

외력을 받는 주기적 구조물의 진동 국부화

김재영* • 유흥희**

Vibration Localization of a Periodic Structure Undertaking External Force

Jae Young Kim and Hong Hee Yoo

ABSTRACT

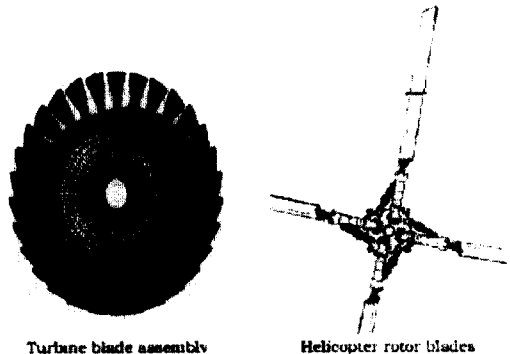
Vibration localization of a periodic structure with mistuning is presented in this paper. Mistuning in periodic structures can lead to an increase of the forced response which is much larger than those of perfectly tuned assembly. Thus, mistuning has a critical impact on high cycle fatigue in structures, and it is of great importance to predict the mistuned forced response in efficient manner. In this paper, forced response of a coupled pendulum is investigated to identify localization effects of periodic structures. The effects of mistuning and damping on the maximum forced response are examined. It is seen that in certain condition of mistuning and coupling, strong localization occurs and this can be significant under weak damping.

1. 서론

각종 기계류나 구조물에서 주기적인 대칭형상을 갖는 경우들을 흔히 볼 수 있다. 터빈 블레이드나 헬리콥터 블레이드(Fig 1), 인공위성의 회전형 안테나 등이 그 대표적인 예이다. 이러한 주기적 구조물에서 각 부구조물 간에 존재하는 물성치의 차이는 일반적으로 무시하여 균일한 구조로 해석하기 쉽다. 그러나 실제 구조물에서 가공오차나 마모, 결함 등에 의한 물성치의 차이가 분명히 존재하며, 이러한 작은 물성치의 차이로도 동적반응에 거대한 차이를 보일 수 있다. 이는 특정 구조물로 진동을 국부화하여 예기치 않은 구조물의 파괴를 일으킬 수 있으므로 구조물에서 이러한 영향을 고려하여 해석하는 것이 중요하다.

주기적 구조물에서 작은 물성치의 차이가 예기치 않은 큰 변형과 응력을 수반할 수 있다는 사실은 오랫동안 연구의 주제가 되어왔다⁽¹⁻³⁾. 그 중 Ewins는 간단화한 블레이드 모델에 대해 해석을 수행하여 구조물에서 존재하는 작은 물성치의 불규칙성에 의해 균일하게 해석했을 때 보다 훨씬

큰 동적변형이 나타남을 보였으며⁽⁴⁾, 물성치 차이가 어느 수준 이상이 되면 이러한 진동 국부화 현상이 다시 줄어든다는 사실을 밝혀냈다⁽⁶⁾. 어느 부구조물이 가장 큰 변형을 받게 될 것인가라는 문제에 대해서 D. Afolabi는 주변과의 물성치의 차이가 큰 부구조물에서 가장 큰 변형이 일어난다고 주장하였고⁽⁷⁾, Griffin과 Hoosac은 이와는 다소 상반된 견해로 일정수준의 물성치 차이 하에서 가장 큰 동적변형이 발견된다고 주장하였다⁽⁸⁾. 이 두 상반된 견해에 대해 C. Pierre는 두 연구에 사용된



Turbine blade assembly

Helicopter rotor blades

Fig.1 Periodic Structures

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 정희원, 한양대학교 기계공학부

모델링과 변수가 다르기 때문이라는 결론을 내렸으며⁽⁹⁾ 일련의 연구를 통해 인위적인 물성치의 조작으로 구조물의 동적응답을 최소화할 수 있음을 밝혀냈다⁽¹⁰⁾. 한편 이상의 논문들과는 달리, 최근에는 얼마나 큰 동적응답이 일어날 수 있는가에 대해서도 많은 연구가 이루어졌는데 그 중 Happawana 는 특이 섭동법(singular perturbation method)을 사용하여 강한 연성이 작용하는 구조물에서의 동적응답을 해석적으로 구하였고⁽¹¹⁾, C. Pierre 와 P. Castanier 는 터빈 블레이드의 효율적인 동적해석을 위한 축약 차수 모델링(reduced order modeling)을 제시하였다^(12,13). 그러나 이상의 여러 논문에서, 어떠한 조건에서 진동 국부화 현상이 가장 현저하게 나타날 수 있는가에 대해서는 명확한 결론을 내리지 못했으며 효율적인 모델링에 대해서도 많은 과제를 남기고 있다.

따라서 본 논문에서는 진동 국부화 현상이 현저해지는 조건을 규명하는 데 목적을 두고 주기적 구조물과 상사성을 지닌, 연성된 진자에서의 동적 반응을 살펴 보았다. 여기서는 물성치 차이 및 연성정도, 주변에서 작용하는 감쇄력의 크기의 세 변수에 대해 연구를 수행하였다. 우선 2 장에서는 시스템의 운동방정식을 유도하고 이를 무차원화하여 동적응답을 구하기 위한 선형관계식을 도출하였다. 3 장에서는 관심이 되는 세 변수인, 물성치 차이 및 연성, 감쇄력의 크기에 대해 어떠한 경우에 가장 큰 동적응답의 차이가 나타나는지 조사해 보았다. 한편 4 장에서는 이러한 진동 국부화 현상이 부구조물의 수가 많아지는 경우 어떠한 형태로 나타나는지, 네 개의 연성된 진자 예제에 대해 조사해 보았다.

2. 주기적 구조물에서의 진동

운동방정식의 유도

본 장에서는 주기적 구조물들의 고유진동수, 연성도, 감쇄비 등 작은 물성치의 차이가 동적응답에 어떠한 영향을 줄 수 있는지 분석하기 위해, 두 개의 진자가 스프링에 의해 연결된 간단한 시스템을 대상으로 연구를 수행하였다. 주기적 구조물의 각 부구조물은 서로 약하지만 연성되어 있고 가공오차나 마모, 결함 등에 의한 각 부구조물 물성치 차이를 무시할 수 없으므로, Fig.2 와 같이 조급의 길이차이를 갖는 연성된 진자로 간단화하여 모델링 하였다. 여기서 두개의 진자는 동일 주파수(ω)로 외부 가진력을 받으며 약한 감쇄의(c) 영향을 받고 있다.

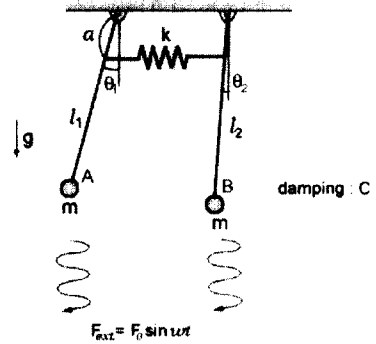


Fig.2 Simple coupled pendulum system

이 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 m \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 \\ 0 & l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cl_1^2 & 0 \\ 0 & cl_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} (ka^2 + mgl_1) & -ka^2 \\ -ka^2 & (ka^2 + mgl_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} l_1 \cdot F \sin \omega t \\ l_2 \cdot F \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

운동방정식을 무차원화하기 위해 다음과 같은 무차원 매개변수 및 변수를 도입한다.

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &\equiv \frac{l_2}{l_1} \\
 \beta &\equiv \frac{ka^2}{mgl_1} \\
 \gamma &\equiv \frac{T}{m} c \\
 \tau &\equiv \frac{t}{T} \\
 \Omega &\equiv \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \\
 f &\equiv \left(\frac{T^2}{ml_1} \right) F
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{여기서, } \omega_n = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$$

또한 α 는 구조물에서의 물성치 차이를 대표하는 변수이고, β 는 각 부구조물의 연성정도를 나타내는 변수이며, γ 는 감쇄 정도를 나타내는 변수이다.

정의된 무차원 변수를 사용하여 식(1)의 운동방정식을 무차원화하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1+\beta) & -\beta \\ -\beta & (\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \sin \Omega \tau \\ \alpha f \sin \Omega \tau \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이 무차원 방정식의 정상상태 동적응답은 다음과 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$\theta_i = a_i \cos \Omega t + b_i \sin \Omega t \quad (i=1,2) \quad (4)$$

이를 식(3)에 대입하여 풀면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (-\Omega^2[M] + [K])[b] - \Omega[C][a] &= [f], \\ (-\Omega^2[M] + [K])[a] + \Omega[C][b] &= [0] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}, \\ [C] &= \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma\alpha^2 \end{bmatrix}, \\ [K] &= \begin{bmatrix} (1+\beta) & -\beta \\ -\beta & (\alpha+\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

식(5)를 하나의 행렬식으로 정리하면 다음과 같은 간단한 식으로 표현된다.

$$[H][Z] = [F] \quad (7)$$

여기서,

$$[H] = \begin{bmatrix} -\Omega\gamma & (1+\beta)-\Omega^2 & 0 & -\beta \\ (1+\beta)-\Omega^2 & \Omega\gamma & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & -\alpha^2\Omega\gamma & (\alpha+\beta)-\alpha^2\Omega^2 \\ -\beta & 0 & (\alpha+\beta)-\alpha^2\Omega^2 & \alpha^2\Omega\gamma \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [Z] &= [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]^T, \\ [F] &= [f \ 0 \ \alpha f \ 0]^T \end{aligned} \quad (8)$$

이로부터 정상상태의 동적응답 크기를 의미하는 확대계수(Magnification Factor)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$|\kappa_i| = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} / f \quad (i=1,2) \quad (9)$$

3. 수치결과 및 고찰

본 장에서는 2 장에서 유도된 동적반응식을 사용하여, 약하게 연성된 구조물에서 물성치 차이에 의해 고유진동수 근방에서의 동적응답이 어떻게 변하는지를 살펴보았다. 여기서는 물성치 차이 및 연성정도, 주변에서 작용하는 감쇄력의 크기의 세 변수에 대해 연구를 수행하였다.

Fig.3 은 구조물에서의 물성치 차이가 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로서 진자의 길이비(α)에 따른 동적반응의 변화를 표시하였다. 이 때, 작용하는 감쇄력(γ) 및 연성정도(β)가 거의 미약하다고 볼 수 있는 값으로 0.01 과 0.005 를 사용하였다.

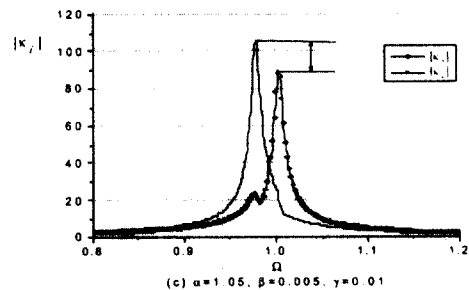
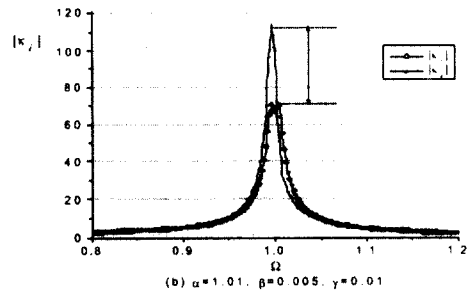
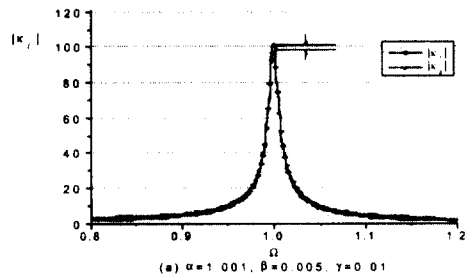


Fig.3 Magnification factor variation due to length-ratio change

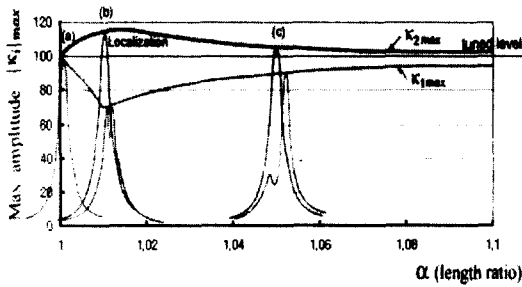


Fig.4 Comparison of maximum amplitudes of the pendulum

여기서 Fig.3(a)는 두 진자의 길이차이가 거의 없는(0.1%) 경우의 동적반응을 그린 것으로서 일반적으로 예측되듯이 두 진자의 동적응답은 거의 차이를 보이지 않는다. 그러나 Fig.3(b)의 경우를 보면, 1% 정도의 길이차이에 의해 두 진자의 동적응답은 큰 차이를 보이게 된다는 사실을 알 수 있다. 이는 약하게 존재하는 구조물의 연성이 진동을 한 쪽으로 국부화(localize)시켜 동적반응의 차이를 만든 것이라 볼 수 있다. 한편 Fig.3(c)에서와 같이 5% 이상의 길이차이를 보이는 경우에는 다시 두 진자의 동적응답의 차이가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이를 통해 진동의 국부화 현상은 물성치의 차이가 어느 정도 작은 특정 영역에서 발생함을 알 수 있으며 따라서 주기적 구조물과 같은, 물성치의 차이가 크지 않은 구조물의 경우에 중요한 의미를 가질 수 있다는 것을 알 수 있다. Fig.4에서는 이러한 최대 동적응답의 변화 양상을 하나의 표에 나타냈으며 이 경우 길이차이가 1~3%에 해당하는 영역에서 진동 국부화 현상이 가장 현저하게 나타남을 볼 수 있다.

한편 구조물에 작용하는 감쇄력이 동적응답에 어떠한 영향을 미치는지를 알아보기 위해 Fig.5에서는 감쇄 정도에 따른 진자의 동적응답의 변화를 살펴 보았다. 여기서 사용된 길이비(α)와 연성도(β)는, 앞선 예제에서 가장 큰 동적응답의 차이를 보인 값인 0.01과 0.005로 두었다. 여기서 Fig.5(a)는 작용하는 감쇄력이 큰 경우의 동적응답을 나타낸 것으로서, 물성치 차이에 의한 동적응답의 차이가 거의 나타나지 않지만 Fig.5.(b)와 Fig.5.(c)에서와 같이 작용하는 감쇄력이 작아지는 경우에는, 아주 작은 물성치의 차이에 의해서도 큰 동적응답의 차이가 나타남을 알 수 있다. 이는 진동 국부화 현상이 적용될 수 있는 시스템의 조건을 시사하는 것으로서, 작은 감쇄력이 작용하는 구조물에 있어서 진동 국부화 현상이 중요한 문제로 나타날

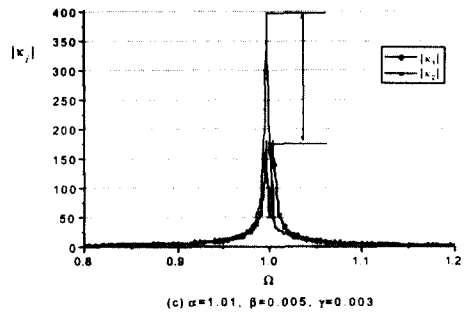
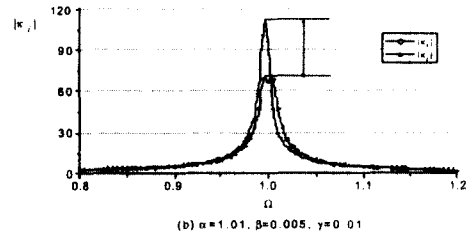
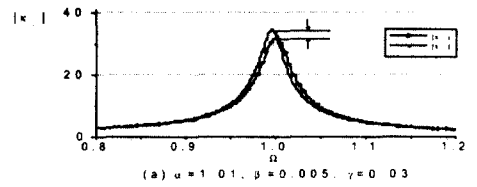


Fig.5 Magnification factor variation due to damping

수 있음을 보여준다.

Fig.6는 이상의 결과를 종합하여 나타낸 것으로서, 세 경우의 감쇄력에 대해 길이비(α)와 연성정도(β)의 변화에 따른 최대 동적응답의 비를 표시한 것이다. 여기서 가로축은 구조물의 물성치 차이를 대표하는 값(α)이고 세로축은 연성정도(β)를 의미한다. 이 그림에서는 색의 진한 정도에 따라 두 진자의 최대 동적응답의 차이가 크게 나타나는 영역을 의미한다. 이 그림에서 보는 바와 같이 작은 연성이 작용하는 주기적 구조물에서, 진동 국부화 현상이 두드러지게 나타나는 특정 영역이 있으며 이보다 두 시스템간의 연성이 커지거나 물성치의 차이가 커지는 경우에는 이 현상이 다시 약해짐을 알 수 있다. 또한 감쇄력이 끼치는 영향을 살펴보면, Fig.6(a)와 같이 감쇄력이 아주 작게 작용하는 경우에는 아주 작은(1%내) 물성치의 차이로도 극심한 동적응답의 차이가 발생할 수 있음

을 알 수 있고 Fig.6(b)와 Fig.6(c)의 경우와 같이 감쇄력이 커짐에 따라 이러한 현상은 감소함을 알 수 있다. 이상의 결과를 통해 진동 국부화 현상은 감쇄력이 작을 경우 현저하게 나타나며, 물성치의 차이와 구조간의 연성정도에 따라 두드러지게 나타나는 특정영역이 존재함을 알 수 있다.

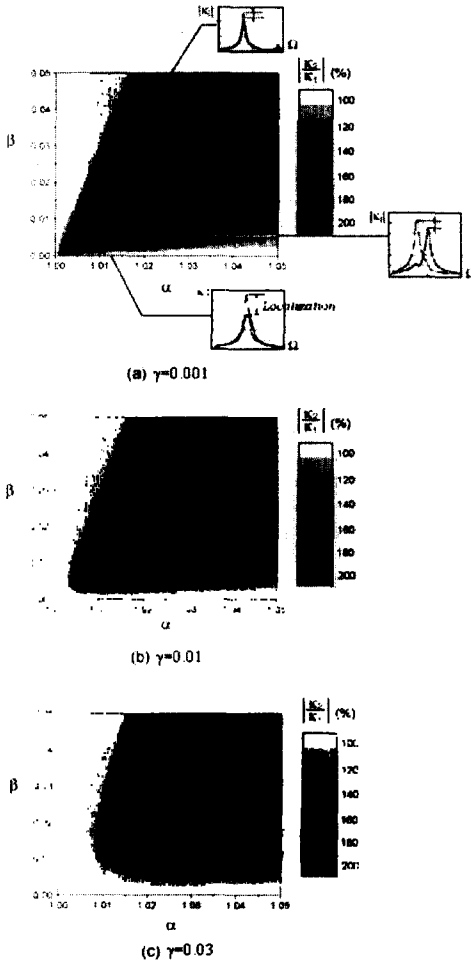


Fig.6 Ratio of maximum amplitudes of the pendulum

4. 확장된 시스템에서의 진동 국부화

- 네 개의 연성된 진자 예제

본 장에서는 부구조물의 개수가 여러 개로 늘어날 때 진동 국부화 현상이 어떤 형태로 나타날 것인지를 알아보기 위해 네 개의 연성된 진자에 대한 동적응답을 조사해 보았다.

Fig.7 은 네개의 연성된 진자가 동일한 가진력으로 진동하는 시스템으로서, 동시외력을 받는 일반적인 주기적 구조물을 형상화한 것이다. 여기서 1번 진자는 다른 진자와 조금의 길이차를 가지며 Fig 8.(a)는 조금 더 긴 경우의, Fig 8.(a)는 조금 더 짧은 경우의 동적응답을 나타낸 것이다. 이 두 경우에서 모두, 앞서 밝힌 바와 같이 아주 작은 물성치 차이에 의해 큰 동적응답의 차이가 나타난다는 것을 확인할 수 있으며, 부구조물이 많은 경우 Fig.8(a)에서 관찰되듯이 좀 더 큰 최대변형이 나타날 수 있음을 알 수 있다.

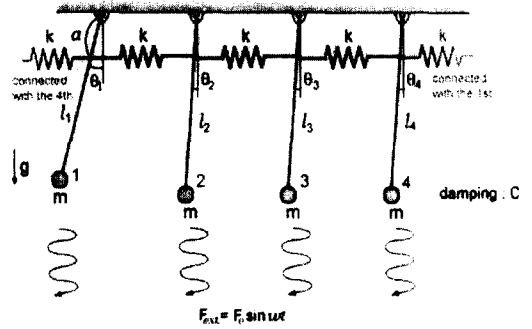
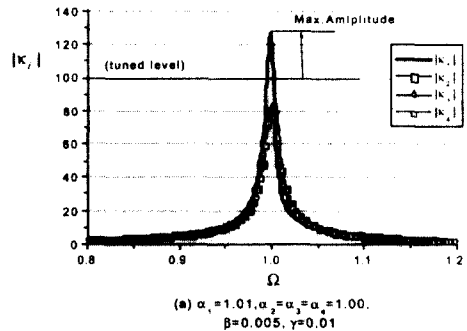


Fig.7 4 coupled pendulum system



(a) $\alpha_1 = 1.01, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1.00,$
 $\beta = 0.005, \gamma = 0.01$

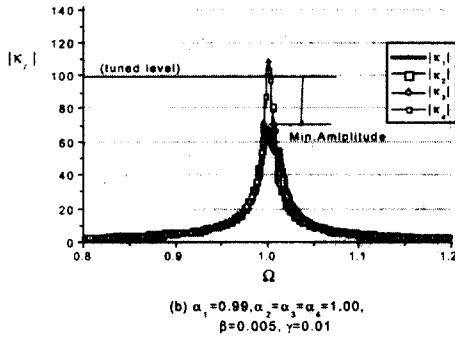


Fig.8 Forced response of 4 coupled pendula

5. 결론

본 연구에서는 작은 물성치의 차이를 갖는 주기적 구조물의 진동 국부화 현상을 규명하기 위해 간단화한 연성된 진자 모델링으로 해석을 수행하였다. 그 결과 고유진동수 근방에서, 작은 물성치의 차이에 의해서도 동적응답에 큰 차이가 발생할 수 있으며, 이는 감쇄력이 작은 경우에 현저하게 나타남을 알 수 있었다. 따라서 구조간 연성이 작은 주기적 구조물에 있어서, 작은 물성치의 차이는 구조물의 동적응답에 큰 영향을 끼칠 수 있으며, 감쇄력이 작은 인공위성 구조물이나 고속으로 회전하는 주기적 구조물에서 중요한 문제로 나타날 수 있음을 알 수 있다. 또한 물성치의 차이와 구조물 연성과의 관계에 의해 동적응답이 결정되므로 주기적 구조물의 진동 국부화 현상을 최소화하기 위한 물성치의 튜닝이 가능하다는 기본 원리를 제공한다고 할 수 있다.

후기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) E. J. Ewins, 1970. "A study of resonance coincidence in bladed disks". *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol.12, pp.305-312.
 (2) D. S. Whitehead, 1966. "Effect of mistuning on the

vibration of turbomachine blades induced by wakes". *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol.81, pp.15-21
 (3) C. Pierre and E. H. Dowell, 1987. "Localization of vibrations by structural irregularity". *Journal of Sound and Vibration*, Vol.114, pp.549-564.
 (4) D. J. Ewins, 1973. "Vibration characteristics of bladed disk assemblies". *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol.15, pp.165-186.
 (5) L. E. El-Bayuomy and A. V. Srinivasan, 1975. "Influence of mistuning on rotor blade vibrations". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. Vol.13, pp.460-464.
 (6) D. J. Ewins, 1969. "The effect of detuning upon the forced vibrations of bladed disks". *Journal of Sound and Vibration*, Vol.9, pp.65-79.
 (7) Afolabi, 1985. "The frequency response of mistuned bladed disk assemblies". *Vibration of Blades and Bladed Disk Assemblies*. ASME.
 (8) J. H. Griffin and T. M. Hoosac, 1984. "Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning". *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* Vol.106, pp.204-210.
 (9) S. T. Wei and C. Pierre, 1988. "Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry [Part I] free vibrations, [Part II] forced vibrations". *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*. Vol. 110, pp.429-449.
 (10) P. Castanier and C. Pierre, 1997. "Consideration on the benefits of intentional blade mistuning for the forced response of turbomachinery rotors". *Analysis and Design Issues for Modern Aerospace Vehicles*. Vol.55, pp.419-425.
 (11) G. S. Happawana, O. D. I. Nwokah, A. K. Bajaj, M. Azene, 1998. "Free and forced response of mistuned linear cyclic systems: a singular perturbation approach". *Journal Sound and Vibration*. Vol.211, pp.761-789
 (12) P. Castanier, and C. Pierre, 1997. "A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks". *Journal of vibration and acoustics*. Vol.119, pp.439-447
 (13) R. Bladh, P. Castanier, and C. Pierre, 1998. "Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds". in proceedings of the 43rd ASME Gas turbine and aeroengine technical congress, Stockholm, Sweden, June 1998.