

Pasternak지반위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동

○이 병 구*·박 광 규**·오 상 진***·진 태 기*

Free Vibrations of Horizontally Noncircular Curved Beams resting on Pasternak Foundations

Byoung Koo Lee, Kwang Kyou Park, Sang Jin Oh and Tae Ki Jin

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of horizontally curved beams on an elastic foundation. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, the differential equations governing free vibrations of noncircular curved beams resting on Pasternak-type foundations are derived and solved numerically. The lowest three natural frequencies for parabolic curved beams with hinged-hinged and clamped-clamped end restraints are calculated. Numerical results are presented to show the effects on the natural frequencies of the non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the Winkler foundation parameter, the shear foundation parameter, and the width ratio of contact area between the beam and foundation.

1. 서 론

지반위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련한 많은 연구가 수행되고 있다. 최근에도 탄성지반위에 놓인 보에 관한 연구가 이루어지고 있지만, 이들 연구에서 다루어지고 있는 대상구조는 대부분 직선보이다. 그러나 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부가 존재하며, 원형 띠기초는 유체저장조 등 주요 구조물의 기초로서 이용⁽¹⁾되고 있어 탄성지반위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 대한 많은 연구가 수행되어 충분한 설계자료가 제시되어야 할 것으로 판단된다.

공학에서 지반위에 놓인 구조물의 거동해석에 많이 이용되고 있는 Winkler모형은 독립적인 스프링으로 구성되어 있기 때문에 하중 작용점의 처짐이 근접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 단점을 가지고 있다. 이러한 Winkler모형의 문제점을 해결 즉 지반 연속성을 고려하기 위하여 Pasternak는 Winkler모형의 스프링에 전단층(shear layer)을 연결하여 연속성을 고려할 수 있는 두 개의 매개변수로 표현되는 지반모형(two-parameter elastic foundation)을 제안하였다⁽²⁾.

탄성지반위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 대한 연구⁽³⁻⁵⁾에서는 주로 원호형 곡선보를 대상으로 하고 있다. 이는 일반적으로 다른 제원이 동일한 경우 선형에 따른 진동특성 변화가 적을 것이라는 판단과 원호형에 대한 이론전개가 비교적 용이하기 때문이다.

본 연구에서는 두 개의 매개변수로 표현되는 지반위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 규명

* 원광대학교 토목환경공학과

** 대전대학교 토목공학과

*** 담양대학 토목과

하는데 목적이 있다. 이를 위해 Pasternak가 제안한 지반모형을 채택하여 대상보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식을 수치해석하여 대상보의 고유진동수를 산출하고자 한다. 수치해석 예로서 회전-회전 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 포물선형 수평 곡선보의 재변수 변화에 따른 고유진동수를 구하고, 그 결과를 고찰하였다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 탄성지반위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 l , h 와 a 는 각각 지간길이, 수평높이 및 중심각이며, θ 와 α 는 각각 곡선보축상 임의점 (x, y) 에서 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도 및 곡률반경이다. 그리고 v , ψ , β 및 ϕ 는 각각 곡선보축상 임의점에서의 수직방향 변위, 순수 휨에 의한 단면회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이며, R_V 와 R_T 는 지반반력 성분으로서 각각 단위길이당 수직반력과 회전반력이다.

Fig. 2는 진동시 곡선보 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로 M , T 및 Q 는 각각 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고, F_v 와 C_ϕ 는 각각 단위 길이당 수직방향 관성력과 회전관성우력이다. 곡선보 미소요소에 작용하는 이들 합용력과 관성력 및 반력 R_V , R_T 사이의 동적평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

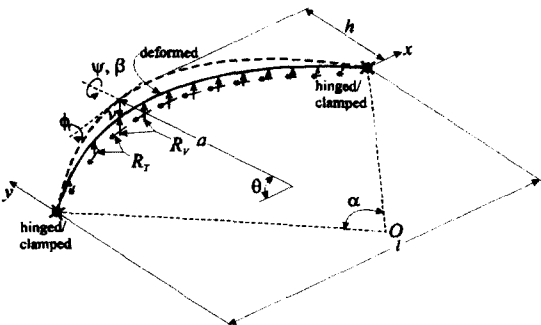


Fig. 1 Geometry and mode shape of horizontally noncircular curved beam on an elastic foundation

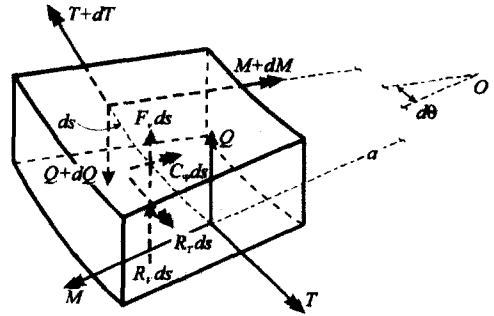


Fig. 2 Loads on a beam element

$$a^{-1}Q' - F_v - R_V = 0 \quad (1)$$

$$a^{-1}M' - Q + a^{-1}T + C_\phi = 0 \quad (2)$$

$$a^{-1}M - a^{-1}T' + R_T = 0 \quad (3)$$

여기서 $(') = d/d\theta$ 이다.

휨모멘트와 비틀림모멘트를 ϕ 와 ϕ 의 함으로 나타내면 식 (4), (5)와 같다⁽¹⁾.

$$M = EIa^{-1}(\phi - \phi') \quad (4)$$

$$T = GJa^{-1}(\phi + \phi') \quad (5)$$

여기서 I , J 는 각각 곡선보 단면의 단면2차모멘트 및 비틀림상수, E 와 G 는 각각 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

전단변형을 고려하는 경우 단면회전각은 식 (6)과 같이 ϕ 와 β 의 함으로 표현된다.

$$\frac{dv}{ds} = a^{-1}v' = \phi + \beta \quad (6)$$

따라서 전단력 Q 는 식 (7)과 같다.

$$Q = \alpha_s AG\beta = \alpha_s AG(a^{-1}v' - \phi) \quad (7)$$

여기서 α_s 는 단면형상에 따른 상수이다.

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 F_v 와 C_ϕ 는 각각 식 (8), (9)와 같다.

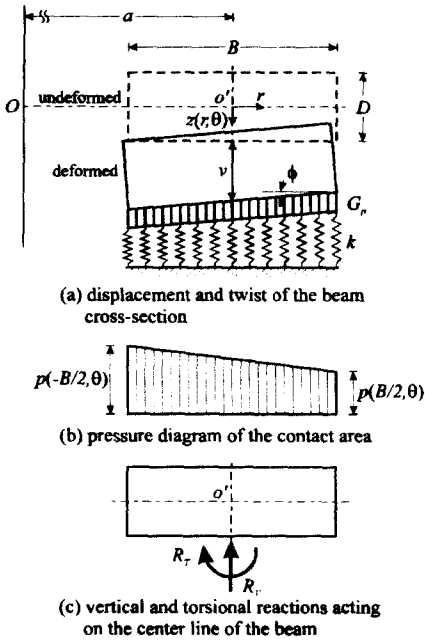


Fig. 3 Rotation of the cross-section of beam and reactions

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v, \quad C_\phi = -\gamma I \omega^2 \phi \quad (8,9)$$

여기서 γ 는 부재재료의 밀도, A 는 단면적, ω 는 고유각진동수(rad/s)이다.

Fig. 3(a)는 두 개의 매개변수로 그 특성이 표현되는 탄성지반위에 놓인 곡선보의 단면형상과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로 B 와 D 는 각각 지반과 접하는 단면폭 및 단면높이, r 은 단면도심 o' 을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이며, $z(r, \theta)$ 는 곡선보축상 θ 위치에서 비틀림각으로 인하여 곡률중심방향으로 변화하는 수직변위를 의미한다. 그리고 k 와 G_p 는 각각 Winkler지반계수와 전단지반계수이다.

Fig. 3(a)에 보인 바와 같이 두 개의 매개변수로 지반특성이 표현되는 Pasternak지반모형을 채용하는 경우 곡선보와 지반이 접하는 면에서의 압력과 처짐의 관계는 식 (10)과 같다⁽²⁾.

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta) - \frac{G_p}{a^2} \frac{d^2 z(r, \theta)}{d\theta^2} \quad (10)$$

비틀림각 ϕ 는 미소각이므로 $z(r, \theta)$ 는 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (11)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입하면 곡선보축상 임의점 θ 위치 단면에서 곡률중심방향의 압력변화는 식 (12)와 같이 표현된다.

$$p(r, \theta) = k(v - r\phi) - \frac{G_p}{a^2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} - r \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \right) \quad (12)$$

식 (12)로부터 단면 양쪽끝에서의 압력을 구하면 식 (13)과 같다.

$$p\left(-\frac{B}{2}, \theta\right) = k\left(v + \frac{B\phi}{2}\right) - \frac{G_p}{a^2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{B}{2} \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \right) \quad (13a)$$

$$p\left(\frac{B}{2}, \theta\right) = k\left(v - \frac{B\phi}{2}\right) - \frac{G_p}{a^2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} - \frac{B}{2} \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \right) \quad (13b)$$

Fig. 3(b)는 이상의 결과를 이용하여 곡선보 단면에 작용하는 압력분포를 나타낸 것으로 이는 Fig. 3(c)에 보여진 바와 같이 곡선보 중심축에 대한 단위길이당 수직반력 R_v 와 회전반력 R_T 로 나타낼 수 있으며, R_v 와 R_T 는 각각 식 (14) 및 (15)와 같다.

$$R_v = kBv - \frac{BG_p}{a^2} \frac{d^2 v}{d\theta^2} \quad (14)$$

$$R_T = \frac{B^3}{12a^2} \left(k\phi a^2 - G_p \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} \right) \quad (15)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l \quad (16,17)$$

$$\eta = v/l, \quad \rho = a/l, \quad f = h/l \quad (18-20)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad \varepsilon = GJ/(EI), \quad \mu = \alpha_s G/E \quad (21-23)$$

$$\lambda = kl^5/(\pi^4 EI), \quad g_p = G_p l^3/(\pi^2 EI), \quad b = B/l \quad (24-26)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

여기서 f 와 s 는 각각 수평높이 지간길이비 및 세장비, ε 과 μ 는 각각 강성계수와 전단계수, λ , g_p 및 b 는 각각 무차원화한 Winkler지반계수, 전단지반계수 및 접촉면의 폭비이며, C_i 는 무차원 고유진동수 (frequency parameter)이다.

식 (7), (8) 및 (14)를 식 (1)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta'' = \frac{\rho'}{\rho} \frac{\mu s^2}{\mu s^2 + \pi^2 g_p b} \eta' + \frac{\rho^2}{\mu s^2 + \pi^2 g_p b} \times (\pi^4 \lambda b - C_i^2) \eta + \frac{\rho \mu s^2}{\mu s^2 + \pi^2 g_p b} \psi' \quad (28)$$

식 (4), (5), (7) 및 (9)를 식 (2)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하면 식 (29)을 얻을 수 있다.

$$\phi'' = \frac{\rho'}{\rho} \phi' + [\rho^2(\mu s^2 - s^{-2} C_i^2) + \varepsilon] \phi + (1 + \varepsilon) \phi' - \frac{\rho'}{\rho} \phi - \rho \mu s^2 \eta' \quad (29)$$

식 (4), (5) 및 (15)를 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\phi'' = \frac{\rho'}{\rho} \frac{12\varepsilon}{12\varepsilon + \pi^2 g_p b^3} \phi' + \frac{12 + \rho^2 \pi^4 \lambda b^3}{12\varepsilon + \pi^2 g_p b^3} \phi - \frac{12 + 12\varepsilon}{12\varepsilon + \pi^2 g_p b^3} \phi' + \frac{\rho'}{\rho} \frac{12\varepsilon}{12\varepsilon + \pi^2 g_p b^3} \phi \quad (30)$$

이상에서 식 (28)~(30)은 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 임의의 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다.

Fig. 1에 보인 곡선보의 선형이 좌단을 원점으로

하는 지간길이 l , 높이 h 인 포물선이라면 이의 무차원 선형식은 식 (31)과 같이 나타낼 수 있으며, 무차원 곡률반경 ρ 와 ρ' 은 식 (32), (33)과 같다⁶⁾.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1) \quad (31)$$

$$\rho = \frac{1}{8f} [1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (32)$$

$$\rho' = \frac{3}{2}(2\xi - 1)[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (33)$$

회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0"이며, 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 곡선보 단부가 회전단 및 고정단인 경우 경계조건식은 각각 식 (34)~(36) 및 식 (37)~(39)와 같다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \phi' = 0 \quad (34-36)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \phi = 0 \quad (37-39)$$

3. 해석방법 및 결과

본 연구에서는 식 (28)~(30)의 지배미분방정식을 해석하기 위하여 문헌⁶⁾ 등에서 그 적용성이 확인된 바 있는 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석기법을 이용하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 해석대상 구조의 무차원 고유진동수 C_i 는 시행착오적 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하여 구하였다. 이러한 해석과정으로 대상보의 선형, 단부조건, 제변수 f , s , ε , μ , λ , g_p 및 b 가 입력되면 고유진동수가 계산되도록 FORTRAN77어로 프로그램하였다. 이 논문에서는 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하고, Table 1~4에 그 결과를 제시하였다.

곡선보의 수평높이 지간길이비 f 가 "0"으로 수렴하는 경우 해석결과는 대응되는 단부조건과 제원을 갖는 직선보의 고유진동수로 수렴해야만 한다. Table 1은 이러한 직선보로의 수렴과정을 나타낸 것으로 $f \rightarrow 0$ 인 경우 본 연구결과는 문헌 [7, 8]의 직선보에 대한 고유진동수로 정확히 수렴함을 알 수 있다.

Table 1 Convergence to the frequencies for lateral vibration of beams

Geometry ($\mu=0.25$)	f	Frequency parameter, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
H-H*	0.100	18.37	44.32	79.28
$s=25$	0.050	18.76	45.96	81.90
$\epsilon=0.2865$	0.010	18.92	46.53	82.79
$\lambda=25.7$	0.005	18.93	46.55	82.82
$g_p=253.3$	0.001	18.93	46.55	82.83
$b=0.01$	0.000 [†]	18.93	46.56	82.83
C-C	0.100	19.99	45.68	78.03
$s=25$	0.050	20.90	47.47	80.63
$\epsilon=0.2865$	0.010	21.23	48.08	81.50
$\lambda=10$	0.005	21.24	48.10	81.53
$g_p=5$	0.001	21.25	48.11	81.54
$b=0.05$	0.000 [‡]	21.25	48.11	81.54

* H: hinged, C: clamped, †: ref. [7], ‡: ref. [8]

Table 2 Comparison of frequency parameter C_i for circular and parabolic curved beams

Geometry*	i	Frequency parameter, C_i	
		Circular	Parabolic
H-H	1	8.666	8.722
$f=0.1, s=25$	2	33.40	33.47
$\lambda=1$	3	68.77	68.84
H-H	1	4.154	4.607
$f=0.4, s=200$	2	16.26	19.76
$\lambda=5$	3	41.44	45.30
C-C	1	10.24	10.64
$f=0.4, s=25$	2	25.96	28.24
$\lambda=5$	3	48.87	51.38
C-C	1	20.91	20.92
$f=0.1, s=200$	2	57.80	57.85
$\lambda=1$	3	113.3	113.5

* $\epsilon=1.146, \mu=0.347, g_p=1, b=0.03$

Table 2는 곡선보의 선형이 고유진동수에 미치는 영향을 나타낸 것으로 수평높이 지간길이비 f 가 클수록 선형의 영향이 크며, 양단회전인 경우가 양단고정에 비해 선형의 영향이 큼을 알 수 있다.

Table 3과 4는 각각 $s=25, \epsilon=1.146, \mu=0.347$ 인 양단회전 및 양단고정 포물선형 수평 곡선보의 수평높이 지간길이비 f , Winkler지반계수 λ , 전단지반계수 g_p 및 접촉면의 폭비 b 의 변화에 따른 고유진동수를 나타낸 것이다.

Table 3 Frequency parameter C_i for hinged-hinged beams ($s=25, \epsilon=1.146, \mu=0.347$)

λ	g_p	b	f	C_i				
				$i=1$	$i=2$	$i=3$		
0	0	0	0.1	8.378	33.27	68.65		
			0.2	5.969	28.20	60.05		
			0.3	3.900	22.87	49.79		
			0.4	2.520	18.42	40.16		
1	0	0.01	0.1	8.435	33.28	68.66		
			0.2	6.050	28.22	60.05		
			0.3	4.021	22.89	49.80		
			0.4	2.705	18.44	40.17		
	0.03	0.1	0.03	0.1	8.548	33.31	68.67	
				0.2	6.207	28.25	60.07	
				0.3	4.254	22.93	49.82	
				0.4	3.041	18.50	40.19	
		0.1	0.01	0.1	0.1	8.494	33.34	68.72
					0.2	6.136	28.28	60.11
					0.3	4.153	22.95	49.86
					0.4	2.893	18.50	40.23
0.03	0.1	0.03	0.1	8.722	33.47	68.84		
			0.2	6.457	28.43	60.24		
			0.3	4.619	23.10	49.99		
			0.4	3.523	18.67	40.37		
	3	0.01	0.1	0.1	8.611	33.45	68.83	
				0.2	6.306	28.39	60.23	
				0.3	4.406	23.06	49.98	
				0.4	3.238	18.61	40.35	
0.03	0.1	0.03	0.1	9.058	33.80	69.18		
			0.2	6.931	28.77	60.59		
			0.3	5.274	23.45	50.35		
			0.4	4.331	19.00	40.74		
	5	0	0.01	0.1	8.660	33.34	68.69	
				0.2	6.360	28.29	60.08	
				0.3	4.475	22.97	49.84	
				0.4	3.344	18.55	40.21	
0.03	0.1	0.03	0.1	9.198	33.48	68.75		
			0.2	7.076	28.45	60.16		
			0.3	5.447	23.17	49.93		
			0.4	4.565	18.80	40.33		
	1	0.01	0.1	0.1	8.717	33.39	68.74	
				0.2	6.442	28.34	60.14	
				0.3	4.594	23.03	49.90	
				0.4	3.498	18.60	40.27	
0.03	0.1	0.03	0.1	9.359	33.64	68.92		
			0.2	7.297	28.62	60.33		
			0.3	5.736	23.35	50.10		
			0.4	4.899	18.97	40.51		
	3	0.01	0.1	0.1	8.831	33.50	68.86	
				0.2	6.604	28.46	60.26	
				0.3	4.823	23.14	50.01	
				0.4	3.787	18.72	40.40	
0.03	0.1	0.03	0.1	9.674	33.96	69.26		
			0.2	7.719	28.96	60.68		
			0.3	6.276	23.69	50.45		
			0.4	5.509	19.30	40.87		

Table 4 Frequency parameter C_i for clamped-clamped beams ($s=25$, $\varepsilon=1.146$, $\mu=0.347$)

λ	g_p	b	f	C_i			
				$i=1$	$i=2$	$i=3$	
0	0	0	0.1	18.80	46.92	82.52	
			0.2	15.82	40.99	73.32	
			0.3	12.54	34.10	62.01	
			0.4	9.737	27.86	51.09	
1	0	0.01	0.1	18.82	46.93	82.53	
			0.2	15.86	41.00	73.32	
			0.3	12.57	34.11	62.02	
			0.4	9.786	27.88	51.10	
	0.03	0.1	0.1	18.87	46.95	82.54	
			0.2	15.92	41.03	73.34	
			0.3	12.65	34.14	62.03	
			0.4	9.884	27.91	51.12	
	1	0.01	0.1	0.1	18.85	46.97	82.58
				0.2	15.89	41.05	73.37
				0.3	12.63	34.16	62.07
				0.4	9.854	27.92	51.15
0.03	0.1	0.1	0.1	18.97	47.07	82.69	
			0.2	16.03	41.16	73.48	
			0.3	12.80	34.27	62.18	
			0.4	10.08	28.04	51.27	
3	0.01	0.1	0.1	18.91	47.05	82.68	
			0.2	15.97	41.13	73.47	
			0.3	12.73	34.25	62.17	
			0.4	9.987	28.01	51.25	
	0.03	0.1	0.1	0.1	19.15	47.32	82.98
				0.2	16.26	41.42	73.78
				0.3	13.11	34.54	62.47
				0.4	10.47	28.30	51.56
5	0	0.01	0.1	18.92	46.97	82.55	
			0.2	15.98	41.05	73.35	
			0.3	12.73	34.17	62.05	
			0.4	9.982	27.95	51.14	
	0.03	0.1	0.1	0.1	19.18	47.07	82.61
				0.2	16.27	41.16	73.41
				0.3	13.10	34.31	62.12
				0.4	10.45	28.11	51.23
	1	0.01	0.1	0.1	18.96	47.01	82.60
				0.2	16.01	41.09	73.40
				0.3	12.78	34.21	62.10
				0.4	10.05	27.99	51.19
0.03	0.1	0.1	0.1	19.27	47.19	82.75	
			0.2	16.39	41.29	73.56	
			0.3	13.25	34.44	62.27	
			0.4	10.64	28.24	51.38	
3	0.01	0.1	0.1	19.02	47.09	82.70	
			0.2	16.09	41.18	73.50	
			0.3	12.88	34.30	62.20	
			0.4	10.18	28.08	51.29	
	0.03	0.1	0.1	0.1	19.45	47.44	83.05
				0.2	16.61	41.55	73.85
				0.3	13.54	34.70	62.56
				0.4	11.01	28.50	51.67

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 Pasternak지반위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 곡선보의 선형으로서 포물선을 적용하여 수치적분기법과 시행착오적 행렬값탐사법이 결합된 수치해석방법으로 해석하였다. 해석 예에서는 회전-회전 및 고정-고정 보의 재변수 변화에 따른 최저차 3개의 고유진동수를 산출하고 그 결과를 제시하였다.

감사의 글

이 논문은 한국학술진흥재단의 학술연구비 지원(1998~1999년)에 의하여 이루어진 연구결과의 일부로서 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

- (1) Volterra, E. and Gains, J.H., 1971, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall.
- (2) Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.
- (3) Panayotounakos, P.E. and Theocaris, P.S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, pp.139-144.
- (4) Wang, T.M. and Brannen, W.F., 1982, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, pp.241-246.
- (5) Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp.291-301.
- (6) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 1999, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp.23-33.
- (7) Wang, T.M. and Stephens, J.E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp.149-155.
- (8) 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석", 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, pp.107-115.