

등가소스법을 이용한 공간 내의 음장 모델링에서 경계면 조건 오차의 최소화에 관한 연구

백광현

A Study on Minimising the Errors on the Boundary Conditions when Using an Equivalent Source Technique for a Modelling of Sound Field inside an Enclosure

Kwang-Hyun Baek

Abstract

The equivalent source method is used to calculate the internal pressure field for an enclosure which can have arbitrary boundary conditions and may include internal objects which scatter the sound. Some of the equivalent positions are chosen to be the same as the first order images of the source inside the enclosure, some are positioned on a spherical surface some distance outside the enclosure. The normal velocity on the surfaces of the enclosure walls is evaluated at a larger number of positions than there are equivalent sources. The sum of the squared difference between this velocity and the expected is minimized by adjusting the strength of the equivalent sources. The convergence of this method is checked by evaluating the velocity error at a larger number of monitoring positions. Example results are presented for various numbers of sources and evaluation points. The results showed that in general the more equivalent sources increased the accuracy of the sound field predictions but the accuracy is not too much sensitive to the numbers of evaluation points.

1. 서론

음향장은 여러 가지 방법을 통하여 모델링이 가능하다. 특히 복잡한 형태를 가지는 음향장에는 유한요소법 (Finite Element Method)이나 경계면 요소법 (Boundary Element Method) 등이 많이 이용되고 있다. 유한요소법의 경우에는 무한한 개수의 요소를 포함할 수 없으므로 자유 음장에서 방사 문제에는 적용하기가 어려우며 주로 내부 음장 모델링에 많이 이용된다. 반면에 경계면요소법의 경우에는 자유음장에서 방사 문제에 적용하기가 용이하지만 경계면에서의 특이점과 특정 파

동수에서 해의 존재가 유일하지 않다는 문제 때문에 어려움이 있다. 이러한 관점에서 Koopman[1] 등은 경계면요소법에 대한 대용책으로 등가소스법 (Equivalent Source or Superposition Method)을 제시하였다. 이 방법은 상대적으로 적은 양의 계산으로 자유 음장에서 방사와 음장 내에 존재하는 물체에 의한 산란을 해석할 수 있게 한다. 기타 이 방법에 대한 유용성에 대한 것은 참고 문헌 [2], [3] 등에서 볼 수 있으며 능동소음제어에도 응용되었다.[4]

등가소스법은 경계면요소법에 비하여 상대적으로 간단한 방법의 소스 배치와 계산으로 실내 음장의 해석을 가능하게 한다. 이러한 간단성은 소

스들을 경계면으로부터 원거리에 배치함으로써 얻어진다. 이러한 소스 배치는 경계면요소법에 상반되는 방법으로 경계면에서의 압력, 속도 등이 연속적이면서 완만히 변화하는 경우에 유리하다. 본 연구에서는 실내에 위치한 음원에 의한 실내 음장을 모델링하기 위하여 원방에 위치한 다수의 등가소스와 상대적으로 근방에 위치한 소수의 이미지 소스들을 사용하였다. 일반적으로 이 소스들은 실내외를 구분 짓는 벽을 모델링 하기 위하여, 경계면에 위치한 유한한 개수의 지점에서, 대개는 균일하게 분포한, 경계면 조건을 만족하도록 소스의 강도와 위상이 정해진다. 이 경우 많은 지점에서의 경계면 조건의 오차 확인은 정확한 경계면 형성에도움을 주어 계산 결과의 정확성을 높여 주지만 이에 상응하는 많은 계산 량을 요구하게 된다. 본 연구에서는 이러한 비효율성을 방지하기 위한 최소한의 오차 확인 지점에 관하여 다루고자 한다.

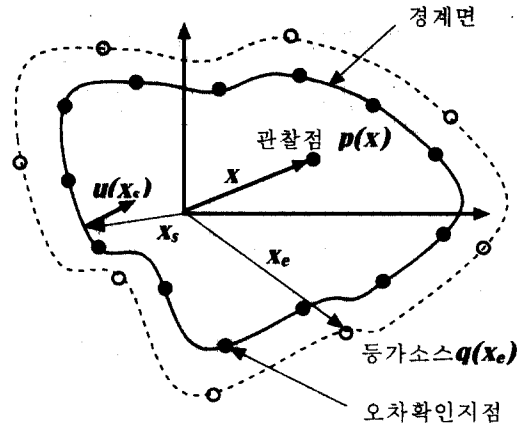


Fig. 1 The sketch of equivalent source method. The pressure and normal velocity are evaluated at a finite number of positions on the boundary.

2. 등가소스법을 이용한 실내 음장의 모델링

일반적으로, 특정 공간 밖의 소스들에 의하여 그 공간 내에 형성된 음장은 경계면에서의 법선 방향의 입자 속도와 압력에 의해 결정되어 질 수 있음은 Kirchhoff-Helmholtz식으로부터 잘 알려져 있다. 이를 기반으로, 실내 공간과 같이 물리적으로 존재하는 경계면에 의해 공간 내/외에 특정 지어지는 음장은, 경계면의 다른 한 쪽에 존재하는 소스들을 물리적 경계면에서 요구하는 조건(속도)을 만족하도록 잘 조정하면 물리적 공간에 의해 생성된 것과 매우 유사한 음장을 형성할 수 있다는 것이 등가소스법의 기본 원리이다.

Fig.1은 유한한 개수의 단극 소스(monopole source)를 이용한 등가소스법의 개념도이다. 실질적으로 경계면의 모든 지점에서 압력과 속도를 조사할 수 없으므로, 일반적으로는 충분히 많은 수의 지점을 정하여 그 곳에서 주어진 오차 범위 안에서 경계면 조건을 만족하는가를 검증하게된다. 임의의 주파수에서 경계면조건 확인 지점에서의 압력은 다음과 같이 복소 벡터 p 로서 나타낼 수 있다.[5]

$$p = p_{int} + p_{ext} = p_{int} + Z_e q_e \quad (1)$$

여기서 실내 공간 내부에 있는 내부 음원 소스에 의한 경계면에서의 압력은 p_{int} , 외부 등가 소스에 의한 경계면에서의 압력은 p_{ext} , 등가소스와 오차 확인지점간의 전달함수인 복소 임피던스 매트릭스

는 Z_e , 그리고 등가소스 강도는 q_e 로 나타내었다. p_{int} 와 u_{int} 는 내부 소스의 위치와 강도만 주어진 자유 음장에서 그린함수 (Green's function)를 이용하여 쉽게 구할 수 있는 값들이다. 또한, m 번째 오차 확인지점과 n 번째 등가소스간의 임피던스는 다음과 같이 자유 음장에서 그린함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$Z_{e,mm} = jkc\rho G(|x_{sm} - x_{en}|) \quad (2)$$

여기서 k, c, ρ 는 각각 파동수(wave number), 유체 내에서의 음속, 유체 밀도를 나타낸다.

경계면에서의 법선 방향의 입자 속도 u 도 앞서와 유사한 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = u_{int} + u_{ext} = u_{int} + T_e q_e \quad (3)$$

이 경우 T_e 는 등가소스 강도와 경계면에서의 법선 방향 속도의 상관 관계를 나타내는 매트릭스로서 자유 음장에서 그린함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{e,mm} = \frac{\partial G(|x_{sm} - x_{en}|)}{\partial n_m} \quad (4)$$

한편, 경계면에서의 압력과 법선 방향 속도는 경계면을 특성 짓는 모빌리티(또는 admittance) 매트릭스 Y_b 에 의하여 다음과 같은 관계를 갖는다고 볼 수 있다.

$$u = Y_b p \quad (5)$$

여기서 Y_b 는 경계면 각 지점에서 상호간의 모빌리티 특성을 나타내며 외부 음장은 아무런 영향을 미치지 않는다고 가정한다.

식(1), (3), (5)를 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u}_{int} + \mathbf{T}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{Y}_b [\mathbf{p}_{int} + \mathbf{Z}_e \mathbf{q}_e]. \quad (6)$$

만약 경계면의 오차 확인 지점의 수와 동일한 수의 등가소스를 이용한다면 등가소스의 강도는 임의의 경계면 모빌리티 매트릭스 Y_b 에 대하여 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{q}_e = -[\mathbf{T}_e - \mathbf{Y}_b \mathbf{Z}_e]^{-1} [\mathbf{u}_{int} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p}_{int}]. \quad (7)$$

이 경우 경계면이 강체 표면(hard surface)의 특성을 갖는다면 Y_b 는 0으로 수렴하게 되고 $\mathbf{u} = 0$ 가 된다. 그러므로 식(7)은

$$\mathbf{q}_e = -\mathbf{T}_e^{-1} \mathbf{u}_{int} \quad (8)$$

와 같은 간단한 형태가 된다. 그러나 이러한 fully determined system에서는 오차 확인 지점에서 경계면 조건을 정확히 만족시킬 수는 있지만 그 밖의 지점들, 예를 들어 경계면 조건 확인 지점과 지점 사이에서는 큰 오차를 유발할 가능성이 매우 크다. 이러한 단점을 극복하기 위해서 많이 사용하는 방법은 오차 확인 지점의 수를 등가소스의 수보다 늘려 overdetermined system의 문제로 바꾸는 것이다. 이 때 $[\mathbf{T}_e - \mathbf{Y}_b \mathbf{Z}_e]$ 는 더 이상 정방형(square) 매트릭스가 아니므로 경계면 조건 확인 지점에서 더 이상 정확히 오차를 0으로 만들 수 없다. 이 경우 등가소스는 경계면 조건 확인 지점에서의 오차를 최소화하는 방향으로 설정될 수 있으며, 다음과 같이 등가소스가 존재하지 않을 때의 경계면 속도 값을 이용하여 무차원화한 형태로 나타낼 수 있다.

$$E = \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}{\mathbf{u}_{int}^H \mathbf{u}_{int}}. \quad (9)$$

(3)식을 (9)식에 넣어 정리하면 오차 E 는 등가소스 강도의 이차함수(quadratic function)로 나타내어지며 최소값은 등가소스 강도의 값이 다음과 같을 때이다.

$$\mathbf{q}_e = -[\mathbf{T}_e^H \mathbf{T}_e]^{-1} \mathbf{T}_e^H \mathbf{u}_{int}. \quad (10)$$

여기서 H 는 Hermitian transpose를 나타낸다. 만약 강체 표면이 아닌 유한한 값의 admittance를 갖는 경계면이라면 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$E = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p})^H (\mathbf{u} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p})}{(\mathbf{u}_{int} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p}_{int})^H (\mathbf{u}_{int} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p}_{int})} \quad (11)$$

이 경우 역시 오차 값은 등가소스 강도의 이차 함수로 표현되며 소스 강도가 다음과 같을 때 최소값을 가지게 된다.

$$\mathbf{q}_e = -[(\mathbf{T}_e - \mathbf{Y}_b \mathbf{Z}_e)^H (\mathbf{T}_e - \mathbf{Y}_b \mathbf{Z}_e)]^{-1} \times (\mathbf{T}_e - \mathbf{Y}_b \mathbf{Z}_e)^H (\mathbf{u}_{int} - \mathbf{Y}_b \mathbf{p}_{int}). \quad (12)$$

이와 같은 방식으로 등가소스법을 이용할 경우 아직도 남는 문제는, 이미 지정한 유한한 개수의 오차 확인 지점 이외의 경계면 지점에서도 오차 확인 지점에서 만큼의 정확도나 그 이상으로 경계면 조건을 만족하는가에 있다. 즉, 전체 가상 벽면에서 경계면 조건의 수렴성을 어떠한 방법으로 검증하느냐이다. 등가소스법의 경우에는 같은 개수의 등가소스를 이용하더라도 소스 위치의 배치 방법에 따라 무한히 많은 조합이 가능하기 때문에 경계면 조건의 만족성을 어느 특정한 위치로 국한하기가 거의 불가능하다. 이러한 수렴성을 확인하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있겠으나, 본 연구에서는 소스 강도 계산에 이용되었던 경계면 오차 확인 지점보다 훨씬 많은 수의 지점에서 경계면 조건을 만족하는가를 평가하여 수렴성을 검증하였다. 예를 들자면, 100곳의 지점에서 경계면 조건을 만족(오차를 최소화)하도록 식(10) 또는 (12)에서 계산된 소스강도가 100곳의 몇 배 이상 되는 지점에서 얼마만큼의 오차를 가지고 경계면 조건을 만족하는가를 식(9)나 (11)의 형태로 계산하여 확인하였다.

실내 공간의 음장 모델링에 있어서 벽면의 뎀핑 효과는 다음과 같이 자유 음장에서의 그린함수에 복소 파동수(complex wave number) k' 를 도입하여 처리하였다.[5]

$$k' = k(1 - j\alpha). \quad (13)$$

Modal 모델을 이용한 실내 음장에 대한 그린함수는 k_n, φ_n 을 n 번째 모드 eigenvalue와 eigenfunction이라 할 때 다음과 같이 주어진다.[6],

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{V(k_n^2 - k^2)} \quad (14)$$

(13)식을 (14)식에 넣어 정리하면 $\alpha \ll 1$ 인 경우에 다음과 같이 근사적으로 표현 할 수 있다.

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{V[(k_n^2 - k^2) + 2jak^2]} \quad (15)$$

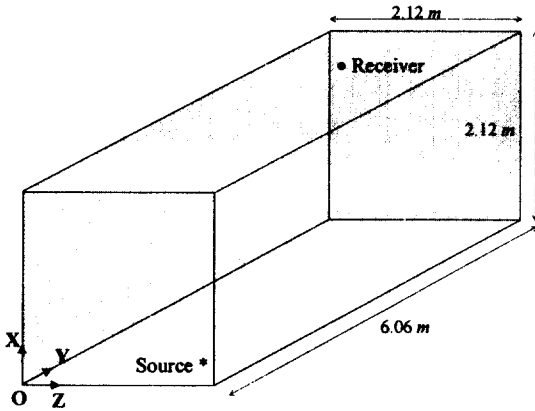


Fig. 2 The enclosure configuration and the positions of internal source and receiver.

3. 계산 결과

Fig.2에 보이는 것과 같은 공간 내에 존재하는 단극 소스에 의한 음장을 등가소스법을 이용하여 계산하였다. 소스에 의한 리시버위치에서의 주파수 응답함수를 구하여 여러 가지 경우에 대한 계산 결과를 비교하였다. 등가 소스들을 이용한 가상 벽면의 형성을 위하여 벽면(경계면)의 외부에 Fig.3에 보이는 것과 같이 소스들을 배치하였다. 소스들은 Fig.3과 같이 1차 이미지 소스들과 등거리 원방에 위치한 구의 표면에 위치하는 소스들로 구성되어 있다. 이미지 소스들을 이용한 이유는, 순수히 원방에 위치한 소스들로 공간 내부에 위치한 단극소스의 영향으로 인한 경계면 조건을 정밀하게 만족시키기 위해서는 상당히 많은 수의 소스들이 필요로 하는 비효율성을 극복하기 위해서이다.

여러 가지 경우에 대한 계산 결과, 이미지 소스들의 경우 1차 이상의 이미지 소스들의 포함은 계산 속도 향상이나 경계면 오차의 감소에 별다른 영향을 주지 못하였다. 이에 따라 이미지 소스들의 수를 1차로 제한하였다. 3차원 공간에서는 1차 이미지 소스들의 수는 총 26개가 된다. 이렇게 이미지 소스들의 수를 변화 시켜가면서 Fig.2에 보인 소스와 리시버 사이의 주파수 응답함수를 구하여 Fig.4에 비교하였다. 그림에서 보는 바와 같이 총 222개(이

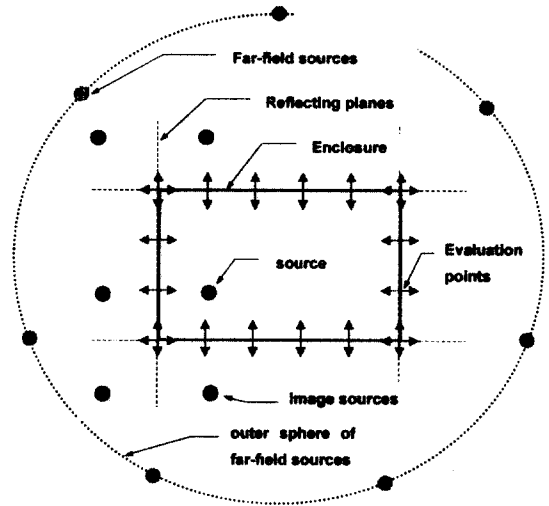


Fig. 3 The equivalent source positions used to calculate the response of a rectangular enclosure with a single monopole source.

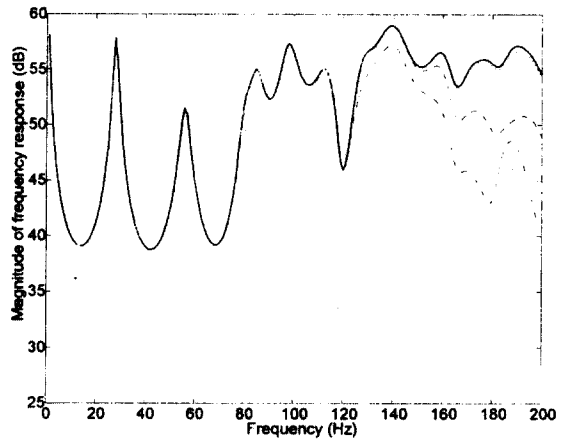
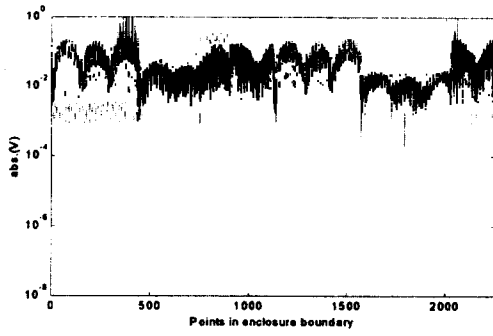


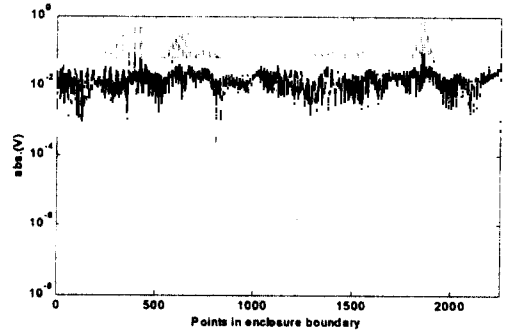
Fig. 4 The magnitude of frequency response between the source and receiver for various numbers of far field source; 38(dotted), 70(dash dot), 110(dashed), 166(thick dotted) and 196(solid).

미지 소스 26개 + 원방 소스 196개)이상의 소스사용은 200Hz까지의 범위에서는 별 다른 이득이 없음을 명백히 보여주고 있다. 또한 계산 결과의 수렴성을 부가적으로 잘 보여주고 있다. 총 222개의 소스들을 이용한 계산 결과는 modal model에 의한 계산 결과와 비교되었는데 거의 완벽한 일치로 보여 주었다.

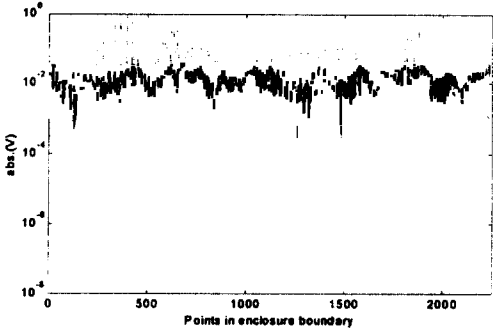
Fig.5는 이미지 소스만을 사용했을 때를 기준으로 하여 경계면 조건 오차 확인 지점의 수와 원방



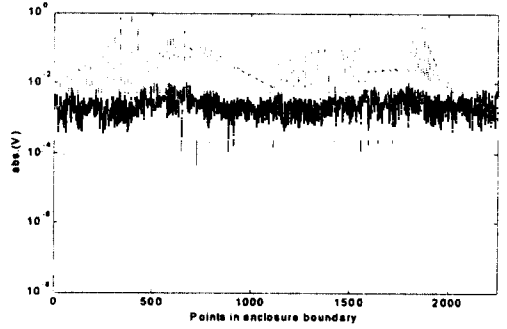
(a) evaluation points=[4 8 4], source=110, 176Hz



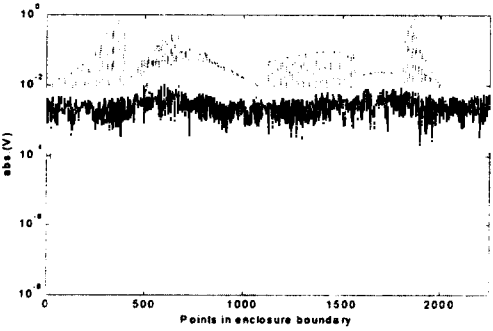
(b) evaluation points=[7 16 7], source=110, 176Hz



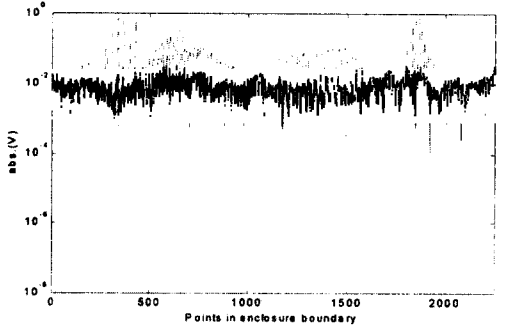
(c) evaluation points=[11 24 11], source=110, 176Hz



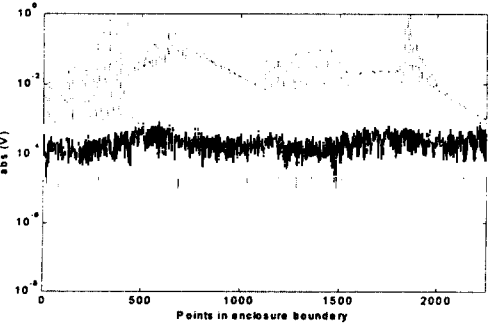
(d) evaluation points=[11 24 11], source=166, 176Hz



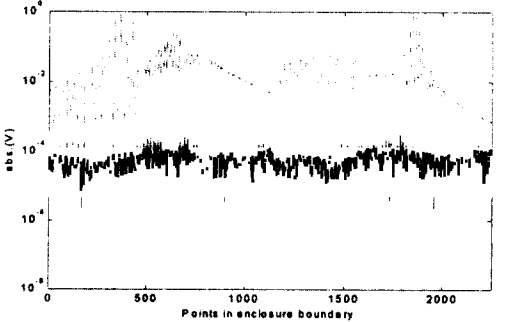
(e) evaluation points=[7 16 7], source=166, 176Hz



(f) evaluation points=[7 16 7], source=136, 176Hz



(g) evaluation points=[7 16 7], source=226, 176Hz



(h) evaluation points=[7 16 7], source=110, 88Hz

Fig. 5 The variation of velocity errors at all of the evaluation points.

소스 수의 영향을 보여주고 있다. 오차 확인 지점의 수는 $[a \ b \ c]$ 의 형태로 나타낸 수로서 표현하고 있다. a, b, c는 각각 x, y, z축 방향으로 6개의 벽면을 균등 분할하는 수를 나타내는데, 분할선의 교차점에서 경계면 조건의 오차 확인을 하게 된다. 즉, 전체적으로는 $2 \times (a \times b + b \times c + c \times a)$ 만큼의 수가 된다. 각 그림에서 x축 방향은 오차 확인 지점을 임의의 순서로 나열한 것이며 y축 방향 각 지점에서의 입자 속도의 절대값을 나타낸 것이다. Fig.5의 (a)에서 (g)까지는 176Hz에서의 결과이며 (h)는 88Hz에서의 계산 결과이다. 그림(a)~(c)는 원방소스의 수를 110개로 고정시키고 오차 확인 지점 수의 영향을 비교하였다. 전반적으로 [7 16 7]개 이상은 계산 효율 면에서 별 이득이 없었다. (d)는 (c)에 비하여 원방소스의 수를 110개에서 166개로 증가시킨 것으로 확연히 오차가 줄어들었음을 볼 수 있다. (b), (e), (f), (g)는 오차 확인 지점의 수를 [7 16 7]로 고정시키고 원방 소스의 영향을 비교한 것으로 원방 소스의 수가 증가할수록 오차가 줄어들고 있음을 알 수 있다. (h)는 (b)에 비하여 주파수만이 차이가 있다. 명백히, 저주파에서는 같은 수의 소스와 경계면 오차 확인 지점이 사용되었을 경우 상대적으로 오차를 줄일 수 있음을 잘 보여주고 있다. 그러나 또 다른 계산 결과들은 단순히 등가 소스의 수를 늘인다고 항상 경계면 오차가 줄어들지는 않는다는 것을 보여주었다. 이는 소스의 수가 오차 확인 지점의 수에 근접함에 따라, 그리고 소스와 소스 사이의 거리가 너무 근접함에 따라 ill-conditioned system의 문제가 되어 매트릭스의 역을 계산할 때 오히려 정확도를 떨어뜨리는 역할을 했기 때문으로 분석되었다.

4. 토의 및 결론

본 연구에서는 실내 공간에서의 음장을 등가소스법을 이용하여 모델링 하였다. 실내에 위치한 소음원에 의한 공간내부의 음장을 효과적으로 모델링 하기 위하여 이미지 소스들과 원방에서의 소스들을 사용하였다. 등가소스법의 사용 가능성은 경계면에서의 조건을 만족하도록 소스 강도들을 잘 조정할 수 있으나에 의존한다. 등가소스법의 정확도는 사용되는 소스의 수와 경계면 오차 확인 지점의 수에 따라 달라지는데, 일반적으로 소스의 수는 많을수록 좋으나 오차 확인 지점의 수는 어느 이상 사용하는 것은 계산상의 비효율성만을 가져

올 뿐이다.

본 논문에서는 원방 소스와 경계면에서의 오차 확인 지점의 수에 집중하여 연구하였으나, 그 위치는 대상 공간에 걸쳐 균일한 분포를 이루도록 한정하였다. 그러나 오차 확인 지점과 소스의 위치가 최적화 될 수 있다면, 적은 수의 오차 확인 지점과 소스를 사용하더라도 보다 정확한 음장 예측이 적은 양의 계산만으로도 가능 할 것으로 보이며 이는 추후 진행될 연구 사항이다.

참고 문헌

- [1] G. H. Koopman, L. Song and J. B. Fahline 1989, "A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition", Journal of Acoustic Society of America 86, 2433-2438.
- [2] L. Song, G. H. Koopman and J. B. Fahline 1991, "Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields", Journal of Acoustic Society of America 89, 2625-2633.
- [3] J. B. Fahline and G. H. Koopman 1991, "A numerical solution for the general radiation problem based on the combined methods of superposition and singular-value decomposition", Journal of Acoustic Society of America 90, 2808-2819.
- [4] L. Song, G. H. Koopman and J. B. Fahline 1991, "Active control of the acoustic radiation of a vibrating structure using a superposition formulation", Journal of Acoustic Society of America 89, 2786-2792.
- [5] M. E. Johnson, S. J. Elliott, K-H Baek and J. Garcia-Bonito 1998, "An equivalent source technique for calculating the sound field inside and enclosure containing scattering objects", Journal of Acoustic Society of America 104, 1221-1231.
- [6] P. A. Nelson and S. J. Elliott 1992, "Active control of sound", Academic press, London.