

축방향 왕복운동을 하는 집중질량을 가진 외팔보의 동적 안정성 해석

0현 상 학*, 유 흥 회**

Dynamic Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams with a Concentrated Mass

Sang-Hak Hyun, Hong-Hee Yoo

ABSTRACT

Dynamic stability of an axially oscillating cantilever beam with a concentrated mass is investigated in this paper. The equations of motion are derived and the derived equations include harmonically oscillating parameters which originate from the motion-induced stiffness variation. Under certain conditions of the frequency and the amplitude of oscillating motion, parametric instabilities may occur. The multiple scale perturbation method is employed to obtain the stability analysis results. It is found that the system stability varies with the magnitude or the location of the concentrated mass. Instability increases as the concentrated mass approaches to the free-end or its magnitude increases.

1. 서론

보는 기계구조물에 가장 많이 등장하는 형태이므로 그의 동적 특성에 관한 연구는 아주 오래 전부터 이루어져 왔다. 비교적 최근에는 보 구조물의 동적 안정성에 관한 연구도 많이 이루어지고 있는데 종방향 맥동력이 작용하는 보 구조물의 경우는 1964년 Bolotin에 의하여 안정성 해석방법 및 결과가 제시되었으며^[1] Iwatsubo 등은^[2] 보 구조물에서의 매개변수 공진에 관한 실험과 해석 결과를 제시하였다. Kounadis 등은^[3] 집중질량을 부착한 보 구조물의 동적안정성을 해석하였다. 좀 더 최근에는 강제운동을 하는 보 구조물에 대한 연구가 등장하기 시작했는데 Beal 등은 Quick Return Mechanism에서 유연한 링크에 관하여^[4], Tan 등은 회전운동하는 외팔보에서 지지단이 왕복하는 경우에 관하여^[5], Kim 등은 맥동력을 받아 움직이는 보 구조물에 관하여^[6] 안정성 해석을 하였다.

축 방향으로 왕복운동을 하는 대표적인 외팔보 구조물로는 재봉기의 바늘이 있다. 이러한 구조물에서 미세한 굽힘진동이 발생하면, 어떤 특정조건일 때 굽힘진동의 진폭은 점점 커지는 불안정 현상이 발생한다. 예를 들어서 왕복운동의 진동수가 굽힘방향 고유진동수의 2배인 경우에 불안정성이 발생하며 이를 매개변수 공진이라 부른다. 매개변수 공진은 시스템의 가진진동수와 고유진동수가 일치하여 발생하는 통상적 공진과는 다른 현상으로서, 보에서는 축방향 왕복운동 시에나 맥동력이 작용하는 경우에 발생한다. 따라서 보 구조물의 설계 시 매개변수 공진 발생의 유무를 판정하는 동적 안정성 해석은 중요하게 고려되어야 한다.

외팔보의 지지단이 왕복 운동을 하면 그 횡방향 굽힘강성은 운동방향에 따라 변화하는 값을 갖게 된다. 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속될 때는 강성이 감소하고 반대방향으로 가속되면 강성이 증가하는, 굽힘강성이 연속적으로 변화하는 현상이 발생하게 된다. 이러한 굽힘강성의 변화는 외팔보의 운동방정식에서 강제운동과 굽힘변위가

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계공학부

굽혀진 강성항으로 나타나게 된다. 즉 왕복운동이 시스템의 매개변수가 되어 왕복운동의 크기 또는 진동수에 따라 시스템의 동 특성이 변화하게 된다. 또한 집중질량이 부착된 경우라면 시스템의 고유진동특성에 영향을 미치게 된다.

축방향 왕복운동이 외팔보의 동적안정성에 미치는 영향은 최근 그 해석결과가 제시되었다 (참고 문헌 [7] 참조). 이 연구에서는 축방향 왕복운동 외팔보의 동적 모델링을 Kane 등이 제시한 복합 변형변수법을 사용하여 제시하였고^[8,9], 안정성해석은 다중시간척도법을^[10,11] 이용하였다.

본 논문에서는 집중질량을 갖는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보 구조물에 대한 운동방정식을 유도하고, 집중질량의 효과가 운동방정식 상에 어떻게 나타나는지를 규명하고 유도된 식으로부터 집중질량이 외팔보의 동적안정성에 미치는 영향에 관해 수치해석을 통해 밝히고자 한다.

2. 운동 방정식

본 연구에서는 2차원 평면 운동을 하는 보를 해석 대상으로 정하였다. 그림 1은 길이 L 인 외팔보가 강체 A 에 고정되어 왕복운동하는 모습을 보여준다. 여기서 Ω 와 a_0 는 진동수와 진폭을 나타낸다. 외팔보상 임의의 질점의 변형에 의한 위치변화를 변형벡터 \vec{u} 로 나타낸다(변형전 P_0 , 변형후 P). s 는 임의의 질점의 위치에서 보가 인장된 길이를 나타낸다. M 은 집중질량의 크기를 나타내며, x_M 은 집중질량의 부착된 위치를 나타낸다.

본 논문에서는 식 (1)의 Kane 방법을 사용하여 운동방정식을 유도한다(참고문헌 [12] 참조).

$$F_r^* + F_r = 0 \quad (r=1,2,\dots,\mu) \quad (1)$$

여기서 F_r^* 와 F_r 는 각각 일반관성력과 일반작용력을 나타낸다. μ 는 일반좌표의 개수를 의미한다. 집중질량을 가진 보의 일반관성력은 식(2)로부터 의해 구해진다.

$$F_r^* = - \int_0^L \{m + M\delta(x-x_M)\} \vec{a}^P \cdot \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_r} dx \quad (r=1,2,\dots,\mu) \quad (2)$$

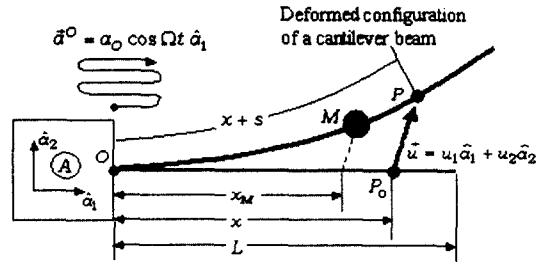


Figure 1. Configuration of a axially oscillating cantilever beam with a concentrated mass.

여기서 \vec{v}^P 와 \vec{a}^P 는 임의점 P 의 속도와 가속도를 나타내고, \dot{q}_r 은 일반속력을 나타낸다. m 은 외팔보의 단위길이 당 질량을 나타낸다. $\delta(x-x_0)$ 는 집중질량 효과를 나타내기 위해 사용한 충격함수이다. 외력이 없는 보의 경우는 일반작용력을 식 (3)으로부터 간단히 구할 수 있다.

$$F_r = - \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1,2,\dots,\mu) \quad (3)$$

여기서 U 는 탄성에너지를 나타낸다.

우선 왕복운동하는 외팔보의 일반관성력에 필요한 P 점의 속도와 가속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}^P = (v_0 \sin \Omega t + \dot{u}_1) \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (4)$$

$$\vec{a}^P = (a_0 \cos \Omega t + \ddot{u}_1) \hat{a}_1 + \ddot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (5)$$

여기서 $v_0 = -a_0/\Omega$ 이다. 보의 탄성에너지 U 는 보의 인장과 굽힘효과만을 고려한다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] \quad (6)$$

여기서 E 는 영의 계수 A 는 단면적, I 는 2차면적 모멘트를 나타낸다. 다음은 Kane 등이 사용한 강체운동을 하는 보에 대한 모델링에서 중요한 과정으로서, s 와 u_2 를 아래와 같이 가상모드법을 이용하여 근사화하는 과정이다(참고문헌 [8] 참조).

$$s = \sum_{j=1}^n \phi_{1j}(x) q_j(t) \quad (7)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^n \phi_{2j}(x) q_j(t) \quad (8)$$

여기서 $\phi_{1j}(x)$ 와 $\phi_{2j}(x)$ 는 보의 인장방향과 굽힘 방향 모드함수들을 나타내며 $q_j(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들이다. 그런데 식들 (4, 5)에서 속도와 가속도는 u_1 와 u_2 로 표현되어 있기 때문에 아래의 기하학적 관계식이 필요하게 된다.

$$u_1 = s - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \quad (9)$$

그리고

$$\dot{u}_1 = s - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)을 식 (4)에 대입한 후, 일반속력 \dot{q}_i 에 대한 미분값을 (편속도) 일반좌표의 1차항까지만 고려하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \dot{v}^P}{\partial q_i} = (\phi_{1i} - \phi_{1i}^*) \vec{a}_1 + \phi_{2i} \vec{a}_2 \quad (11)$$

여기서

$$\phi_{1i}^* = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^x \phi_{2j} \phi_{2j,\sigma} d\sigma \right) q_j \quad (12)$$

따라서 식들(5,6,11)을 식들 (1,2,3)에 대입하고 일반좌표에 대한 비선형항들을 무시하여 선형운동방정식을 얻는다. 또한 다음과 같은 무차원 변수들을 이용하여 무차원 운동방정식이 유도된다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \vartheta_i = \frac{q_i}{L} \quad (13-15),$$

여기서 $T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}}$ 이다. 최종적으로 무차원 굽힘 방향 운동방정식을 식 (16)과 같이 표현할 수 있다. 인장방향은 굽힘방향과 비연성되고 또한 매개변수 가진항이 나타나지 않기 때문에 안정성 해석에서는 제외한다.

$$\sum_{j=1}^n \left[M_{ij}^{22} \ddot{\vartheta}_j + (\overline{K}_{ij}^B - 2\epsilon \cos \omega \tau \overline{K}_{ij}^G) \vartheta_j \right] = 0 \quad (16)$$

여기서 $\ddot{\vartheta}_j$ 는 무차원 시간 τ 에 대해 두 번 미분한

값을 나타내며, $\omega = T\Omega$ 이고 $2\epsilon = a_0 T^2/L$ 이다. 위 식에 나타난 행렬들은 다음과 같다.

$$\overline{M}_{ij}^{22} = \int_0^1 \psi_{i,\xi}(\xi) \psi_{j,\xi}(\xi) d\xi + \beta \psi_{i,\xi_M}(\xi_M) \psi_{j,\xi_M}(\xi_M) \quad (17)$$

$$\overline{K}_{ij}^B = \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi \quad (18)$$

$$\overline{K}_{ij}^G = \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi + \beta \int_0^{\xi_M} \psi_{i,\xi} \psi_{j,\xi} d\xi \quad (19)$$

여기서 $\beta = mL/M$ 이고 $\xi_M = x/L$ 이다. $\psi_{i,\xi}(\xi)$ 는 $\phi_{2i}(x)$ 와 동일 값을 갖는 함수로 외팔보의 굽힘진동 고유모드함수들이 흔히 사용된다. 이 경우 집중 질량이 없으면 ($\beta=0$) \overline{M}_{ij}^{22} 은 단위행렬이 된다.

3. 안정성 해석 모델과 수치해석

식 (16)에 대한 동적안정성을 다중시간척도법 (Multiple time scales method)을 사용하여 해석하기 위해, \overline{M}_{ij}^{22} 와 \overline{K}_{ij}^{22} 를 각각 단위행렬과 대각행렬 꼴로 전환한다. 이를 위해 다음과 같은 성질을 갖는 전환행렬 $[U_{ij}]$ 를 이용한다.

$$[I] = [U_{ij}]^T [\overline{M}_{ij}^{22}] [U_{ij}] \quad (20)$$

$$[\omega_{(i)}^2] = [U_{ij}]^T [\overline{K}_{ij}^B] [U_{ij}] \quad (21)$$

식 (16)에 전환식 $\{\vartheta\} = [U_{ij}]\{\eta_j\}$ 를 대입한 후, $[U_{ij}]^T$ 를 곱한 결과는 다음 식처럼 표현된다.

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i - 2\epsilon \cos \omega \tau \sum_{j=1}^n F_{ij} \eta_j = 0 \quad (22)$$

여기서

$$[F_{ij}] = [U_{ij}]^T [\overline{K}_{ij}^G] [U_{ij}] \quad (23)$$

식 (22)의 ω_i 는 매개변수 가진이 없을 때 ($\epsilon=0$), 집중질량의 영향으로 변화된 보의 (i)번째 굽힘방향 고유진동수를 나타낸다.

식 (22)에 대한 다중시간척도법을 적용하여 해석하는 상세한 과정은 참고문헌 [5]에 잘 나와있으므로 본 논문에서는 간단히 소개한다. 이 방법은 섭

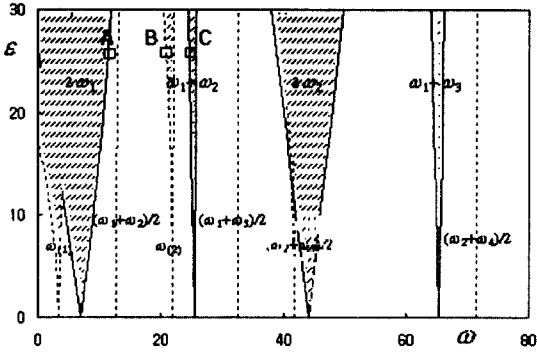


Figure 2. Dynamic stability of axially oscillating cantilever beams with no concentrated mass.

동법의 일종으로 식(22)의 근사적인 일반해를 해석적으로 구할 수 있다. 따라서 일반해의 발산 여부를 쉽게 판정할 수 있다. 보통 매개변수 안정성 해석에서는 해가 발산할 때 불안정하다고 하며, 해석 결과로서 그림 2와 같은 매개변수 평면에 안정 영역과 불안정 영역을 구분하는 전이곡선들을 얻는다. 전이곡선들은 다음 식들로부터 구해진다.

(a) $\omega \approx \omega_p + \omega_q$ 경우 (그림 2에서 실선)

$$\omega = \omega_p + \omega_q \pm \varepsilon \sqrt{\Lambda_{pq}} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{\Lambda_{pq}}{8} \left(\frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_q} \right) - \hat{x}_p - \hat{x}_q \right\} \quad (24)$$

(b) $\omega \approx \frac{\omega_k + \omega_l}{2}$ 경우 (그림 2에서 점선)

$$\omega = \frac{\omega_l + \omega_k}{2} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{\chi_p + \chi_q}{2} \pm \sqrt{\mu_{kl}\mu_{lk}} \right\} \quad (25)$$

여기서

$$\chi_p = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\mu} \left[\frac{\omega_r \Lambda_{pq}}{(\omega_p + \omega)^2 - \omega_r^2} + \frac{\omega_r \Lambda_{pq}}{(\omega_p - \omega)^2 - \omega_r^2} \right] \quad (26)$$

$$\mu_{kl} = \frac{1}{2\omega_k} \sum_{r=1}^{\mu} \frac{F_{kr} F_{rl}}{(\omega_l - \omega)^2 - \omega_r^2} \quad (27)$$

여기서

$$\Lambda_{pq} = \frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q} \quad (p, q, k, l = 1, 2, \dots, \mu) \quad (28)$$

식 (24)에서 \hat{x}_p 는 식 (26)의 두 번째항에서 $r = q$, 와 \hat{x}_q 는 $r = p$ 인 경우를 각각 제외하여 구한다.

그림 2는 집중질량이 없을 때의 해석결과로써

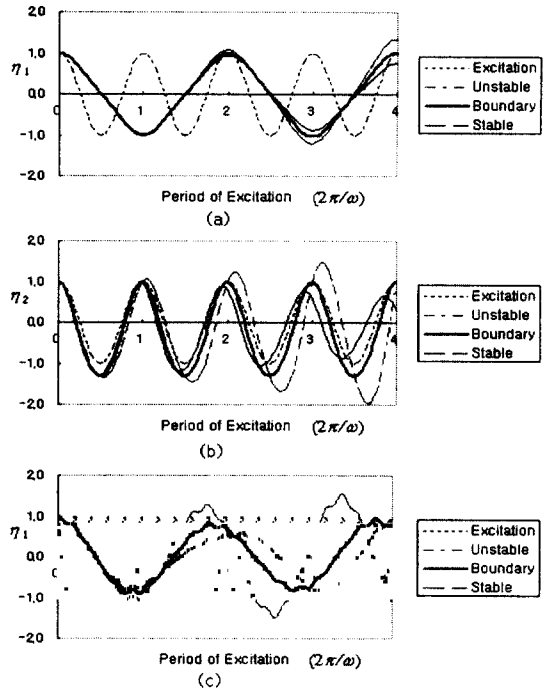


Figure 3. Dynamic responses at the vicinity of points on the transition curves in Figure 2

(a) A point (b) B point (c) C point.

여러 형태의 V자형 전이곡선들을 보여준다. 빗금 친 영역이 불안정 영역을 나타내는데 $\omega_1, 2\omega_1$ 그리고 $2\omega_2$ 인 경우가 다른 경우에 비해 폭이 크다. 그림 2에 나타난 결과들의 신뢰성 검증하기 위해 직접 시간적분하는 수치적 방법을 이용하였다. 그림 3은 그림 2의 A, B, C점의 근처에서 직접 시간적분한 동적반응 결과들이다. 여기서 점선은 축방향 왕복운동을 나타낸다. 각각의 전이곡선 근처에서 안정, 경계, 불안정 동적반응을 보임으로써 전이곡선의 신뢰성을 확인할 수 있다. 그림 3.(a)에서는 불안정 동적반응이 왕복운동 주기의 2배임을 보이고(주 매개변수 공진), 그림 3.(b)에서는 왕복운동 주기가 동일함을 보인다. 반면에 그림 3.(c)에서는 왕복운동 주기와 아무런 관계가 없는 불안정 동적반응이 나타나고 있다(복합 매개변수 공진).

그림 4-7은 집중질량의 크기와 위치에 따른 불안정 해석결과들이다. 우선 집중질량의 위치가 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 일 때 각 경우에서 집중질량의 크기

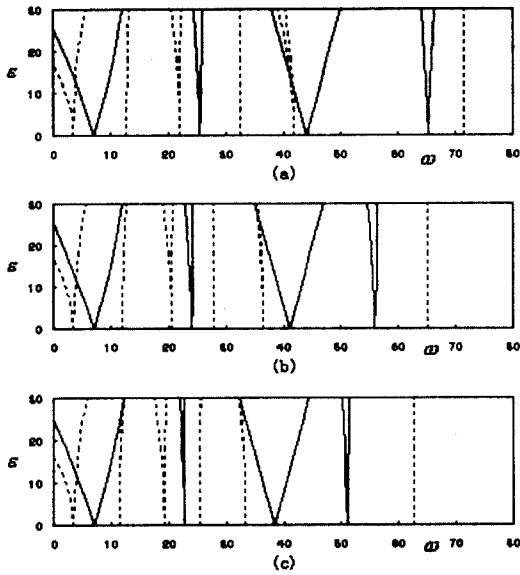


Figure 4. Dynamic stability diagrams with the variation of the magnitude of a concentrated mass at $\xi_M = 0.25$

(a) $\beta = 0.0$, (b) $\beta = 0.2$, (c) $\beta = 0.4$.

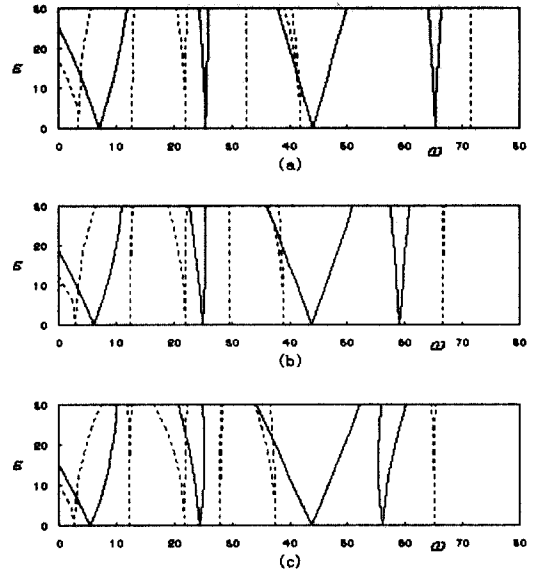


Figure 6. Dynamic stability diagrams with the variation of the magnitude of a concentrated mass at $\xi_M = 0.75$

(a) $\beta = 0.0$, (b) $\beta = 0.2$, (c) $\beta = 0.4$.

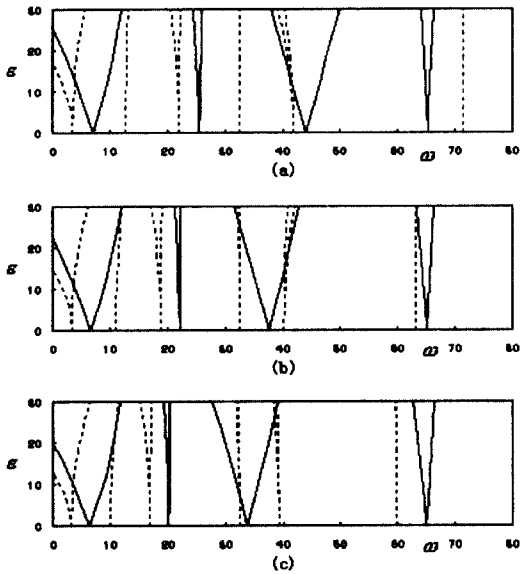


Figure 5. Dynamic stability diagrams with the variation of the magnitude of a concentrated mass at $\xi_M = 0.50$

(a) $\beta = 0.0$, (b) $\beta = 0.2$, (c) $\beta = 0.4$.

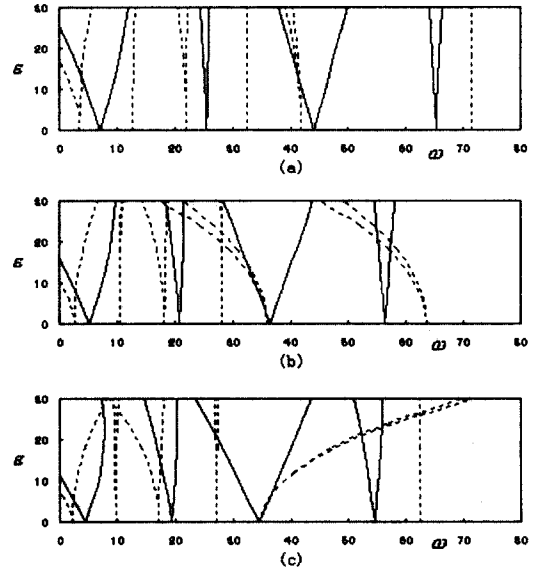


Figure 7. Dynamic stability diagrams with the variation of the magnitude of a concentrated mass at $\xi_M = 1.0$

(a) $\beta = 0.0$, (b) $\beta = 0.2$, (c) $\beta = 0.4$.

가 0.0, 0.2, 0.4에 대한 해석결과를 도시하였다. 모든 그림에서 집중질량의 크기가 커질수록 불안정 영역이 넓어지고, 또한 불안정영역 시작점이 보통 왼쪽으로 옮겨가고 있음을 볼 수 있다. 이러한 결과로부터 집중질량의 크기와 매개변수 가진의 크기와 비례적인 관계가 있음을 알 수 있으며, 집중질량으로 인한 관성의 증가로 고유진동수가 작아지게 됨을 알 수 있다. 한편 그림 4-7을 비교하여 보면 집중질량의 부착 위치 또한 안정성에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 집중질량이 자유단에 가깝게 부착될수록 불안정영역이 점점 커지고 끝단 집중질량일 때 가장 넓은 불안정영역이 나타난다. 그림 6에서 $2\omega_2$ 근처의 불안정영역은 다른 불안정영역들과는 달리 집중질량의 크기가 커지더라도 불안정영역의 나타나는 위치의 변화가 거의 없다. 이는 집중질량이 두 번째 진동모드의 절점에 가까이 부착되어 있어 집중질량에 따른 그 고유진동수의 변화가 없기 때문에 불안정영역의 시작 위치는 변화가 없다. 그렇지만 불안정영역의 폭은 진동모드의 절점과는 관계가 없기 때문에 집중질량이 크기가 커질수록 불안정영역의 폭은 넓어진다.

5. 결론

본 논문에서는 집중질량을 가진 외팔보형 구조물이 축방향 왕복운동을 할 때 발생하는 동적 불안정성에 관해 연구가 수행되었다. 축방향 왕복 조화운동에 따른 운동방정식 상의 강성변화와 집중질량의 영향이 규명되었으며 이를 근거로 다중시간척도법을 이용하여 해석이 수행되었다. 이 해석 결과 $\omega = \omega_1$, $\omega = 2\omega_1$, 그리고 $\omega = 2\omega_2$ 근처에서 큰 폭의 불안정 영역을 갖는 것을 알 수 있었으며, 그 외의 영역에서는 상당히 작은 폭의 불안정 영역들만을 갖는 것을 알 수 있었다. 또한 집중질량의 크기가 커질수록, 위치가 자유단에 가까울수록 불안정 영역은 확대된다는 것을 확인하였다. 집중질량이 부착되더라도 $\omega = \omega_1$, $\omega = 2\omega_1$, 그리고 $\omega = 2\omega_2$ 근처에서 여전히 큰 폭의 불안정 영역이 나타나고 그 외 매우 작은 폭의 불안정 영역들도 커짐을 확인하였다. 그리고 굽힘 고유진동수의 변화로 인해 불안정 영역의 위치가 변하고 있음을 확인하였다.

[참고문헌]

- [1] V. Bolotin, 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems San Francisco: Holden-Day.*
- [2] T. Iwatsubo, M. Saigo, and Y. Sugiyama, 1973, "Parametric Instability of Clamped-Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," *Journal of Sound and Vibration*, 30, pp.65-77.
- [3] A. N. Kounadis, S. Belbas, 1977, "On the Parametric Resonance of Columns Carrying Concentrated Masses," *J. Struct. Mech.* 5(4), 383-394.
- [4] D. BEAL and R. SCOTT, 1990, "The Stability and Response of a Flexible Rod in a Quick Return Mechanism," *Journal of Sound and Vibration*, 141, pp. 227-289.
- [5] T.H. Tan, H.P. Lee, and G.S.B. Leng, 1997, "Dynamic Stability of a Radially rotating beam subject to base excitation," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 146, pp. 265-279.
- [6] J. H. Kim and Y. S. Choo, 1998, "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, 216(4), pp. 623-636.
- [7] S.H. Hyun and H. H. Yoo, 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of axially oscillating cantilever beams," *Journal of Sound and Vibration*, 228(3), pp.543-558.
- [8] T. Kane, R. Ryan, and A. Banerjee, 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139-151.
- [9] H. Yoo, R. Ryan, and R. Scott, 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp.261-278.
- [10] Nayfeh, A. and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," *J. Acoust. Soc. Am.*, 62, pp.375-381.
- [11] Nayfeh, A. and Mook, D., 1979, *Nonlinear Oscillation*, John Wiley & Sons, Inc.
- [12] T. Kane, and D. Levinsohn, 1985, *Dynamics, Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co.