

탄성지반 위에 놓인 축하중을 받는 Timoshenko보의 자유진동

이 태 은* · 이 재 만** · 이 종 국* · 이 병 구*

Free Vibrations of Axially Loaded Timoshenko Beams resting on Elastic Foundation

Tae Eun Lee, Jae Man Lee, Jong Kook Lee, Byoung Koo Lee

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to present both the fundamental and some higher natural frequencies of axially loaded Timoshenko beams resting on the elastic foundation. The non-dimensional differential equation governing the free vibrations of such beam is derived in which the effects of rotatory inertia and shear deformation are included. The Improved Euler method and Determinant Search method are used to perform the integration of the differential equation and to determine the natural frequencies, respectively. The hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are applied in numerical examples. The relations between frequency parameters and both the foundation parameter and slenderness ratio are presented in figures. The effect of cross-sectional shapes is also investigated.

1. 서 론

보는 구조공학분야에서 가장 기본이 되는 단위구조 중의 하나이며 평판 등과 함께 지반 위에서 구조물을 직접 지지하거나 지중구조물과의 연결을 위한 부재로 이용되고 있어 지반 위에 놓인 보의 거동해석은 구조 및 기초공학분야 등에서 관심의 대상이 되고 있다.

보의 해석이론은 크게 나누어 회전관성과 전단변형의 영향을 무시한 Bernoulli-Euler보 이론과 이를 고려한 Timoshenko보 이론으로 대별된다. 일반적으로 진동해석시 Bernoulli-Euler보 이론은 세장비가 큰 보나 저차 모드의 해석에는 적합하지만 세장비가 매우 작은 보나 고차 모드까지 해석이 요구되는 경우에는

Timoshenko보 이론의 채택이 요구된다.

일반적으로 공학에서 지반 위에 놓은 구조물은 지반을 Winkler모델로 정의함으로써 해석된다⁽¹⁾. 탄성지반 위에 놓인 보의 정적, 동적 거동에 대한 연구는 많은 문헌들⁽²⁻¹⁰⁾에 발표되고 있으며 본 연구와 관련된 문헌을 고찰하면 다음과 같다.

1978년 Abbas등⁽⁴⁾은 탄성지반위에 놓인 Timoshenko보의 동적 안정성에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 에너지 이론을 이용하여 Timoshenko보의 안정성 해석을 위한 유한요소모델을 개발하였으며, 회전-회전 및 고정-자유의 단부조건을 적용하여 자유진동특성 등을 고찰하였다. 1986년 Yankelevsky 등⁽⁵⁾은 탄성지반 위에 놓인 보의 정적해석에 관한 논문을 발표하였다.

1987년 Shastry 등⁽⁶⁾은 탄성지반 위에 놓인 캔틸레버 보의 동적 안정성에 관한 논문을 발표하였다. 이

* 원광대학교 토목환경공학과

** (주)신진종합토건

논문에서는 유한요소법을 이용하여 지반계수의 변화에 따른 캔틸레버 보의 동적 안정영역을 결정하였다. 1987년 Matsuda 등⁽⁷⁾은 비균질지반 위에 놓인 보의 해석에 대한 논문을 발표하였다.

1988년 Valsankar 등⁽⁸⁾은 부분 매립된 축하중을 받는 보의 자유진동에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 Bernoulli-Euler보 이론을 이용하여 구간별 지배미분방정식을 유도하였으며 다양한 지반조건에 대한 해석결과를 고찰하였다. 1988년 Yokoyama⁽⁹⁾는 탄성지반 위에 놓인 Timoshenko보의 동적 안정성에 관한 연구를 수행하였다.

본 연구는 자유진동시 보 미소요소에 작용하는 합용력과 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 탄성지반 위에 놓인 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 해석함으로써 자유진동 특성을 규명하는 데 연구목적이 있다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 지반탄성계수가 α 인 탄성지반 위에 놓인 축하중 P 를 받는 보의 진동모드를 나타낸 것이다. 보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면, 보에 발생하는 변위 v , ψ , 합용력 Q , M 및 관성력 T , F 의 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.⁽¹¹⁾

$$v(x, t) = v_x \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$\psi(x, t) = \psi_x \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$Q(x, t) = Q_x \sin(\omega t) \quad (3)$$

$$M(x, t) = M_x \sin(\omega t) \quad (4)$$

$$F(x, t) = F_x \sin(\omega t) \quad (5)$$

$$T(x, t) = T_x \sin(\omega t) \quad (6)$$

(1)-(6)식에서 v_x , ψ_x , Q_x , F_x , T_x 는 조화진동의 진폭이며, ω 는 고유진동수, t 는 시간이다.

(2)식에서 ψ 는 보단면의 회전각으로 전단변형 β 을 고려하는 경우에 다음 식과 같이 표시되며, 이후 조화진동의 진폭은 (7)식과 같이 아래 첨자 x 를 생략하여 표시한다.

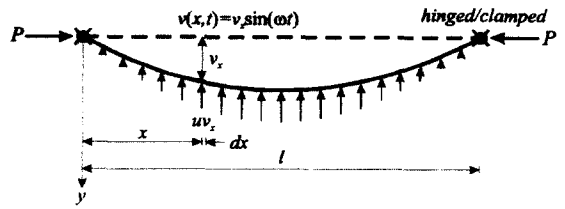


Fig. 1. Mode shape of beam on elastic foundation

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \quad (7)$$

(4), (5), (6)식의 휨모멘트, 관성력, 회전관성력을 변위 향으로 표시하면 다음과 같다.⁽¹²⁾

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

$$F = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$T = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (10)$$

(8)-(10)식에서 E , ρ 는 각각 보 재료의 탄성계수 및 단위체적당 질량이며, A 와 I 는 각각 단면적 및 단면2차모멘트이다.

(3)식의 전단력 Q 를 전단변형 β 의 향으로 표시하면 다음과 같다.

$$Q = \alpha A G \beta \quad (11)$$

(11)식을 β 에 대하여 정리하고 이를 (7)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{Q}{\alpha A G} \quad (12)$$

(12)식을 (8), (10)식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$M = EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha A G} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$T = \rho I \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{\alpha A G} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) \quad (14)$$

Fig. 2는 탄성지반 위에 놓인 보가 자유진동할 때 보 미소요소에 작용하는 합용력과 관성력을 나타낸 것이다. 그림에서 보 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + F + uv = 0 \quad (15)$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} + T - P \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

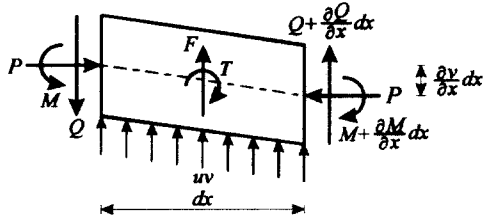


Fig. 2. Loading on beam element

(13)식에서 $\partial M/\partial x$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = EI \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{aAG} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

(14), (17)식을 (16)식에 대입하고 전단력 Q 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$Q = EI \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{aAG} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) - \rho I \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^4} + \frac{1}{aAG} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) \quad (18)$$

(18)식으로부터 $\partial Q/\partial x$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} = & EI \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{aAG} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right) \\ & - \rho I \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{aAG} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t^2} \right) \\ & + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (19)$$

(9)식을 (15)식에 대입하고 $\partial Q/\partial x$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - uv \quad (20)$$

(20)식으로부터 $\partial^3 Q/\partial x^3$, $\partial^3 Q/\partial x \partial t^2$ 를 구하여 (20)식과 함께 (19)식에 대입하고 정리하면 다음 (21)식과 같이 탄성지반 위에 놓인 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - R \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - S \frac{EI}{aAG} \\ & \times \left(\rho A \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + RS \frac{\rho I}{aAG} \\ & \times \left(\rho A \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

(21)식에서 R 과 S 는 각각 회전관성과 전단변형의 고려여부를 나타내는 지표로서 그 내용은 다음과 같다.

$$R = 0 : \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (22.1)$$

$$R = 1 : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (22.2)$$

$$S = 0 : \text{전단변형을 무시하는 경우} \quad (23.1)$$

$$S = 1 : \text{전단변형을 고려하는 경우} \quad (23.2)$$

(21)식에서 회전관성과 전단변형을 무시하는 경우 즉, $R=S=0$ 인 경우 (21)식은 탄성지반 위에 놓은 Bernoulli-Euler보의 자유진동을 지배하는 미분방정식으로 변환되며, 탄성지반의 영향을 고려하지 않는 경우 즉 $u=0$ 인 경우에는 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 미분방정식으로 변환됨을 알 수 있다.

상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l \quad (24)$$

$$\eta = v_x/l \quad (25)$$

$$\lambda = l/(I/A)^{1/2} \quad (26)$$

$$\Gamma = E/(aG) \quad (27)$$

$$\varepsilon = ul^4/(\pi^4 EI) \quad (28)$$

$$p = Pl^2/(\pi^2 EI) \quad (29)$$

$$c_i = \omega_i l^2 (\rho A/EI)^{1/2}, \quad i=1,2,3,4,\dots \quad (30)$$

(1)식으로부터 $\partial^2 v / \partial x^2$, $\partial^4 v / \partial x^4$, $\partial^2 v / \partial t^2$, $\partial^4 v / \partial t^4$, $\partial^4 v / \partial^2 x \partial t^2$ 를 구하여 (21)식에 대입하고 (24)-(30)식의 무차원변수들을 이용하여 정리하면 다음 (31)식과 같은 탄성지반 위에 놓인 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 유도된다.

$$\eta'''' = \{S\Gamma\lambda^{-2}(\pi^4 \varepsilon - c_i^2) - R\lambda^{-2}c_i^2 - \pi^2 p\}\eta'' + \{c_i^2 - \pi^4 \varepsilon + R S \Gamma \lambda^{-4} c_i^2 (\pi^4 \varepsilon - c_i^2)\}\eta \quad (31)$$

이상에서 (31)식은 탄성지반위에 놓인 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며, 본 연구에서 채택하고자 하는 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다.

먼저 회전단인 경우 보의 좌단($x=0$) 또는 우단($x=l$)에서 $v=M=0$ 이므로 (13), (20), (24)-(30)식을 이용하면 다음과 같이 경계조건이 유도된다.

$$\eta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (32)$$

$$\eta''=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (33)$$

다음으로 고정단인 경우 보의 좌단($x=0$) 또는 우단($x=l$)에서 $v=\psi=0$ 이므로 (12), (18), (24)-(30)식을 이용하면 다음과 같은 경계조건이 유도된다.

$$\eta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (34)$$

$$\eta' + \frac{S\Gamma\lambda^{-2}}{\{1 + S\Gamma^2\lambda^{-4}(c_i^2 - \pi^4\varepsilon)\}} \eta'' = 0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{ 에서} \quad (35)$$

3. 수치해석방법 및 검증

상미분방정식 (31)식의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다. (31)식의 상미분방정식을 수치적분하기 위해서는 먼저 4개의 1계 미분방정식으로 변환하여 초기치 문제(initial value problem)로 형성한다. 초기치 문제를 풀기 위해서는 좌단($\xi=0$)에서의 4개의 초기치 ($\eta, \eta', \eta'', \eta'''$)가 필요하지만 전절에서 유도된 바와 같이

각 단부조건별로 2개의 경계조건만을 알고 있기 때문에 나머지 2개의 초기조건을 2쌍 가정하여 좌단으로부터 우단까지 각각 초기조건별로 2회 수치적분한다.

수치적분을 시행하기 전에 먼저 미분방정식에 포함된 불확정량 c_i 값을 가정하여야 하며, 가정된 c_i 값이 자유진동의 고유치인지는 미분방정식의 수치적분 결과로 얻는 우단($\xi=1$)의 경계조건이 실제의 경계조건을 만족하는지의 여부로 판단한다. 계산된 우단의 결과들은 앞에서 설명한 바와 같이 가정된 초기조건으로부터 얻어진 결과이므로 2회의 수치적분 결과로 얻어진 2개의 경계조건에 해당되는 값들을 1차결합(linear combination)을 이용하여 행렬값으로 나타낸다⁽¹⁴⁾. 가정된 c_i 값이 자유진동의 고유치이면 이 행렬값은 "0"이 되어야 한다. 그러나 c_i 값은 가정된 값이므로 행렬값 D 가 "0"이 되는 정확한 값을 찾을 수 없으며, c_i 값을 가정하여 위의 과정을 반복시행하는 과정에서 행렬값 D 가 "0"이 되는 정확한 값을 찾을 수 없으며, c_i 값을 가정하여 위의 과정을 반복시행하는 과정에서 행렬값 D 의 부호가 변화하는 구간에서 적당한 수치해석법을 이용하여 찾을 수 있다.

본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 비교적 알고리즘이 간단하면서도 정도가 높아 공학문제에 많이 이용되는 Improved Euler method를 이용하였으며, 행렬값 D 의 부호가 변화하는 구간에서 고유치 c_i 를 찾기 위해서는 Regular-Falsi method를 이용하였다⁽¹⁵⁾.

실제의 수치적용 예에서 보의 단부조건은 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 3가지 단부조건에 대하여 제4 모드까지 계산하였다.

Table 1은 본 연구의 해석결과를 검증하기 위하여 문헌 [4, 9]의 해석결과와 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 두 결과는 아주 우수하게 접근하고 있어 본 연구에서 유도한 미분방정식, 경계조건 및 수치해석방법의 타당성을 입증할 수 있다. 표 1에서 H는 회전지점이며, 이 표에는 나타나지 않았지만 C는 고정지점을 의미하며 이후 동일한 의미를 갖는다.

4. 수치해석 예 및 고찰

Table 2는 회전관성(R)과 전단변형(S)이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표에서 알 수 있듯이 R 과 S 는 무차원 고유진동수 c_i 를 감소

시키는 요인이며, $i=4$ 이고 R 과 S 를 동시에 고려하는 경우에 10%이상의 감소율을 보이고 있어서 고차 모드에서는 반드시 R, S 를 고려하는 것이 바람직하다.

Table 1. Comparison of c_i between this study and Ref. [4, 9] ($\Gamma=3.06, \lambda=12.5, R=S=1$)

end constraint and ϵ	data source	frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
H - H $\epsilon=2$	This study	16.26	31.44	53.19	76.55
	Ref.[4]	16.26	31.49	53.49	77.83
	Ref.[9]	16.26	31.50	53.58	77.81
H - H $\epsilon=4$	This study	21.22	34.15	54.83	77.70
	Ref.[4]	21.24	34.20	55.02	77.92
	Ref.[9]	-	-	-	-

Table 2. Effects of rotatory inertia (R) and shear deformation (S) ($\lambda=50, \Gamma=2.5, \epsilon=2, p=1$)

end constraint	R	S	frequency parameter, c_i				reduction (%)
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	
H - H	0	0	13.96	36.93	84.90	153.54	-
	1	0	13.93	36.64	83.43	148.90	3.02
	1	1	13.93	36.06	80.25	139.47	9.16
C - H	0	0	17.83	47.62	100.67	174.21	-
	1	0	17.79	47.22	98.83	168.73	3.14
	1	1	17.69	45.80	93.20	154.36	11.39
H - C	0	0	23.94	59.52	117.63	196.08	-
	1	0	23.88	58.98	115.36	189.67	3.27
	1	1	23.53	58.24	106.50	169.28	13.67

* $[(R=1, S=1) - (R=0, S=0)] / [(R=0, S=0)] \times 100$ for $i=4$

Fig. 3은 세장비 λ 가 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 $R=S=1, \Gamma=2.5, \epsilon=2, p=1$ 인 조건을 갖는 회전-회전보에 대하여 수치해석한 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 다른 조건이 동일한 경우 세장비가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있으며 저차 모드보다는 고차 모드인 경우 그 증가율이 더 큼을 알 수 있다. 그러나 일정 값 이상의 세장비에 대해서는 그 증가량이 미소함을 알 수 있다. 이는 서론에서 언급한 바 있는 Bernoulli-Euler보 이론과 Timoshenko보 이론의 적용성으로도 설명되어진다. 다시 말해서 Fig. 3에서 □표로 표시된 값은 Bernoulli-Euler보 이론에 의한 즉 본 연구에서

유도한 상미분방정식에 $R=S=0$ 을 대입하여 해석한 결과로 설명된다. 그림에서 알 수 있듯이 세장비 λ 가 증가함에 따라서 Timoshenko보 이론을 적용한 결과는 Bernoulli-Euler보 이론에 의한 결과에 수렴해 가는 것을 알 수 있다. 이러한 결과들로부터 장지간의 세장한 보나 저차 모드의 해석에는 Bernoulli-Euler보 이론의 적용이 타당하나 세장비가 작은 보나 고차 모드 해석이 필요한 경우에는 회전관성과 전단변형이 고려된 Timoshenko보 이론의 적용이 필수적임을 알 수 있다.

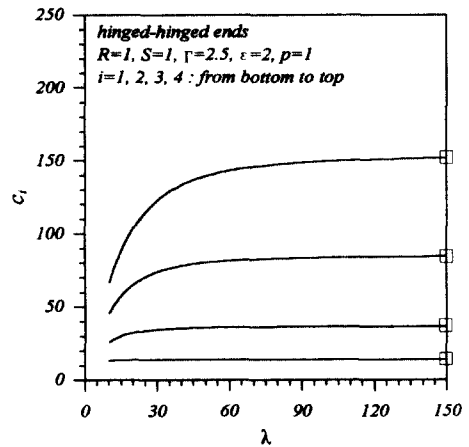


Fig. 3. c_i vs λ curves (hinged-hinged)

Fig. 4는 무차원 지반계수 ϵ 이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 $R=S=1, \lambda=50, \Gamma=2.5, p=1$ 인 조건을 갖는 회전-고정보에 대하여 해석한 결과이다. 이 그림에서 지반계수는 고유진동수를 증가시키는 요인임을 알 수 있으며, 저차 모드에서 그 증가율이 더 크고 고차 모드로 갈수록 지반계수가 고유진동수에 미치는 영향은 미소함을 알 수 있다.

Fig. 5는 하중변수 p 가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 $R=S=1, \lambda=50, \Gamma=1.5, \epsilon=2$ 인 조건을 갖는 고정-고정보에 대하여 해석한 결과이다. 또한 이 그림에서 인장하중은 무차원 고유진동수를 증가시키는 요인이지만 압축하중은 고유진동수를 감소시키는 요인임을 알 수 있다. 이 그림에서 p 축에 □표로 표시된 p 값은 압축하중이 증가하여 보가 좌굴되어 $c_1=0$ 이 되어 정적 상태로 되는 무차원 좌굴하중 ($b=5.52$)이다.

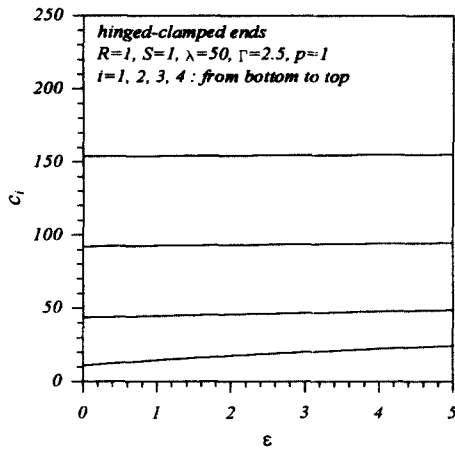


Fig. 4. c_i vs ϵ curves (hinged-clamped)

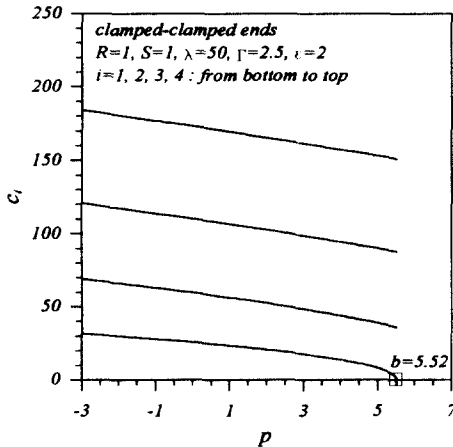


Fig. 5. c_i vs p curves (clamped-clamped)

5. 결론

이 논문은 탄성지반 위에 놓인 축하중이 작용하는 Timoshenko보의 자유진동에 관한 연구로서 이 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 탄성지반 위에 놓인 축하중을 받는 Timoshenko보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다.

2) 회전관성과 전단변형은 무차원 고유진동수를 감소시키는 요인이다.

3) 세장비가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가한다.

4) 무차원 지반계수는 무차원 고유진동수를 증가시키는 요인이다.

참고 문헌

- (1) A. D. Kerr, "On the Formal Development of Elastic Foundation Models", Ing. Arch., Vol. 54, 1984, pp.455-464.
- (2) R. Ahuja and R. C. Duffied, "Parametric Instability of Variable Cross-section Beams resting on an Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 39, No. 2, 1975, pp.159-174.
- (3) T. M Wang and J. E. Stephens, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 51, No. 2, 1977, pp.149-155.
- (4) B. A. H Abbas and J. Thomas, "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation". Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, No. 1, 1978, pp.33-44.
- (5) D. Z. Yankelevsky and M. Eisenberger, "Analysis of a Beam Column on Elastic Foundation", Computers & Structures, Vol. 23, No. 1, 1978, pp.33-44.
- (6) B. P. Shastry and G. V. Rao, "Dynamic Stability of Cantilever Columns resting on an Elastic Foundation", Computer & Structures, Vol. 25, No. 1, 1987, pp.157-158.
- (7) H. Matsuda and T. Sakiyama, "Analysis of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundation", Computer & Structures, Vol. 25, No. 6, 1987, pp.941-946.
- (8) A. J. Valsangkar and R. B. Pradhanang, "Free Vibration of Partially Supported Piles", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, No.8, 1987, pp.1244-1247.
- (9) T. Yokoyama, "Parametric Instability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation", Computer & Structures, Vol. 28, No. 2, 1988, pp.207-216.
- (10) 이병구, 오상진, 모정만, 김현상, "탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석", 1992년 한국강구조학회 학술발표 개요집, 1992, pp.136-141.