

## 종방향과 횡방향 변위가 연성된 축방향으로

### 움직이는 현의 진동

<sup>0</sup> 정진태\* 신창호\*\*, 한창수\*

## Vibration of an Axially Moving String Coupled between Longitudinal and Transverse Deflections

J.T.Chung, C.H.Shin, C.S.Han

### ABSTRACT

The vibration of an axially moving string is studied when the string has geometric non-linearity and translating acceleration. Based upon the von Karman strain theory, The equation for the longitudinal vibration is linear and uncoupled, while the equation for the transverse vibration is non-linear and coupled between the longitudinal and transverse deflections. The governing equations are discretized by using the Galerkin approximation. With the discretized nonlinear equations, the time responses are investigated by using the generalized- $\alpha$  method .

### 1. 서론

축방향으로 움직이는 현의 횡방향 진동에 관해 많은 연구들이 진행되어 왔다. 축방향으로 움직이는 현을 동역학적인 관점에서 분석하여 연구를 제시하였다<sup>[1-2]</sup>. 이 연구는 현의 진동과 안정성에 대한 해석이 대부분 횡방향 변위에 중점을 두고 있다. 비선형 진동에 대한 정성적 그리고 정량적 연구는 Mote<sup>[3]</sup>, Thurman 과 Mote<sup>[4]</sup>에 의해 수행되었다. 이들은 기하학적 비선형성과 미소한 변형율을 동시에

고려한 비선형 변형율을 제시하였다. 그러나 선형 시스템에는 미소한 변형율을 사용하고, 비선형 시스템에서는 von Karman 변형율을 사용하므로 기하학적 비선형성은 von Karman 변형율을 고려하는 것이 타당하다<sup>[5]</sup>. 한편, 현이 축방향의 가속도를 가질 때 진동과 안정성에 대한 연구가 수행되어 왔다<sup>[6-9]</sup>.

본 연구는 확장된 Hamilton 원리<sup>[10]</sup>를 적용하여 축방향으로 움직이는 현의 종방향 및 횡방향 운동 방정식을 유도하였다. 특히 종방향과 횡방향 변위의 기하학적 비선형성과 이송 가속도를 고려하였다. 그리고, 기하학적 비선형성은 근사화된 미소 변형율 이론 대신 von Karman 변형율 이론을 적용하였다. 각각의 운동방정식에 해당하는 weak form 을

\* 한양대학교 공학대 기계공학과

\*\*한양대학교 정밀기계공학과 대학원

Galerkin 방법을 통하여 이산화 하였다. 이산화 과정에서 종방향과 횡방향 변위는 각각 허용함수(admissible function)와 비교함수(comparison function)를 기저함수(basis function)로 사용하였다. 이산화된 방정식으로부터 종방향과 횡방향 변위의 시간응답을 일반화된  $\alpha$  방법을 통하여 구하였다.

## 2. 이론적 모델과 운동 방정식

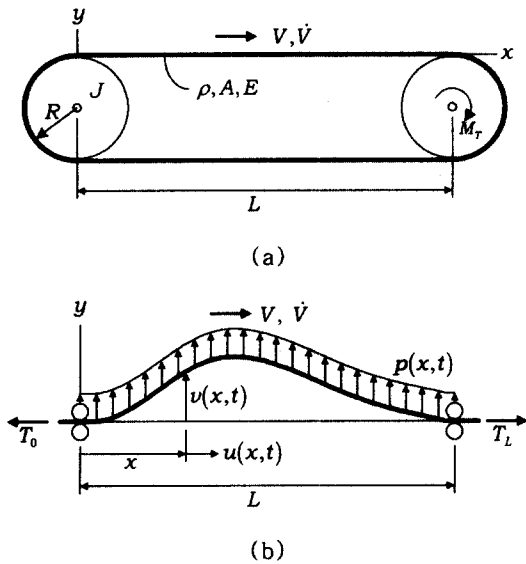


Figure 1. Schematics of an axially moving string; (a) a string drive system between two pulleys (b) a theoretical model of the string with the longitudinal and transverse deflections.

Fig. 1(a)에 도시된 현의 구동 시스템은 구동하는 풀리와 구동되는 풀리로 구성되어 있으며, 같은 반경  $R$  과 질량관성 모멘트  $J$  를 가지고 있다. 구동하는 풀리의 토크는  $M_T(t)$  이다. 현의 길이당 밀도는  $\rho$ , 단면적은  $A$ , Young 율은  $E$ , 이송속도  $V(t)$ , 그리고 이송가속도  $\dot{V}(t)$  이다. Figure 1(b)처럼 축방향으로 움직이는 현은

단위 길이당 수직하중  $p(x,t)$  가 작용하고 있다. 두 풀리간의 길이가  $L$  이고, 종방향과 횡방향 변위를 각각  $u(x,t)$  와  $v(x,t)$  로 표현했다. 만약 풀리의 축간에 마찰이 없다고 가정하면, 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V}(t) = \frac{R}{2(J + \rho LR^2)} M_T(t) \quad (1)$$

만약  $M_T = 0$  일때 초기장력이  $T_0$  이고  $M_T \neq 0$  일때  $x=L$  에서 장력이  $T_L$  이라 하면,  $T_0$  와  $T_L$  의 관계는 다음식과 같다.

$$T_L = T_0 + \rho L \dot{V} \quad (2)$$

운동방정식은 확장된 Hamilton 원리<sup>[10]</sup>를 사용하여 구하여야 한다. 왜냐하면 질량이  $x=0$  와  $x=L$  의 경계에서 유입, 유출되고 있기 때문이다. 이런 경우 Hamilton 원리는 다음식으로 표현된다.

$$\int_0^t (\delta T - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (3)$$

여기서  $T$  는 운동에너지,  $U$  는 변형에너지,  $\delta W_{nc}$  는 비보전력에 의한 가상일,  $\delta M$  경계를 통과하는 가상운동량 수송(virtual momentum transport)이다.

변형된 후의 임의의 점  $x$  에 대한 위치벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{r} = (x + u)\mathbf{i} + v\mathbf{k} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{i}$  와  $\mathbf{j}$  는 각각  $x$  와  $y$  축의 단위 벡터이다. 속도벡터는 위치벡터를 시간에 대해 물질미분을 취하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v} = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad (5)$$

또한, 현의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 변위-변형을 관계식과 응력-변형율의 관계식은 아래의 식을 사용하였다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \sigma_x = E \epsilon_x \quad (6)$$

중력의 영향을 무시하고, 현의 운동에너지와 변형에너지는 아래의 식으로 구할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dx, \quad U = \frac{1}{2} A \int_0^L \sigma_x \epsilon_x dx \quad (7)$$

그리고, 비보전력에 의한 가상일과 가상운동량 수송(virtual momentum transport)은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\delta W_{nc} = -T_0 \delta u|_{x=0} + T_L \delta u|_{x=L} + \int_0^L \rho(x,t) \delta v dx, \\ \delta M = \rho(\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r})(V \mathbf{i} \cdot \mathbf{n})|_{x=0}^L \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{n}$ 은 경계에서 바깥쪽으로 향하는 수직벡터이다. 운동방정식은 식(7)과 식(8)을 식(3)에 대입하여 유도할 수 있다.

현에 대한 종방향과 횡방향 운동 지배방정식은 아래와 같이 유도되었다.

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \dot{V} \quad (9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p \quad (10)$$

그리고 현의 경계조건은 아래와 같다.

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = T_0 \quad \text{at } x=0, \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = T_0 + \rho L \dot{V} \quad \text{at } x=L, \\ v=0 \quad \text{at } x=0, L \quad (11)$$

### 3. 운동방정식의 이산화

운동방정식의 이산화를 위해 유도된 운동방정식 (9),(10)과 경계조건 (11)으로부터 weak form을 만든 후 Galerkin 방법을 적용하였다. 시도함수(trial function)  $u$ 와  $v$ , 가중함수(weighting function)  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 를 사용하여 식(9)와 식(10)은 다음과 같은 weak form으로 표현된다.

$$\int_0^L \left[ \rho \left( \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 2V \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + (EA - \rho V^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \dot{V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx \\ = \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) [T_L u(L) - T_0 u(0)] - \rho \dot{V} \int_0^L \bar{u} dx \quad (12)$$

$$\int_0^L \left[ \rho \left( \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - V^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \dot{V} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - EA \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \quad (13)$$

위에서 종방향 변위는 허용함수(admissible function)의 급수를, 횡방향 변위는 비교함수(comparison function)의 급수를 사용하였다. 왜냐하면 식(12)의 weak form에서  $u$ 에 대한 힘의 경계조건(natural boundary conditions)을 포함하고 있기 때문이다. 따라서, 종방향 변위와 횡방향 변위는 각각 허용함수(admissible function)와 비교함수(comparison function)가 선형 결합된 아래와 같은 시도함수(trial function)로 근사화할 수 있다.

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^J C_j(t) \cos \frac{j\pi}{L} x, \\ v(x,t) = \sum_{n=1}^N S_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (14)$$

마찬가지로 각각의 시도함수(trial function)에 대응하는 아래의 식과 같은 가중함수(weighting function)에 의해 근사화할 수 있다.

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{i=1}^J \bar{C}_i(t) \cos \frac{i\pi}{L} x \\ \bar{v}(x,t) = \sum_{m=1}^N \bar{S}_m(t) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (15)$$

여기서,  $J$ 와  $N$ 은 각각 종방향과 횡방향 변위에 대한 기저함수(basis function)의 총갯수이다.

위의 weak form으로부터 운동방정식을 이산화하기 위해 Galerkin 방법을 사용하였다.

식(14)와 식(15)을 식(12)와 식(13)에 대입하여 식(12)와 식(13)의 모든 항을  $\bar{C}_i(t)$ 와  $\bar{S}_m(t)$ 에 관해

정리하여 각각의 계수로부터 다음과 같은 이산화된 방정식을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^J [m_{ij}^c \ddot{C}_j + 2Vg_{ij}^c \dot{C}_j + (EA - \rho V^2) k_{ij}^c C_j + \dot{V}g_{ij}^c C_j] = \left(1 - \frac{\rho V^2}{E}\right) f_i^c, \quad i=1,2,\dots,J \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^N \left\{ m_{mn}^s \ddot{S}_n + 2Vg_{mn}^s \dot{S}_n + \left[ EA \sum_{j=1}^J \alpha_{jmn} C_j - \rho V^2 k_{mn}^s \right] S_n + \dot{V}g_{mn}^s S_n \right\} = f_m^s, \quad m=1,2,\dots,N \quad (17)$$

여기서

$$m_{ij}^c = \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad m_{ij}^s = \frac{1}{2} \delta_{mn},$$

$$g_{ij}^c = \begin{cases} 0, & \text{for } i=j \\ \left[ 1 - (-1)^{i+j} \right] \frac{\rho j^2}{(i^2 - j^2)}, & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$g_{mn}^s = \begin{cases} 0, & \text{for } m=n \\ \left[ 1 - (-1)^{m+n} \right] \frac{\rho mn}{(m^2 - n^2)}, & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$$k_{ij}^c = \frac{i^2 \pi^2}{2L} \delta_{ij}, \quad k_{ij}^s = \frac{m^2 \pi^2}{2L} \delta_{mn},$$

$$\alpha_{jmn} = -\frac{jmn\pi^3}{L^3} \int_0^L \sin \frac{j\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x, dx$$

$$f_i^c = \left(1 - \frac{\rho V^2}{E}\right) \left[ T_L (-1)^i - T_0 \right],$$

$$f_m^s = \int_0^L p \sin \frac{m\pi}{L} x dx \quad (18)$$

$\delta_{ij}$  와  $\delta_{mn}$  은 Kroneker delta 함수이다. 식(16)과

(17)을 matrix 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{C}} + 2V\mathbf{G}_c \dot{\mathbf{C}} + \left[ (EA - \rho V^2) \mathbf{K}_c + \dot{V}\mathbf{G}_c \right] \mathbf{C} = \mathbf{F}_c \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{S}} + 2V\mathbf{G}_s \dot{\mathbf{S}} + \left[ \mathbf{K}_{sc}(\mathbf{C}) - \rho V^2 \mathbf{K}_s + \dot{V}\mathbf{G}_s \right] \mathbf{S} = \mathbf{F}_s \quad (20)$$

여기서,

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_J\}^T, \quad \mathbf{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}^T$$

$$\mathbf{K}_{sc}(\mathbf{C}) = \left[ \sum_{j=1}^J \alpha_{jmn} C_j \right] \quad (21)$$

식(19)는 선형 상미분 방정식이며, 식(20)은 비선형 상미분 방정식이다. 특히 식(21)은 종방향 변위가 횡방향 변위와 연성되어 있음을 보여주고 있다. 이것은 횡방향 진동에 종방향 진동이 영향을 주고 있음을 의미한다.

#### 4. 시간응답

이산화된 운동방정식 (19)와 (20)의 시간응답을 구하기 위하여 일반화된  $\alpha$  방법<sup>[11]</sup>을 사용하였다. 일반화된  $\alpha$  방법은 Newmark 방법이 해결하지 못한 물리적 의미가 없는 고주파 성분의 제거를 가능하게 하였고, 2 차의 정확도와 무조건적 안정성이 보장된다. 일반화된  $\alpha$  방법의 기본 알고리즘은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} \quad (22)$$

여기서,

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m \mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{v}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{v}_n,$$

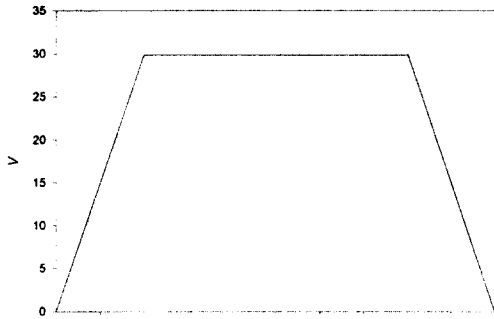
$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{d}_n,$$

$$\mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{F} \left[ (1 - \alpha_f) \mathbf{t}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{t}_n \right],$$

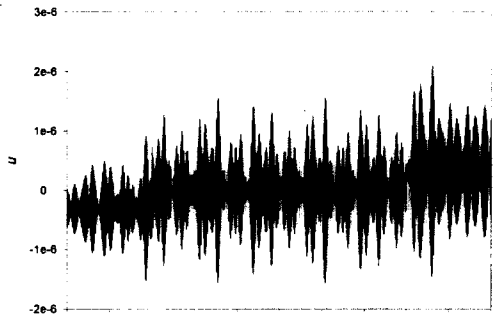
$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t_n \mathbf{v}_n + \Delta t_n^2 \left[ (1/2 - \beta) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1} \right],$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t_n \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1} \right] \quad (23)$$

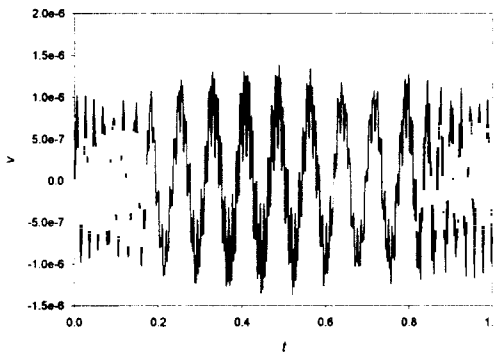
그리고  $\alpha_m, \alpha_f, \beta, \gamma$  는 알고리즘 상수이다.



(a)



(b)



(c)

Figure 2. Time histories of the deflections at  $0.5L$  for the given velocity profile  $\rho_\infty = 1$ : (a) the translating speed; (b) the longitudinal deflection; and (c) the transverse deflection.

종방향과 횡방향 변위의 시간응답은 식(19)와 (20)의 이산화된 식을 식(22)에 적용하여 계산하였다. 그리고 토오크는 식(1)로부터 가속도와 비례하므로 토오크의 종방향과 횡방향 변위에 대한

영향은 이송가속도가 현의 종방향과 횡방향 변위에 미치는 영향과 같다고 할 수 있다. 사용된 물성치는  $E = 19 \text{ Gpa}$ ,  $\rho = 0.7754 \text{ kg/m}$ ,  $L = 0.3681 \text{ m}$ ,  $A = 0.000005202 \text{ m}^2$ ,  $T_0 = 76.22 \text{ N}$ 이며, 사용된 근사함수의 수는  $J = N = 4$ 이다. Fig.2 (a)는 이송가속도가  $150 \text{ N/m}^2$ 의 증감과 이송가속도가 0 일때의 이송속도를 나타내며, Fig.2 (b,c)는 일반화된  $\alpha$  방법에서 수치적 감쇠가 없는  $\rho_\infty = 1$ 일때, 현의  $0.5L$ 에서 종방향과 횡방향의 시간응답이다. Fig 2.(b)의 그림은  $0 \leq t \leq 0.2$ 일때, 종방향 변위는 음의 평형위치에서 진동하며, 반면  $0.8 \leq t \leq 1.0$ 일때, 종방향 변위는 양의 평형위치에서 진동하는데 이것은 가속도에 의한 관성효과때문이다. 가속도가 0 일때 즉  $0.2 \leq t \leq 0.8$ 일때, 종방향 진동의 평형위치는 0인 것은 당연하다. Fig 2.(c)의 그림은 이송속도는 주기를 증가시키는 것을 보여주고 있다. 이것은 각가속도를 갖고 회전하는 디스크의 경우와 유사하다<sup>[12]</sup>.

## 5. 결 론

본 논문에서 기하학적 비선형성과 이송가속도를 고려하여 이송되는 현에 대한 종방향 및 횡방향 변위가 서로 연성된 운동 지배방정식을 유도하였다. 유도된 운동지배방정식은 종방향 진동에 대해선 선형 방정식이며, 횡방향 진동에 대해선 비선형 방정식으로 구성되어 있다. 특히 비선형 운동방정식은 종방향과 횡방향 변위가 서로 연성되어 있다. Galerkin 방법을 적용하여 이산화된 운동방정식을 얻었으며, 이를 바탕으로 일반화된  $\alpha$  방법을 사용하여 현의 시간응답을 계산하였다. 그리고 이송속도와 가속도가 종방향과 횡방향 변위에 미치는 영향을 고찰하였다.

## 후기

본 연구는 한국학술진흥재단 지원으로 수행된 연구의 일부이며, 관계자 여러분에게 감사드립니다.

## 참고문헌

1. C. D. MOTE JR. 1972 *Shock and Vibration Digest* **4**, 2–11. Dynamic stability of axially moving materials.
2. J. A. WICKERT and C. D. MOTE JR. 1988 *Shock and Vibration Digest* **20**, 3–13. Current research on the vibration and stability of axially moving materials.
3. C. D. MOTE JR. 1966 *Journal of Applied Mechanics* **33**, 463–464. On the nonlinear oscillation of an axially moving string.
4. A. L. THURMAN and C. D. MOTE JR. 1969 *Journal of Applied Mechanics* **36**, 83–91. Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving string.
5. Y. C. FUNG 1977 *A First Course in Continuum Mechanics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.
6. C. D. MOTE JR. 1975 *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control* **97**, 96–98. Stability of systems transporting accelerating axially moving materials.
7. M. PAKDEMIRLI, A. G. ULSOY and A. CERANOGLU 1994 *Journal of Sound and Vibration* **169**, 179–196. Transverse vibration of an axially accelerating string.
8. M. PAKDEMIRLI and A. G. ULSOY 1997 *Journal of Sound and Vibration* **203**, 815–832. Stability of an axially accelerating string.
9. E. OZKAYA and M. PAKDEMIRLI 2000 *Journal of Sound and Vibration* **230**, 729–742. Lie group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem.
10. D. B. MCIVER 1972 *Journal of Engineering*

*Mathematics* **7**, 249–261. Hamilton's principle for systems of changing mass.

11. J. CHUNG and G. M. HULBERT 1993 *ASME Journal of Applied Mechanics* **60**, 371–375. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method.

12. J. CHUNG, J.-E. OH and H. H. YOO 2000 *Journal of Sound and Vibration* **231**, 375–391. Non-linear vibration of a flexible spinning disc with angular acceleration.