

외팔 수직 송수관의 동적안정성에 미치는 복수 부가질량의 영향

0류봉조*, 정승호**, 임경빈***, 류두현**

Influence of Two Attached Lumped Masses on Dynamic Stability of a Vertical Cantilevered Pipe

Bong-Jo Ryu, Seong-Ho Jung, Kyung-Bin Yim and Doo-Hyun Ryu

Abstract

This paper deals with the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid and having two attached masses. Some valves or other mechanical components in pipe systems can be regarded as attached lumped masses. Governing equations are derived by energy expressions, and numerical technique using Galerkin's method is applied to discretize the equations of small motion of the pipe. Effects of attached masses on the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid are investigated for various locations and magnitudes of the attached lumped masses.

1. 서론

축방향으로 내부 유체의 유동을 동반하는 가는 송수관의 진동과 동적안정성에 관한 문제는 공학의 여러분야에 있어 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어져 왔다. 이러한 가는 송수관들의 예는 열교환기 튜브, 핵반응 연료요소들, 제트-펌프(jet-pump), 탐지 및 제어튜브들(monitoring and control tubes), 항공기 엔진에서 열차단막으로 사용되는 가는 열 구조물들, 핵 반응기에서의 열차단막, 유압기계에서의 밸브와 다른 구성요소 등을 들 수 있다.

유동유체에 기인된 송수관 동역학에 관한 최초의 논문은 1939년 Bourrières에 의한 것으로 알려지고 있으나, 제2차 세계대전으로 인해 소실된 것으로 전해져오고 있다.

실제적인 최초의 연구는 Ashley 와 Haviland⁽¹⁾에 의하여 이루어졌는데, 그들은 Trans-Arabian

송수관에서 관찰된 진동현상을 규명하려는 시도를 하였다. 그후 Benjamin⁽²⁻³⁾은 2자유도를 갖는 분절된 송수관(articulated pipe)의 동역학에 관한 연구를 이론과 실험을 통하여 검증하였다. 그가 연구한 내용의 핵심은 송수관이 양단 단순지지인 경우에는 송수관 내부를 흐르는 유체에 의한 힘은 보존적(conservative)이고, 송수관은 발산(divergence) 형태에 의해 불안정이 이루어지고, 유체가 분출되는 송수관의 끝단이 자유 경계조건인 경우에 있어서는 유동유체의 힘은 비보존적(non-conservative)이고 플러터형태의 불안정이 발생한다는 것이었다.

이와 같이 순수 내부 유동유체만에 의해 유발되는 송수관의 불안정 현상에 관한 연구들과 함께 중력의 영향을 고려한 연구⁽⁴⁾라든지, 스프링 지지된 송수관의 동적안정성 연구들⁽⁵⁾도 이루어져 왔다.

또한, 송수관에 연결된 밸브 및 다른 구성요소들을 집중질량으로 간주한 연구들도 이루어져 왔는데, 이에 관한 연구의 출발은 Hill과 Swanson⁽⁶⁾으로써, 이들은 다중 부가질량을 갖는 수평 외팔 송수관의 동적안정성에 관한 이론 및 실험적 연구를 하였다.

* 대전산업대학교 기계설계공학과

** 한국원자력연구소

*** 동양공업전문대학 기계과

그러나 위의 대부분의 연구들은 수평 송수관에 관한 것이거나, 송수관의 동적안정성에 미치는 부가질량, 스프링지, 감쇠, 중력들의 개별적인 효과에 대한 연구들에 집중된 것이었다.

최근 Paidoussis⁽⁷⁾는 그의 저서를 통해 송수관의 진동 및 동적안정성에 관한 문제들과 실제에의 적용가능성에 관한 설명을 상세히 정리하였다.

본 연구에서는 송수관의 내부감쇠, 송수관과 부가질량의 중력효과를 모두 고려한 복수 부가질량을 갖는 외팔 수직 송수관에 대해, 복수 부가질량들의 위치와 크기 변화가 송수관의 동적안정성에 미치는 영향들을 수치해석적으로 연구하였다.

2. 문제의 기술

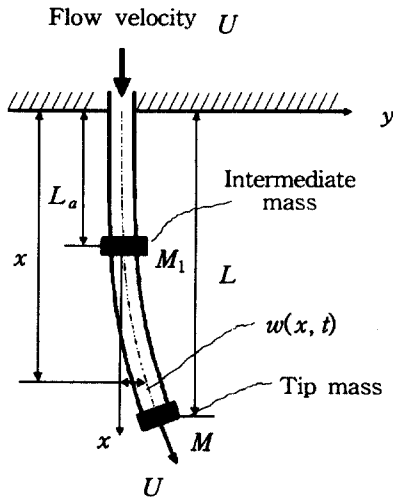


Fig. 1 A vertical cantilevered pipe conveying fluid and having two attached masses.

Fig. 1은 말단질량 M 과 임의의 위치 L_a 에 중간질량 M_1 의 복수 부가질량을 갖고 내부 유동유체의 유속 U 에 의해 운동하는 외팔 수직 송수관의 모델을 보여준다. Fig. 1 모델에 대한 운동방정식을 얻기 위해 다음과 같은 에너지 표현식을 사용한다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_f \left\{ U^2 + 2U \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx$$

$$+ \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{\partial w(L_a, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L mg(L-x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_1 g \int_0^L \{1 - H(x-L_a)\} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} Mg \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$\delta W_{nc, id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (3)$$

$$\delta W_{c, ed} = - \int_0^L C \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx \quad (4)$$

$$\delta W_f = - m_f U \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + U \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta w \Big|_{x=L} + m_f U^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (5)$$

식(1)-(5)에 있어서, m_p 와 m_f 는 각각 송수관과 유체의 단위길이당 질량을 나타내고, E 는 송수관의 영률, I 는 단면의 2차모멘트, m 은 $m_f + m_p$, g 는 중력가속도, H 는 Heviside 단위 계단함수를 나타낸다. 또한, E^* 는 점성저항계수(viscous resistance coefficient), C 는 외부 점성감쇠계수(coefficient of external viscous damping)를 나타낸다.

식(1)에서 (5)를 확장된 해밀톤 원리(extended Hamilton's principle)에 대입하고 변분을 정리한 후, 계산상의 편의를 위하여 다음과 같은 무차원화된 파라미터들과 좌표들

$$\beta = \frac{m_f}{m}, \quad u = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad \varphi = \frac{mgL^3}{EI},$$

$$\bar{M}_1 = \frac{M_1 g L^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \nu = \frac{CL^2}{\sqrt{EI}m},$$

$$\bar{M} = \frac{MgL^2}{EI}, \quad M^* = \frac{M}{mL}, \quad \alpha = \frac{M_1}{mL},$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_1 = \frac{L_a}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (6)$$

을 도입하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \cdot \partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ & + \varphi \left\{ \frac{\partial w}{\partial \xi} - (1-\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} \\ & + \nu \frac{\partial w}{\partial \tau} - \bar{M} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \alpha \delta(\xi - \xi_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \\ & - \bar{M}_1 (1 - H(\xi - \xi_1)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^3} + \gamma \frac{\partial^4 w(1, \tau)}{\partial \xi^3 \partial \tau} \\ & - \bar{M} \frac{\partial w(1, \tau)}{\partial \xi} - \bar{M} \frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$w(0, \tau) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

이제 식(7)의 해 $w(\xi, \tau)$ 를 내부 유동유체가 없는 경우의 한단고정-타단자유의 경계조건을 만족시키는 고유함수(eigen-function)

$$\phi_j(\xi) = \cosh s_j \xi - \cos s_j \xi - \sigma_j (\sinh s_j \xi - \sin s_j \xi) \quad (12)$$

를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\tau) \phi_j(\xi) \quad (13)$$

여기서, s_j 는 외팔보의 j 번째 고유치(eigen-value)이며, σ_j 는 다음과 같다.

$$\sigma_j = \frac{\sinh s_j - \sin s_j}{\cosh s_j + \cos s_j} \quad (14)$$

식(13)으로 가정된 해를 식(7)에 대입하여 Galerkin 적분을 최종 정리하면 다음과 같은 행렬 형태의 방정식을 얻게된다.

$$[A] \{\ddot{a}\} + [B] \{\dot{a}\} + [C] \{a\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서, 각 행렬들 $[A], [B], [C]$ 의 성분들은 다음과 같다.

$$A_{ij} = \delta_{ij} + M^* \phi_i(1) \phi_j(1) + \alpha \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_1) \quad (16)$$

$$B_{ij} = (s_j^4 \gamma + \nu) \delta_{ij} + 2u\beta^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi \quad (17)$$

$$\begin{aligned} C_{ij} = & s_j^4 \delta_{ij} + \varphi \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi + (u^2 - \varphi) \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi \\ & + \varphi \int_0^1 \xi \phi_i \phi_j'' d\xi - \bar{M} (\phi_i, \phi_j') \\ & + \bar{M} \phi_i(1) \phi_j'(1) - \bar{M}_1 (\phi_i, \phi_j'') \end{aligned} \quad (18)$$

식(15)는 고유치 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 1차 미분형태

$$\{\dot{Z}\} = [P] \{Z\} \quad (19)$$

로 변환되며, 여기서,

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} \dot{a} \\ a \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} -[V] & -[W] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[V] = [A]^{-1}[B], \quad [W] = [A]^{-1}[C] \quad (20)$$

이고, $[I]$ 는 단위행렬을 나타낸다.

이제 식(19)의 고유치를 λ_i 라 할 때, 송수관의 안정성은 이 고유치 λ_i 에 의해 지배되며 일반적으로 감쇠가 존재하는 경우의 고유치는 복소수 형태로 표현된다.

3. 수치해석 결과 및 검토

벨브 등으로 간주될 수 있는 두 개의 복소 부가 질량을 갖고 내부 유동유체의 유속변화에 따른 송수관의 동적 안정성에 대한 수치해는 Galerkin방법에 의한 10항 근사해에 의해 결과를 얻었으며, 부

가질량이 없는 경우의 다른 문헌들의 결과와 비교하여 근사한 일치를 보임으로써 본 논문의 수치해의 타당성을 검토하였다.

Fig. 2는 말단질량비 M^* 가 $M^*=0.2$ 일 때 중간질량비 α 가 $\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, 중간질량의 위치 ξ_1 이 고정단으로부터 $\xi_1=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 일 때에 대한 임계 유속값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 중간질량의 위치 ξ_1 의 값에 관계없이 중간질량비 α 값의 증가에 따라 임계 유속값은 증가된다는 것이다. 또한, 최대 임계 유속 u_{cr} 은 $\xi_1=0.6$ 부근, 중간질량비 $\alpha=1.0$ 일 때 $u_{cr}=8.67$ 이었다.

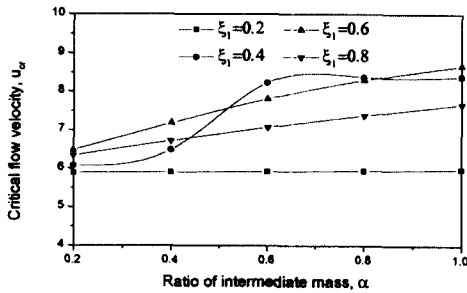


Fig. 2 Critical flow velocity depending on the position and the magnitude of the intermediate mass ($M^*=0.2$).

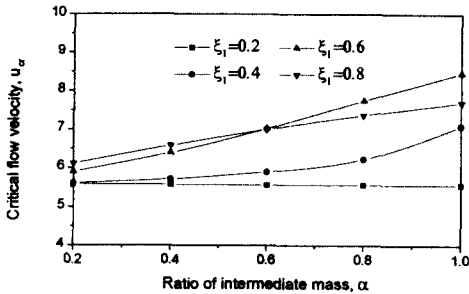


Fig. 3 Critical flow velocity depending on the position and the magnitude of the intermediate mass ($M^*=0.4$).

Fig. 3은 $M^*=0.4$ 일 때 중간질량비 α 와 중간질량 위치 ξ_1 의 변화에 따른 임계 유속값을 나타낸 그림이다. 이 경우 중간질량의 위치 ξ_1 이 $\xi_1=0.2$ 일 때는 중간질량의 크기가 증가함에 따라 임계 유속은 경미하나마 감소되고, ξ_1 이 $\xi_1 \geq 0.4$ 에서는 Fig. 2에서와 같이 α 의 증가에 따라 임계 유속값

은 증가됨을 알 수 있다. 또한, 최대 임계 유속값은 $\xi_1=0.6$ 에서 중간질량비 α 가 $\alpha=1.0$ 일 때 일어남을 알 수 있다.

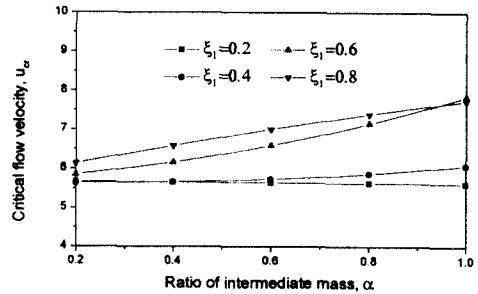


Fig. 4 Critical flow velocity depending on the position and the magnitude of the intermediate mass ($M^*=0.6$).

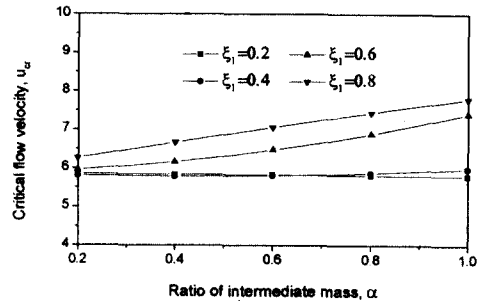


Fig. 5 Critical flow velocity depending on the position and the magnitude of the intermediate mass ($M^*=0.8$).

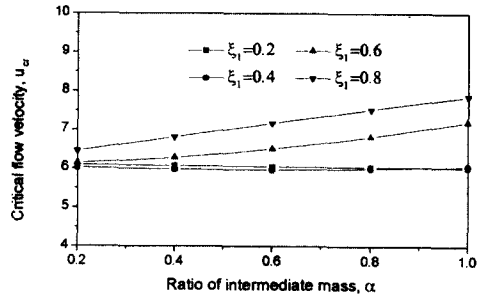


Fig. 6 Critical flow velocity depending on the position and the magnitude of the intermediate mass ($M^*=1.0$).

Fig. 4에서 Fig. 6은 각각 말단질량비 M^* 가 $M^*=0.6, 0.8, 1.0$ 일 때에 대해 중간질량의 질량비와 위치 변화에 따른 임계 유속값을 나타내는 그림들이다.

$M^*=0.6$ 의 Fig. 4에서는 Fig. 3의 $M^*=0.4$ 의 경우와 마찬가지로 중간질량의 위치 $\xi_1=0.2$ 에서는 중간질량비 α 의 증가에 따라 임계유속값은 감소되나 $\xi_1 \geq 0.4$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계유속값은 증가된다. 이 경우 최대 임계유속도 $\xi_1=0.6$, $\alpha=1.0$ 에서 발생한다. Fig. 5의 $M^*=0.8$ 과 Fig. 6의 $M^*=1.0$ 의 경우는 중간질량의 위치 ξ_1 이 $\xi_1=0.2$ 일때는 α 의 증가에 따라 임계유속값이 감소되고 $\xi_1=0.4$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계유속값이 감소했다 다시 증가하는 경향을 보였다. 그러나, $\xi_1 \geq 0.6$ 에서는 α 의 증가와 함께 임계유속값이 증가하는 경향을 보였으며, 각각의 경우에 있어 최대 임계유속값은 $\alpha=1.0$, $\xi_1=0.8$ 에서 일어남을 알 수 있다.

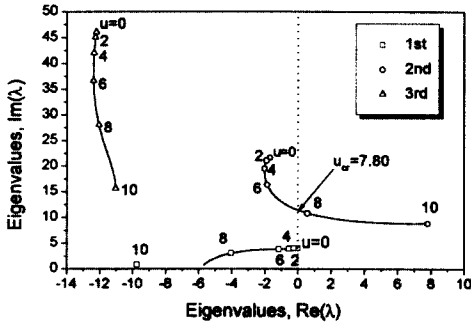


Fig. 7 Eigenvalue curves with two attached masses ($M^*=0.8$, $\alpha=1.0$, $\xi_1=0.8$).

Fig. 7은 말단질량의 크기 M^* 가 $M^*=0.8$, 중간질량비 $\alpha=1.0$ 인 경우, 중간질량의 위치 $\xi_1=0.8$ 일 때에 대한 처음 낮은 3개의 고유치 변화율 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 유속이 $u=0$ 부터 $u=10$ 까지 변화되는 동안 1st 모드와 3rd 모드에 의해서는 송수관은 안정함을 나타내지만 2nd 모드에 의해 불안정이 발생함을 알 수 있고 이때의 임계유속 u_{cr} 은 $u_{cr}=7.80$ 으로 나타났다.

4. 결론

복수 부가질량을 갖고 유동유체에 의해 운동하는 송수관의 동적안정성에 관한 수치해석결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 고정된 말단질량비에 대해 중간질량의 위치 ξ_1 이 $\xi_1 \geq 0.6$ 에서는 중간질량비 α 값이 증가함에

따라 임계유속값은 항상 증가한다.

2. 중간질량의 위치 ξ_1 이 $\xi_1=0.2$ 에 있어서, 말단질량비 $M^* \geq 0.4$ 에서는 중간질량비 α 가 증가함에 따라 임계유속값이 감소되나, $M^*=0.2$ 에서는 증가된다. 그러나, $\xi_1=0.4$, $M^* \leq 0.6$ 에서는 α 의 증가에 따라 증가되고, $M^* > 0.6$ 에서는 α 의 증가에 따라 임계유속값이 감소했다 다시 증가한다.
3. 말단질량비 M^* 가 $M^* \leq 0.6$ 에서는 최대 임계유속은 중간질량비 $\alpha=1.0$, 중간질량 위치 $\xi_1=0.6$ 부근에서 일어나고, $M^* > 0.6$ 에서는 $\alpha=1.0$, $\xi_1=0.8$ 부근에서 일어난다.

참고문헌

1. Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.17, pp.229~232.
2. Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol.261, pp.457~486.
3. Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol.261, pp.487~499.
4. Paidoussis, M. P., 1970, "Dynamics of Tubular Cantilevers Conveying Fluid", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.12, pp.85-103.
5. Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid", Journal of Sound and Vibration, Vol.100, pp.257~270.
6. Hill, J. L. and Swanson, C. P., 1970, "Effect of Lumped Masses on the Stability of Fluid Conveying Tubes", Journal of Applied Mechanics, Vol.37, pp.494-497.
7. Paidoussis, M. P., 1998, Fluid-Structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow, Vol. 1, Academic Press, pp.196~276.