

회전하는 양단자유보의 동적 안정성에 대한 추력과 집중질량의 영향에 관한 연구

°윤승준* · 김지환**

Effect of a Concentrated Mass on the Dynamic Stability of Spinning Free-Free Beam Subjected to a Thrust

Yoon, Seung-Joon* · Kim, Ji-Hwan**

ABSTRACT

The dynamic stability of spinning beam with free boundary conditions for both edges subjected to a tip follower force $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ is analyzed. It is studied that the beam has a concentrated mass, and then the effects of the axial locations of the mass are studied. The beam is modelled with the Timoshenko type shear deformations. The Hamilton's principle is used to derive the equations of motion, and the critical spinning speed of a beam subjected to a follower force with various non-dimensional parameters is investigated. The finite elements are used with C^0 continuity to analyze the spinning beam model, and the method of multiple scales is tried to investigate the dynamic instability regions. The governing equations of motion involve periodic coefficients, which are not in the form of standard Mathieu-Hill equations. The result shows that the concentrated mass increases the dynamic stability of the spinning free-free beam subjected to a thrust.

1. 서론

비보존력의 대표적인 예로 종동력을 들 수 있다.[1] 구조물의 변형과 아울러 추력의 작용선이 변하는 종동력이 작용할 경우에는, 횡방향 고유진동수가 0이 되는 정적 불안정성(divergence)과 두 고유진동수가 일치하게 되어 진폭이 시간에 따라 발산하는 동적 불안정성(flutter)이 나타날 수 있다. 이러한 종동력이 작용하는 예로는 미사일이나 로켓 등 에 추력이 가해질 때와 우주 구조물 등이 궤도를 수정하거나 자세를 바꾸기 위해 추력을 작용시킬 경우 등이 있다.

Beal, T. R.[2]은 추력이 작용하는 유연한 미사일 동적 안정성에 관하여 Galerkin방법을 이용하

여 일정한 크기의 종동력과 아울러 맥동종동력의 영향을 살펴보았다. 그는 추력 제어가 없을 때는 보의 굽힘에 해당하는 가장 낮은 2개의 진동수가 일치하는 형식으로 임계 추력(critical thrust)에 도달하지만, 제어가 있을 때는 최저차의 굽힘 진동수가 0에 도달하는 방식으로 임계 추력에 도달한다는 점을 지적하였다.

Bauer, F. H.[3]는 자체축에 대해서 일정한 각속도로 회전하는 Euler보에 대하여 여러 가지 양단 경계 조건의 경우에 있어 회전 각속도의 변화에 따라 고유진동수가 선형적으로 증가, 감소함을 보였다. 이어서 Han, P. S. 와 Zu, J. W.[4-5]는 Timoshenko보 이론을 적용하여, 모드 형상 합성 방법으로 여러 가지 경계 조건을 가지는 경우에 전방향 세차운동(Forward precession)과 후방향 세차운동(Backward precession)에 의하여 고유진동

* 서울대학교 항공우주공학과 대학원

** 정희원, 서울대학교 항공우주공학과

수와 모드 형상이 변화함을 보인 바 있다. Platus, P. H.[6]는 회전의 효과를 고려한 미사일의 공력탄성학적인 안정성을 연구하였는데, Lagrange 방식으로 탄성 처짐과 강체 운동(rigid body motion)이 연계된 지배방정식을 얻었다. 안정성 해석을 위해서는 앞서 유도한 방정식을 선형화하고, 극 초음속 미사일에 적용할 수 있도록 1차형식의 공기역학적 특성을 취하였다. 특히 구조 감쇠의 영향에 따라 미사일의 형상에 대하여 불안정성이 나타날 수 있음을 보였다.

미사일이나 로켓의 추력 조종장치는 보에 부착된 집중질량으로 모사할 수 있는데, Park, Y. P. 와 Mote, C. D. Jr.[7]와 Park, Y. P. 와 Ryu, B. J.[8]는 집중질량의 위치와 관성 효과가 다이버전스와 플러터 하중에 대해 미치는 영향을 살폈다. 또한 Sugiyama, Y. et al.[9] 은 종동력이 작용하는 로켓을 모사하여 보의 임의의 위치에 장착된 집중질량을 포함하는 모델로 안정성을 연구하였는데, 로켓 모터는 유한한 크기를 갖는 강체로 가정하였으며 집중질량의 크기와 질량이 중요한 요소임을 실험적으로 입증하였다. 한편 Kim, J. H. 와 Choo, Y. S.[10]는 집중질량의 영향을 고려한 모델을 도입하여 유한요소법과 섭동법으로 시간에 따라 미소의 섭동력이 작용하는 맥동종동력 모델을 연구, 분석하였다. 그리고 Kar, R. C. 와 Sujata, T.[11]는 횡방향 종동 가진을 받는 회전 외팔보의 동적 안정성을 살펴보기 위해 확장된 Galerkin 방법과 multiple scales 방법을 적용하여 끝단 질량과 회전 각속도, hub의 지름 및 warping 강성의 효과들에 대해 고찰하였다. Lee, H. P.[12]는 초기 곡률 및 끝단에 질량을 가진 보를 신장이 없는 보로 가정하여 초기 곡률 형상과 끝단 질량의 유무가 동적 불안정성에 대해 미치는 영향을 살펴보았다. 한편 Wang, C. Y.[13]은 비선형이론에 입각해 끝단질량을 가지고 회전하는 보의 불안정성을 분기해석(bifurcation analysis)을 통해 고찰하였다.

본 연구에서는 Timoshenko보 이론에 도입된 가정에 기초하여 일정한 크기의 추력 혹은 맥동성분이 있는 추력을 받으며 자체축 주위로 회전하는 보의 동적안정특성에 집중질량이 미치는 영향을 연구하였다. 종동력으로 모델링된 추력은 일정한 성분과 상대적으로 작은 크기의 맥동성분이 포함하는 것으로 모델링하였다. 이와 아울러, 자체축 주위로의 회전이 있는 보의 횡방향 변형을 2차원으로 모델링 하는 과정을 통해 보의 회전에 의한

정적 불안정성에 관한 연구 및 회전효과와 맥동종동력이 미치는 동적 안정성에 대한 효과와의 상관관계를 고찰하였다.

2. 이론전개 및 수식화

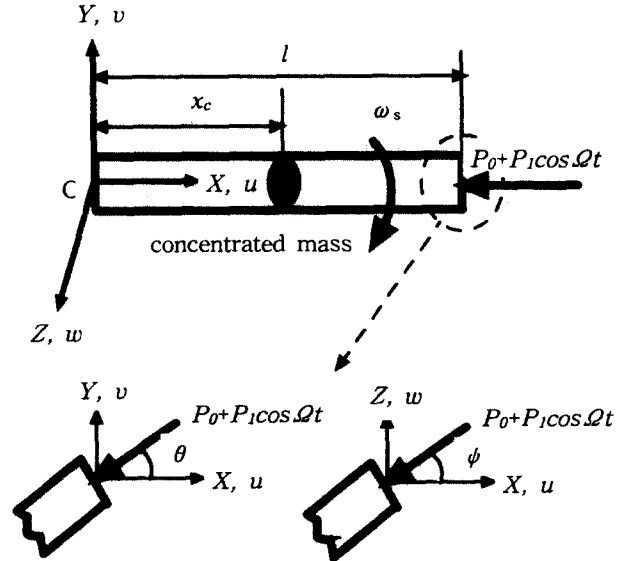


Fig. 1 Spinning free-free Timoshenko beam model subjected to a thrust

Timoshenko보 이론에 따라 Fig. 1과 같이 ω_s 로 회전하는 원형 단면보 모델을 해석하고자 한다. 여기서 l 은 보의 길이, x_c 는 집중질량의 위치, Ω 는 가진 진동수이다. 그리고 $\theta(t)$, $\phi(t)$ 는 변형전 x 축과 종동력 사이의 각도이며, P_0 는 일정한 크기의 힘, $P_1 \cos \Omega t$ 는 시간에 따라 크기가 변하는 힘이다.

변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= -z\phi(x, t) - y\theta(x, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u_1 , u_2 , u_3 는 각각 x , y , z 방향으로의 변위를 의미하며, v 는 Y 방향으로의 처짐, w 는 Z 방향으로의 처짐을 의미한다. 그리고 θ , ϕ 는 각각 Z 방향과 Y 방향으로의 전단변형각을 의미한다.

선형화된 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}(x, y, z, t) &= -z\phi(x, t) - y\theta(x, t), \\ \gamma_{xy}(x, y, z, t) &= v(x, t) - \theta(x, t) \\ \gamma_{xz}(x, y, z, t) &= w(x, t) - \phi(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

운동에너지는 다음과 같이 보의 운동에너지와 집중질량의 운동에너지로 나누어 구할 수 있다.[8]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \omega_s^2 (v^2 + w^2) \\ &\quad + 2\omega_s (v\dot{w} - w\dot{v})] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \\ &\quad + 2\omega_s^2] dx + \frac{1}{2} M [\dot{v}(x_c, t)^2 + \dot{w}(x_c, t)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} I [\dot{\theta}(x_c, t)^2 + \dot{\phi}(x_c, t)^2] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ρ 는 보의 체적당 질량을 의미하고, A 와 I 는 각각 보의 단면적과 보단면의 관성 모멘트를 의미하며, $(\dot{\quad})$ 는 $d(\quad)/dt$ 를 의미한다. 그리고 M 과 I 는 각각 집중질량의 병진관성과 회전관성을 나타낸다. 물체고정좌표계(body-fixed coordinate)의 주축(principal axis)에 해당하는 z 축과 y 축에 대한 관성모멘트는 보 단면이 변형 전후 원형을 유지한다는 가정하면 $I_{yy}=I_{zz}$ 이므로 모두 I 로 표기하였다.

굽힘(bending)과 전단(shear)변형에 의한 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l (\tau_{xx}\epsilon_{xx} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI [\theta_x^2 + \phi_x^2] dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^l KGA [(v_x - \theta)^2 + (w_x - \phi)^2] dx \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $(\quad)_{, \beta}$ 는 $\partial(\quad)/\partial\beta$ ($\beta=x$ or y)를 의미하며, K 는 전단보정계수, G 는 전단계수이다. 길이가 l 인 보에 있어, 임의의 x 위치에 가해지는 압축하중 $(P_0 + P_1 \cos \Omega t)(x/l)$ 은 축방향을 따라 선형적으로 분포하게 된다. 따라서 집중질량 M_c 가 추가되면 집중질량에 의한 관성력 효과가 첨가되어 다음 식과 같은 힘 분포가 나타나게 된다.[8]

$$W_c = \frac{1}{2} (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \int_0^l \frac{\rho A x + MH(x - x_c)}{\rho A l + M} (v_x^2 + w_x^2) dx \quad (5)$$

$$\text{여기서, } H(x - a) = \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

또한, 맥동종동력에 의한 축과 수직인 성분에 의한 비보존 가상일의 변분 δW_{nc} 은 다음과 같다.

$$\delta W_{nc} = - (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \phi \Big|_{x=0}^{x=l} \delta v - (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \theta \Big|_{x=0}^{x=l} \delta w \quad (6)$$

확장된 해밀턴 원리에 적용하면 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (7)$$

본 연구에서는 다음과 같은 무차원변수들을 정의하였다.

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_s^2 &= \frac{\rho A l^4 \omega_s^2}{EI}, \quad R = \frac{I}{A l^2}, \quad S = \frac{KGA l^2}{EI} \\ \bar{\Omega}^2 &= \frac{\rho A l^4 \Omega^2}{EI}, \quad Q_0 = \frac{P_0 l^2}{EI}, \quad Q_1 = \frac{P_1 l^2}{EI} \\ \bar{M} &= \frac{M}{\rho A l}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\rho A l^2}, \quad \mu = \frac{x_c}{l} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\bar{\omega}_s$ 는 무차원화된 회전각속도, R 은 관성 모멘트, S 는 전단변형계수, $\bar{\Omega}$ 는 가진 진동수, Q_0 와 Q_1 은 무차원화된 맥동 종동력 계수, \bar{M} 은 보 질량에 대한 집중질량의 질량비, \bar{I} 는 집중질량의 회전관성 매개변수, μ 는 Fig.1에 보인바와 같이 집중질량의 위치를 나타낸다.

3. 유한요소정식화

해밀턴 원리와 유한요소법을 적용하여, 아래의 이산화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [G_c]\{\dot{X}\} + ([K_e] - \alpha P_{cr}[K_{fs}])\{X\} - \beta P_{cr} \cos \Omega t [K_{fs}]\{X\} = 0 \quad (9)$$

여기서 $\alpha = \frac{P_0}{P_{cr}}$, $\beta = \frac{P_1}{P_{cr}}$ 이고, P_{cr} 은 크기가 일정한 하중만 작용했을 경우의 임계하중이며, $\{X\}$ 는 $n \times 1$ 행렬로 전체 보의 자유도 벡터다. $[M]$ 은 질량행렬이고, $[G_c]$ 는 회전에 의한 자이로스코프행렬이며, $[K_e]$ 는 변형에너지에 의한 강성행렬, $[K_{fs}]$ 와 $[K_{fs}]$ 는 각각 크기가 일정한 하중과 시간에 따라 크기가 변하는 하중의 외부일에 의한 강성행렬이며 모두 $n \times n$ 행렬이다. 본 연구와 같이 크기가 일정한 하중과 크기가 시간에 따라 변하는 하중이 가해지는 방법이 같다면 $[K_{fs}] = [K_{fs}] = [K_f]$ 가 된다 따라서 $([K_e] - \alpha P_{cr}[K_f])$ 를 $[K_1]$ 이라고 놓고, $P_{cr}[K_f]$ 를 $[K_2]$ 라고 놓으면 다음과 같은 식이 된다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [G_c]\{\dot{X}\} + [K_1]\{X\} - \beta \cos \Omega t [K_2]\{X\} = 0 \quad (10)$$

여기서 $[K_1]$ 는 비보존력에 의한 비대칭행렬이다. 이 때, 회전에 의한 자이로스코프의 영향으로 $\{\dot{X}\}$ 가 나타나므로, 일반적인 Mathieu-Hill 방정식과는 다른 형태가 된다.

위 식을 상태벡터(state vector) $\{Y\}$ 를 도입하여

변화시키면 다음과 같다.

$$\{\dot{Y}\} + [K_k]\{Y\} = \beta \cos \Omega t [F_1]\{Y\}$$

여기서, $\{Y\} = \{\dot{X}, X\}^T$ (11)

$$[K_k] = \begin{bmatrix} M^{-1}G_c & M^{-1}K_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F_1] = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위 식의 고유치(eigenvalue)는 자이로스코프 시스템의 고유진동수로서, 순허수(pure imaginary number)의 켈레(conjugate pairs)형태로 구성된다.

이제 $[K_k]$ 를 대각 행렬로 만들기 위해 아래와 같은 모달 변환을 이용하기로 한다. 이때 강체 모드의 영향을 배제하여 강체 모드의 모달벡터를 제외한 탄성진동 모드에 해당하는 모달벡터들만으로 모달변환을 한다. 양단 자유 보의 경우에는 1개의 강체 병진 모드, 1개의 강체 회전 모드가 나타나게 된다. 모달행렬 $[P]$ 를 이용하여 표준화시키면 다음과 같은 식이 나온다.

$$[I]\{\zeta\} + [A]\{\zeta\} = \beta \cos \Omega t [F_n]\{\zeta\}$$

여기서, $\{Y\} = [P]\{\zeta\}$ (12)

$$[A] = [P^{-1}][K_k][P]$$

$$[A]_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F_n] = [P^{-1}][F_1][P]$$

변형된 상태벡터(transformed state vector)를 다음과 같이 잡은 후,

$$[\zeta] = [\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_m, \eta_m] \quad (m = 4n) \quad (13)$$

Ref[14]에 의한 방법에 따라서 식을 전개하면 아래와 같다.

$$\xi_i - \omega_i \eta_i = \sum_{j=1}^m (f_{n \ 2i-1, 2j-1} \xi_j + f_{n \ 2i-1, 2j} \eta_j) \cos \Omega t$$

$$\eta_i + \omega_i \xi_i = \sum_{j=1}^m (f_{n \ 2i, 2j-1} \xi_j + f_{n \ 2i, 2j} \eta_j) \cos \Omega t$$

여기서 f_n 은 $[F_n]$ 의 성분을 나타낸다.

그리고 multiple scales 방법을 이용하여 ξ_i, η_i 를 아래와 같이 $\varepsilon (= -\frac{\beta}{2})$ 에 대한 급수 형태로 가정할 수 있다.

$$\xi_i(\tau) = \xi_{i(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon \xi_{i(1)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_{i(2)}(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (15)$$

$$\eta_i(\tau) = \eta_{i(0)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon \eta_{i(1)}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \eta_{i(2)}(T_0, T_1, T_2) + \dots$$

여기서 $T_n = \varepsilon^n t$ 이다.

식 (15)에서 ε order의 항까지인 1차 근사를 통해 안정 영역과 불안정 영역의 경계 곡선을 구할 수 있다. 따라서 $\varepsilon - \omega$ 평면에서 안정 영역과 불안정 영역을 구분하는 경계곡선은 다음과 같이 정의된다.[15]

(a) $\Omega \approx \omega_p + \omega_q$ 합형태의 조합공진 ;

$$\Omega = \omega_p + \omega_q \pm \varepsilon \sqrt{4\Lambda_{pq}\overline{\Lambda}_{pq}} \quad (16)$$

(b) $\Omega \approx \omega_p - \omega_q$ 차형태의 조합공진 ;

$$\Omega = \omega_p - \omega_q \pm \varepsilon \sqrt{4\Lambda_{pq}\overline{\Lambda}_{pq}} \quad (17)$$

여기서 Λ_{pq} 와 $\overline{\Lambda}_{pq}$ 는 다음과 같다.

$$\Lambda_{pq} = \frac{1}{4} [(f_{n \ 2p, 2q-1} + f_{n \ 2p-1, 2q}) + i(f_{n \ 2p-1, 2q-1} - f_{n \ 2p, 2q})]$$

$$\overline{\Lambda}_{pq} = \frac{1}{4} [(f_{n \ 2q, 2p-1} + f_{n \ 2q-1, 2p}) - i(f_{n \ 2q-1, 2p-1} - f_{n \ 2q, 2p})]$$

4. 결과 및 검토

Table 1에서 본 연구에서의 계산결과의 타당성 검토를 위해, 25개의 3절점 요소를 사용하여 집중 질량이 있고 일정한 크기의 중동력이 작용할 때의 회전하는 보의 임계하중값을 Ref[7], Ref[8] 및 Ref[10]의 결과와 비교하여 보았다.

Table 1 Comparison of critical force

	s = 10 ⁶			s = 10 ³		
	$\overline{M}=0$	$\overline{M}=0.2$ $\overline{I}=0$	$\overline{M}=0.2$ $\overline{I}=10^{-3}$	$\overline{M}=0$	$\overline{M}=0.2$ $\overline{I}=0$	$\overline{M}=0.2$ $\overline{I}=10^{-3}$
Present	111.5	184.6	181.2	103.2	162.9	161.2
Ref[7]	109.6	178.6	-	-	-	-
Ref[8]	111.5	186.5	181.6	102.6	160.9	159.9
Ref[10]	111.4	181.6	177.9	102.4	161.1	159.4

S = 10³일 때의 값들은 참고문헌[10]과 1% 내외의 오차로 거의 일치하였으나, 집중질량이 있고

$S = 10^6$ 일 때의 값들은 최고 2.7% 정도의 오차를 보여주고 있다.

Fig. 2에서는 집중질량이 보의 중심부에 있고 일정한 종동력 Q_0 가 작용하며 자체축으로 회전이 있을 때의 특성을 보여주고 있다.

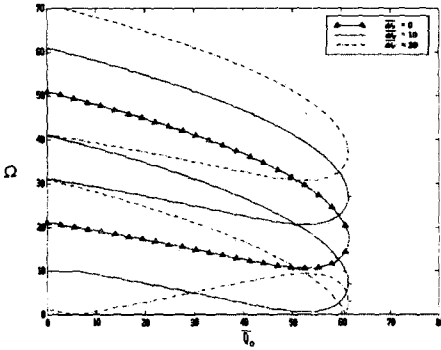


Fig. 2 The effect of spinning to the eigenvalues of the beam subjected to constant follower force with concentrated mass

($S=10^3$, $R=0.0003$, $\bar{M}=0.2$, $\bar{I}=0$, $\mu=0.5$)

무차원화된 회전 속도 0, 10 및 20에 대한 임계 종동력의 값을 구해보면 임계값은 회전에 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 그러나 회전에 의한 전방향 세차운동과 후방향 세차운동의 영향으로 고유치의 곡선이 회전 속도에 대하여 각각 분리되어 나타난다. 이는 임계값보다 작은 값에서는 회전에 의한 고유진동수와 모드형상이 변화하지만 탄성모드의 안정성에는 영향을 주지 못함을 알 수 있다.

일반적으로 회전이 강체 모드의 안정에 기여하며 탄성 모드의 불안정한 영역을 변화시킨다고 알려져 있는 것과 비교하여 볼 때, 위 결과는 타당하다고 볼 수 있다. 이는 임계하중 아래에서의 회전은 안정성에 영향을 주지는 않지만 고유치와 모드형상을 변화시키기 때문일 것으로 사료된다.[12]

Fig. 3은 집중질량이 없을 때 맥동종동력을 받으며 회전하는 보의 동적 불안정 영역을 나타내고 있다. 그림에서 나타난 바와 같이 $\omega 2 - \omega 1$, $2\omega 1$, $2\omega 2$, $\omega 3 + \omega 1$ 등의 여러 영역에서 불안정 영역이 보임을 알 수 있다. Fig. 4는 집중질량의 위치 변화가 맥동종동력을 받으며 회전하는 보의 동적 불안정 영역에 어떠한 영향을 미치는가를 보여주고 있다.

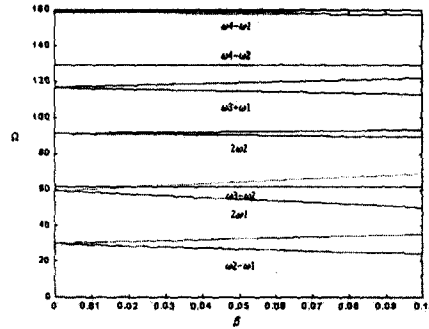
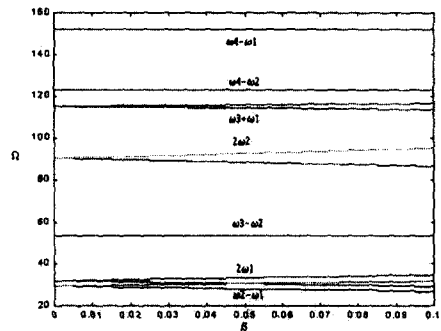
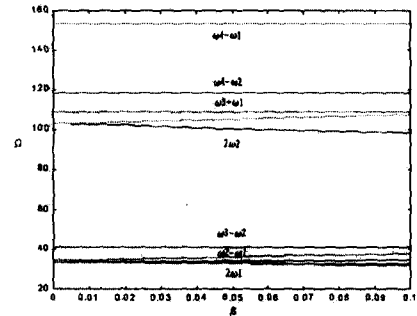


Fig. 3 Parametric instability region of the spinning beam subjected to pulsating follower force without concentrated mass

($S=10^3$, $R=0.0003$, $\bar{I}=0$, $\alpha=0.2$, $\bar{\omega}_s=20$)



(a)



(b)

Fig. 4 Parametric instability region of the spinning beam subjected to pulsating follower force with concentrated mass (a) $\mu=0.3$ (b) $\mu=0.5$ ($S=10^3$, $R=0.0003$, $\bar{M}=0.2$, $\bar{I}=0$, $\alpha=0.2$, $\bar{\omega}_s=20$)

Fig. 4를 보면 집중질량의 위치가 변하더라도 $2\omega_2$ 의 근처에서 불안정 영역이 나타나지만 그 밖의 조합공진 형태들은 집중질량의 위치에 따라 다소 변화하고 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 3과 Fig. 4를 비교해 볼 때 집중질량이 있을 경우 보의 안정성이 증가함을 보여주고 있다.

5. 결론

맥동종동력을 받으며 스핀이 있는 양단자유보에 집중질량이 미치는 동적 안정성을 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 집중질량이 있고 일정한 종동력을 받으며 회전하는 양단 자유 보에 대해 임계 종동력의 값을 구하면 임계값은 회전에 영향을 받지 않지만, 고유진동수 값은 변화한다.

(2) 맥동종동력을 받고 집중질량이 있는 양단자유보에 회전이 있을 경우 불안정한 영역은 여러 곳에서 나타나며, 회전속도에 따라 영역의 크기가 생기고 크기도 변화한다. 이는 회전에 따라 고유진동수 특성이 변하기 때문으로 사료된다.

(3) 집중질량의 효과는 동적 불안정 영역을 줄여 주는 안정화 효과를 보여준다.

참고문헌

1. Bolotin, V. V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, 1963.
2. Beal, T. R., "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrust", AIAA J., Vol.3, No.3, pp.486-494, 1965.
3. Bauer, H. F., "Vibration of Rotating Uniform Beam, Part I: Orientation in the Axis of Rotation", J. Sound and Vibration, Vol.72, No.2, pp.177-189, 1980.
4. Han, P. S. and Zu, J. W., "Modal Analysis of Rotating Shafts : A Body-Fixed Axis Formulation Approach", J. Sound and Vibration, Vol.156, No.1, pp.1-6, 1992.
5. Zu, J. W. and Han, P. S., "Natural Frequencies and Normal Modes of a Spinning Timoshenko Beam with General Boundary Conditions", J. Applied Mechanics, Vol.59, pp 197-204, 1992.
6. Platus, P. H., "Aeroelastic Stability of Slender,

- Spinning Missiles", J. Guidance, Vol.55, No.1, pp. 144-151, 1992.
7. Park, Y. P. and Mote, C. D. Jr., "The Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass", J. Sound and Vibration, Vol.98, No.2, pp.247-256, 1985.
8. Park, Y. P. and Ryu, B. J. "Effect of a Concentrated Mass on the Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force", Proceedings of the KSME/JSME Vibration Conference, pp.309-318, 1987.
9. Sugiyama, Y., Matsuyke, J., Ryu, B. A., Katayama, K., Kinoi, S. and Enomoto, N., "Effect of Concentrated Mass on Stability of Cantilevers under Rocket Thrust", AIAA J., Vol.3, No.3, pp.499-503, 1995.
10. Kim, J. H. and Choo, Y. S., "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force", J. Sound and Vibration, Vol.216, No.6, pp. 623-636, 1998.
11. Kar, R. C. and Sujata, T., "Stability Boundaries of a Rotating Cantiliver Beam with End Mass under a Transverse Follower Excitation", J. Sound and Vibration, Vol.154, No.1, pp.81-93, 1992.
12. Lee, H. P., "Effects of Initial Curvature on the Dynamic Stability of a Beam with Tip Mass Subjected to Axial Pulsating Loads". Int. J. Solids Structures, Vol.32, No.23, pp.3377-3392, 1995.
13. Wang, C. Y., "Free Rotation of an Elastic Rod with an End Mass", J. Applied Mechanics, Vol.53, No.1, pp.864-868, 1986.
14. Lee, H. P., Tan, T. H. and Leng, G. S. B. "Dynamic Stability of Spinning Timoshenko Shafts with a Time-Dependent Spin Rate", J. Sound and Vibration, Vol.199, No.3, pp 401-415, 1997.
15. Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.