

축소 건물모델의 모달 파라미터 추정에 관한 연구

°박 해동*, 박 진일*, 최 현*, 김 두훈*

A Study on the Modal Parameters of the scaled building structure

Hae-Dong Park, Jin-Il Park, Hyun Choi, Doo-Hoon Kim

ABSTRACT

The physical properties of the spatial model, mass, stiffness and damping matrix, can be defined by a specific natural frequency, damping ratio and mode shape. These modal parameters can be determined from a set of frequency response function(FRF) measured by exciting the structure and measuring the responses at various points around the structure.

In this paper, The Transfer Matrix is obtained by experimental modal analysis for the 3-story scaled building model which TMD is installed on top and the physical properties of the spatial model is determined using the residue matrix and the location of poles from FRF measurement using polynomial curve fitting methods.

1. 서론

풍하중이나 지진하중에 의한 건물의 공진현상은 새로운 건축공법과 재료의 개발에 의해 건축구조물이 유연하면서도 증량이 가벼워져 더욱 문제시되고 있다. 건축구조물의 수평응답은 건물의 1차 모드에 의해 대부분의 응답이 기여하며 건축구조물의 응답제어를 위해 구조물의 이론적/실험적 특성파악을 통하여 각종 제어장치의 적용과 구조물의 동특성 변경을 수행하고 있다. 실험을 통한 구조물의 질량, 강성, 감쇠를 파악하기 위해 실험적모드해석이 적용되고 있으나 대형 구조물의 경우 가진방법의 어려움, 측정모드수의 제한으로 인해 상대적인 응답추정(ODS)을 통하여 구조물의 고유진동수와 모드를 파악할 수 있다.

모달변수(modal parameter)인 고유진동수, 감쇠, 모드로 구성되는 모달모델(modal model)로는 질량, 감쇠, 강성의 공간모델(spatial model)을 결정할 수 없게 되며 실험적 모드해석으로 공간모델을 얻기 위해서는 구조물에 내재된 응답특성인 주파수 응답함수를 포함하는 응답모델(response model)을 구할 수 있어야 한다. 즉 모달모델의 3개요소와 측정대상 구조물의 유일한 값인 residue행렬 결정으로 공간모델인 질량, 감쇠, 강성행렬이 결정되어진다. 이 과정에서 유한개의 자유도로 모델링하여 측정된 응답모델로 유한개의 공간모델을 얻기 위해서는 모델의 자유도의 수에 해당하는 모드와 고유진동수를 다 구할 수 있어야 한다. 하지만 실제의 경우 고유진동수와 모드를 다 구하는 것은 매우 힘든 일로 몇몇 근사화 과정으로 공간모델을 구하는 방법이 제시되고 있다^[1].

* 유니슨산업(주) 유니슨기술연구소

이 글에서는 비교적 단순한 2층 축소모델에 동흡진기(TMD)가 설치된 3자유도 모델을 제작하여 이 모델의 공간모델을 실험적으로 얻기 위한 실험적 모드해석을 수행하였다. 실험적으로 구한 3자유도 축소모델의 응답모델을 공간모델로 변환하여 질량, 감쇠, 강성행렬을 구했으며 제작시 설계값과 비교하였다.

2. 본론

2.1 이론식

구조물의 실험적모드해석으로 얻은 모달변수, residue행렬은 공간모델의 구조물의 질량, 강성과 댐핑 행렬로 표현 할 수 있다. n 자유도를 갖는 구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

여기서, $[M]$ = $(n \times n)$ 질량 계수 행렬
 $[C]$ = $(n \times n)$ 댐핑 계수 행렬
 $[K]$ = $(n \times n)$ 강성 계수 행렬
 $\{x(t)\}$ = n -차 변위 벡터
 $\{f(t)\}$ = n -차 외력 벡터

식 (1)을 $(n \times n)$ 의 전달함수 행렬을 구하면 다음 식(2)와 같다.

$$H(s) = \sum_{k=1}^m \frac{r_k}{2j(s-p_k)} - \frac{r_k^*}{2j(s-p_k^*)} \quad (2)$$

또는

$$H(s) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k u_k u_k^i}{2j(s-p_k)} - \frac{A_k^* u_k^i u_k^i}{2j(s-p_k^*)}$$

여기서,

m = 모드 수

r_k = k 번째 모드의 $(n \times n)$ residue 행렬

$p_k = -\sigma_k + j\omega_k$ k 번째 모드의 pole

$\sigma_k = \zeta\omega_n$ k 번째 모드의 댐핑계수

$\omega_k = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ k 번째 모드의 고유진동수

u_k = k 번째 모드의 n 차 복소 모드 벡터

A_k = 모달 상수

식(1)의 운동방정식을 주파수 영역에서 표현하기 위해 라플라스 변환으로 나타내면 식(3)과 같으며

$$[B(s)] \{X(s)\} = \{F(s)\} \quad (3)$$

여기서,

s = 라플라스 변수

$[B(s)] = [Ms^2 + Cs + K]$ $(n \times n)$ 시스템 행렬

$\{X(s)\}$ = 라플라스 영역에서 변위 n -벡터

$\{F(s)\}$ = 라플라스 영역에서 외력 n -벡터

따라서 입·출력 스펙트럼의 전달함수 행렬 식 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$\{X(s)\} = [H(s)] \{F(s)\}$$

식(3)에 대입하면 아래와 같다.

$$[H(s)] [B(s)] = [B(s)] [H(s)] = [I] \quad (4)$$

즉, 전달함수와 시스템행렬은 서로 역함수의 관계가 성립되며, 질량, 강성, 댐핑 행렬과 전달함수 행렬사이의 관계를 유도할 수 있다^[2]. 식(3)과 (4)로부터 $s=0$ 일때 강성행렬은 다음과 같다

강성행렬 :

$$[H(0)] [B(0)] = [H(0)] [K] = [I] \quad (5)$$

또는 $[K] = [H(0)]^{-1}$

식(4)를 라플라스변수 s 에 대해 각각 1차, 2차 미분후 $s=0$ 을 대입하면 댐핑행렬과 질량행렬을 차례로 얻을 수 있다

댐핑 행렬 :

$$[B(0)] = -[H(0)]^{-1} [\dot{H}(0)] [B(0)] \quad (6)$$

또는 $[C] = -[K] [\dot{H}(0)] [K]$

질량 행렬 :

$$\frac{[B(0)]}{2} = [H(0)]^{-1} \left\{ -[\dot{H}(0)] [B(0)] - \frac{[\dot{H}(0)]}{2} [B(0)] \right\}$$

또는

$$[M] = [K] \left\{ [\dot{H}(0)] [K] [\dot{H}(0)] - \frac{[\dot{H}(0)]}{2} \right\} [K]$$

위 식에서 질량, 강성 및 댐핑행렬은 전달함수와 전달함수의 미분식과 관계되어 있고, $H(0)$ 행렬과

미분행렬 $\dot{H}(0)$, $\hat{H}(0)$ 은 응답모델인 모달변수와 residue행렬로 표현되어 있다. 2층 축소모델에 동흡진기(TMD)가 설치된 3자유도의 거동은 바닥층을 강체로 기둥을 스프링으로 구성된 진동계로 가정할 수 있으므로 비교적 단순한 3자유도로 모델링할 수 있고, 전달함수인 3개의 pole과 각 pole에 대응되는 residue행렬을 추정하여 식 (5), (6), (7)에 대입하면 공간모델인 질량, 강성, 감쇠행렬을 계산할 수 있다^[3].

2.2 축소모델의 실험적 모드해석

동흡진기(TMD)가 설치된 2층 구조물의 3자유도 거동과약을 위해 실험적모드해석을 수행하였다. 제작된 축소모델은 그림 1과 같으며 각층의 질량은 200kg, 층간 수평강성 k는 207580 N/m으로 설계되었다. TMD의 질량은 73kg, 스프링의 강성 k는 23903 N/m이다. TMD의 고유진동수는 2.88Hz로 2층 축소모델의 1차모드와 주파수를 일치시켰다. 주파수 응답함수는 축소모델의 1, 2층과 TMD에 가속도 센서를 부착하고, 임팩트 해머를 이용한 충격 가진방법으로 액셀러런스(accelerance)를 측정하였다.

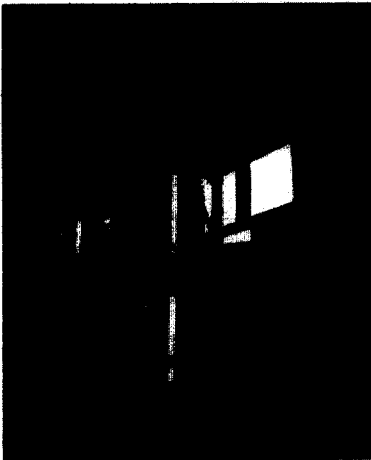


그림 1. Scaled building model with TMD

그림 2에는 2층에서 가진 및 응답을 측정한 point accelerance로 TMD의 질량을 고정된 경우와 고정하지 않은 경우의 응답을 나타내었다. TMD의 작동유무에 따라 2.92Hz의 1차모드에서 응답특성이 25배 정도 감소함을 보여준다. 모달변수와 residue

행렬은 모드해석 프로그램인 SMS STAR를 사용하여 전달함수를 curve fitting 하였다.

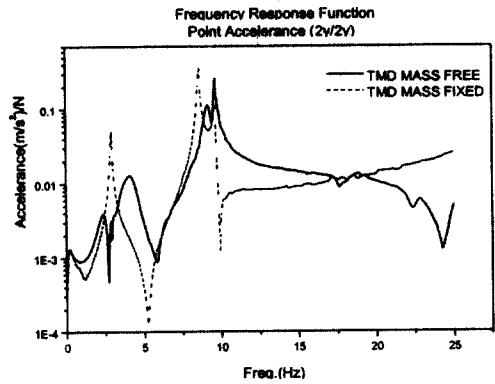


그림 2. Point accelerance plot(2y/2y)

Table 1에는 TMD의 질량을 고정된 경우와 고정하지 않은 경우에 대해 축소모델의 고유진동수와 감쇠를 정리하였다. TMD의 질량 고정시 모델은 2자유도 거동을 보이며, 비고정시 3자유도 거동 특성을 보여 TMD에 의한 구조물의 주파수 동조현상을 확인할 수 있다.

Table 1. Estimated Modal Parameters

Mode	1	2	3
TMD mass fixed	2.92 Hz/1.28% (1st bending)		8.61 Hz/0.61% (2nd bending)
TMD mass free	2.40 Hz/14.18% (1st bending) in phase	4.09Hz/9.59% (1st bending) out of phase	8.68Hz/0.486% (2nd bending)

그림 3은 TMD를 설치한 축소모델의 1차, 2차, 3차 모드 형상(mode shape)을 나타내었다. 1차 모드는 TMD의 질량이 구조물과 같은 위상(in phase)으로, 2차 모드는 반대 위상(out of phase)으로 거동함을 확인할 수 있다.

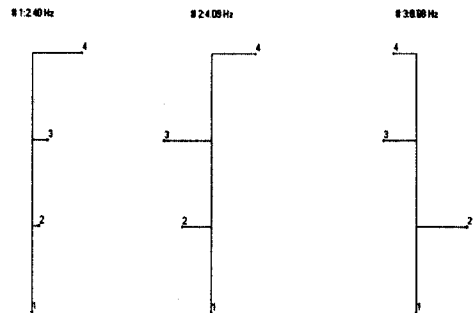


그림 3. Mode shape of scaled building model

측정한 응답모델인 주파수 전달함수에서 모달파라미터를 포함한 residue행렬은 star프로그램의 단위모달질량(unit modal mass)으로부터 구하였다. unit modal mass는 식 (2)의 복소모드벡터로 표현할 수 있으며 측정한 전달함수의 종류에 상관없이 항상 일정한 단위($\frac{1}{s} \sqrt{\frac{m}{N}}$)로 변환되어 표현된다. 이 경우 k 번째 residue(r_k)와의 관계인 모달상수 A_k 는 식(8)과 같이 k 번째 모드의 고유진동수 역수가 된다^{[4][5]}.

$$r_k = \frac{1}{\omega_k} u_k \cdot u_k^t \quad [m/Ns] \quad (8)$$

Table 2에는 측정한 주파수 응답함수로부터 pole과 모드벡터를 나타내었고, 식(8)에 의해 residue행렬을 계산하였다.

Table 2. Results of Experimental Modal Analysis

mode node	1st(2.432Hz)		2nd(4.034Hz)		3rd(8.621Hz)	
	unit modal mass	pole, p_1 (rad/s)	unit modal mass	pole, p_2 (rad/s)	unit modal mass	pole, p_3 (rad/s)
2	2.384e-2	-1.54+ 15.21j	-3.067e-2	-2.74+ 25.20j	4.2E-2	-0.88+ 54.16j
3	6.294e-2		-4.714e-2		-2.964e-2	
4	8.94e-2		10.011e-2		1.767e-3	

Residue 행렬 :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 3.70036e-5 & 6.26215e-5 & 8.8951e-5 \\ 6.26215e-5 & 1.05975e-4 & 1.50532e-4 \\ 8.8951e-5 & 1.50532e-4 & 2.13825e-4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 3.68888e-5 & 5.67051e-5 & -1.20422e-4 \\ 5.67051e-5 & 8.71666e-5 & -1.85112e-4 \\ -1.20422e-4 & -1.85112e-4 & 3.93114e-4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 3.70036e-5 & 6.26215e-5 & 8.8951e-5 \\ 6.26215e-5 & 1.05975e-4 & 1.50532e-4 \\ 8.8951e-5 & 1.50532e-4 & 2.13825e-4 \end{bmatrix} \quad \text{단위: } \left[\frac{m}{Ns} \right]$$

2.3 축소모델의 물성치 계산

측정한 pole과 residue를 이용하여 식 (2)의 전달함수를 구성하였고 식(5), (6), (7)에 의해 시스템의 질량, 강성 및 감쇠를 구하면 다음과 같다.

강성 행렬 :

$$K = \begin{bmatrix} 832677 & -462974 & 8775.24 \\ -462974 & 353565 & -13136.2 \\ 8775.24 & -13136.2 & 34884.2 \end{bmatrix}$$

댐핑 행렬 :

$$C = \begin{bmatrix} 749.458 & 73.533 & 23.108 \\ 73.533 & 715.035 & 37.0556 \\ 23.108 & 37.0556 & 351.632 \end{bmatrix}$$

질량 행렬 :

$$M = \begin{bmatrix} 345.667 & -68.5031 & 29.5864 \\ -68.5031 & 249.537 & 37.6645 \\ 29.5864 & 37.6645 & 86.5549 \end{bmatrix}$$

측정한 주파수 응답함수로부터 계산된 시스템의 질량, 강성값으로 공간모델의 고유진동수를 다시 확인한 결과 고유진동수는 각각 $f_1=2.432\text{Hz}$, $f_2=4.034\text{Hz}$, $f_3=8.621\text{Hz}$ 로 모달 실험으로부터 얻은 결과와 일치함을 알 수 있다. 질량행렬의 값을 보면 연성질량항의 값이 다소 크게 나타나 측정오차에 의한 결과로 판단된다.

Table 3에는 축소모델의 질량 및 강성 설계값과 실험으로 구한 결과를 비교하였다. 나타낸 질량과 강성은 운동방정식의 상수항에 대한 결과로 정리하였으며 나머지 항은 무시하였다. 실험결과와 설계값을 보면 2층질량이 73%, 3층질량이 25%, TMD질량이 17% 높게 나타났으며 강성은 125%, 40%, 30%의 높은결과를 보이고 있다.

Table 3. Spartial Model Parameters

	2nd floor		3rd floor		TMD	
	설계값	추정값	설계값	추정값	설계값	추정값
질량 (kg)	200	345	200	249	73	86
강성 (kN/m)	228.34	513.99	228.34	318.68	26.561	34.88
감쇠 (N · s/m)	-	385	-	364	-	351

실험에 사용된 TMD의 시간이력 자유진동을 그림 4에 나타내었다. TMD mass의 자유진동시 마찰력은 $F_d = \mu mg \text{sgn}(\dot{x})$ 로 표현되며 측정된 결과 마찰계수 μ 는 2.84%로 나타났으며 모드실험시 충격가진력의 크기에 따라 축소모델의 거동이 다소 다르게 나타났다. 공간모델의 질량, 감쇠, 강성행렬의 추정값의 차이는 이러한 TMD의 비선형성과 축소모델의 경계조건에 기인되리라 판단된다.

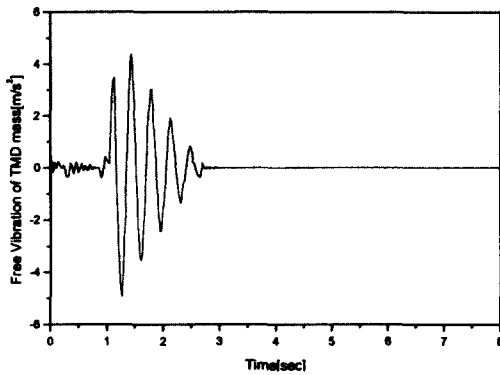


그림 4. Free Vibration Response of TMD

3. 결론

동흡진기(TMD)가 설치된 2층 축소건물모델에 실험적모드해석을 수행하였다. 실험으로 구한 주파수 전달함수로부터 pole과 residue행렬로 구성된 응답 모델을 구성하였고 이의 역변환을 통하여 축소건물모델의 물성치인 질량, 강성, 감쇠행렬을 추정하였다.

비교적 단순한 구조물의 경우 구조물의 물성치인 질량, 강성, 감쇠치를 실험적 모드해석으로 추정할 수 있었으며 적용한 축소모델의 경우 설계값과 추정치는 다소의 차이를 보이고 있으며 이러한 차이는 축소모델에 설치된 TMD의 마찰에 의한 비선형성과 경계조건에 기인되리라 판단된다.

참고문헌

1. D. J. Ewins, "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, 1984
2. Brown, D.; Allemang, R.; Zimmerman, R.; Mergay, M.; (1979) "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", SAE Paper Number 790221.
3. Luk, Yiu-Wah, " System Modeling and Modification via Modal Analysis", UIM, 1981
4. William T. Thomson, "Theory of Vibration with applications", Prentice Hall, 1988.
5. "STAR System Users Guide", 1994