. Soc. Am.*, 35, pp. 1706-1711
- (5) 김종필, 김성관, 류제하, 이선규. 1999. "Inverse Kinematic and Dynamic Analyses of HexaSlide Type Parallel Manipulators" KACC, C 권 pp.177-182

