

# 장·일치 개념을 적용한 신 고차 구속 모드 합성법

°강 정 훈°

## New Higher-Order Fixed-Interface Component Mode Synthesis

### by Applying a Field-Consistency Concept

°Jeong Hoon Kang °

#### ABSTRACT

The present paper introduces a new fixed interface component mode synthesizing technique based on the notion of higher-order field-consistency. The present technique employs higher-order residual constraint modes in addition to lower fixed interface normal modes while consistency in matching field variables at the substructure interface is maintained. The present field-consistency approach does not increase the size of the synthesized system even if higher-order residual constraint modes are included. A new field-consistent higher-order synthesis technique is first presented and a numerical example is given to verify the present method.

#### 1. 서 론

복잡한 구조물의 특정 가진에 대한 응답을 구하기 위하여는 구조물의 저차 고유 모드와 고유 진동수를 정확하게 예측하는 것이 무엇보다도 중요하다. 여러 개의 부분(또는 부품)으로 이루어진 구조물 전체의 동특성을 해석할 때에 가장 유용한 방법은 부분 구조 합성법이다. 부분 구조 합성법은 수치적 해석이 용이하지 않은 부분은 실험적으로 동특성을 구하고, 또한 해석상으로 얻을 수 있는 부분의 동특성은 해석적으로 구하여 그 결과를 합성함으로써 전체의 동특성을 예측할 수 있다. 이러한 부분 구조 합성법은 특정한 부분 구조물의 구조 변경이나, 동시 공학에도 사용되고 있다.

부분 구조 합성법은 각 분계의 고유 모드를 구하는 방법에 따라서 구속 모드법(Hurty<sup>1)</sup>, Craig and Bampton<sup>2)</sup>, Suarez and Singh<sup>3)</sup>, Qiu et al.<sup>4)</sup>, 불구속 모드법(Goldman<sup>5)</sup>, Hou<sup>6)</sup>, Craig and Chang<sup>7)</sup>, Chang<sup>8)</sup>, Suarez and Matheu<sup>9)</sup>, Gu and Tongue<sup>10)</sup>, Kang and Kim<sup>11)</sup>), 하중 부가법(Benfield

and Hruda<sup>12)</sup>, Jezequel<sup>13)</sup>, Chandler and Tinker<sup>14)</sup>) 등으로 대별할 수 있다.

불구속 모드법은 실험과의 합성이 용이하고, 하중 부가법은 대형 구조물의 저차의 동특성을 구하기 위하여 경계부에 임의의 질량 등을 부가하는 방법으로 우주 구조물이나 항공기에 많이 적용된다. 구속 모드법은 식의 정식화에서 강제 운동이 존재하지 않아 정식화가 단순해진다는 장점들이 있다.

Hurty<sup>1)</sup>가 발표한 경계부 구속 모드법(Fixed Interface method)은 부분 구조 합성법의 효시로 그 이후로 해의 정확성과 수렴성을 향상시키기 위하여 많은 노력이 있어 왔다. Craig 와 Bampton<sup>2)</sup>은 Hurty<sup>1)</sup>의 정식화를 단순화하였고, Suarez 와 Singh<sup>3)</sup>는 고차의 잔여 구속 모드(residual constraint modes)를 사용하는 방법을 제안하였으나, 잔여 구속 모드의 차수가 올라갈수록 전체 행렬이 커지는 문제가 있다. Qiu et al.<sup>4)</sup>도 고차의 잔여 구속 모드를 사용하였으나, 그 해석 방법에 있어서 비선형 방정식을 풀어야 하는 단점이 있다. 불구속 모드

\* 삼성 전자 냉공조사업부 선행연구그룹

합성법에서는 Kang 과 Kim<sup>1)</sup>이 고차의 잔여 부가 모드(residual attachment mode)를 사용하면서 장 일치 개념(field consistency concept)을 이용하여 최종 행렬의 크기가 각 분계의 고유 모드 수의 합으로 유지되도록 하는 방법을 개발하였다. 본 논문의 목적은 이러한 장 일치(field consistency) 개념을 구속 모드법에 확장하여 해의 정확성과 수렴성을 향상시키는 고차 구속 모드법을 제안하는 것이다. 본 논문이 기존의 구속 모드법에 대하여 발전된 개념은 각 분계에서 고차의 잔여 구속 모드를 사용함과 동시에 경계부에서의 변위와 힘의 연속성의 차수를 같이 올려 주는 것이다. 본 논문에서 제시한 방법의 장점은 Suarez 와 Singh<sup>2)</sup>의 방법과 달리 최종 행렬의 크기가 사용한 잔여 부가 모드의 차수에 관계없이 항상 일정하다는 것이고, 또한 Qiu et al.<sup>4)</sup>의 방법과 같이 비선형 방정식을 풀지 않아도 된다는 것이다.

본 논문에서는 임의의 차수의 잔여 구속 모드를 구하는 방법을 설명하고 장 일치 개념에 의한 고차 구속 모드 합성법의 과정을 설명하였다. 또한, 본 기법을 보 구조물에 적용하여 그 타당성을 검증하였다

## 2. 저차 고유 모드와 잔여 구속 모드를

### 이용한 각 분계 변위의 기술

부분 구조 합성법에서 각 분계의 변위를 표현할 때의 핵심은 저차의 고유 모드를 사용하여 각 분계의 변위를 정확하게 기술하는 것이다. 하지만, 고유 모드의 특성상 각 분계의 경계부에 가진력이 작용하면 경계부 근처에서 내력 분포를 정확하게 기술할 수 없기 때문에 각 분계의 변위 표현시에 저차의 고유 모드 이외에 특수한 모드를 취한다. 불구속 모드법에서는 이러한 특수한 모드 형태를 잔여 부가 모드(residual attachment mode)라 부르고, 하중 부가법에서는 경계부에 임의의 질량이나 강성을 부가하는 방법을 사용한다. 구속 모드법에서는 이러한 모드를 구속 모드(constraint mode)라 부른다. Hurty<sup>5)</sup>, Craig 와 Bampton<sup>6)</sup>은 0 차의 구속 모드를 사용하였으며, Suarez 와 Singh<sup>2)</sup>는 2 차의 잔여 구속 모드를 사용하였고, Qiu et al.<sup>4)</sup>도 고차의 잔여 구속 모드를 사용하였다. 본 장에서는 각 분계에서 고차의 잔여 부가 모드를 구하는 방법에 대하여 설명하였다.

각 분계의 운동 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에서 하첨자  $j$ 는 두 분계 사이의 경계부를 표현하며,  $i$ 는 내부 영역을 표현한다. 경계부가 구속된 고유 모드와 잔여 구속 모드를 구하기 위하여 식 (1)의 첫 번째 행을 다시 쓰면

$$m_{ii}\ddot{u}_i + m_{ij}\ddot{u}_j + k_{ii}u_i + k_{ij}u_j = 0 \quad (2)$$

식 (2)에서 좌변에는 내부 변위  $u_i$ 에 관련된 성분만으로 정리하면,

$$m_{ii}\ddot{u}_i + k_{ii}u_i = P_j \quad (3a)$$

$$P_j = -m_{ij}\ddot{u}_j - k_{ij}u_j \quad (3b)$$

구속 모드법은 경계부의 변위  $u_j$ 를 구속한 상태에서 구한 고유 모드를 사용하는 방법으로, 이렇게 구한 고유 모드를  $\phi_n(x)$ 라 할 때, 내부 변위  $u_i$ 는 식 (4)와 같이 전개할 수 있다.

$$u_i(x,t) = \sum_{n=1}^{N_i} \phi_n(x) \xi_n(t) \quad (4)$$

식 (4)에서  $\phi_n(x)$ 는 질량 정규화된 고유 모드이며  $\xi_n(t)$ 는 일반화된 좌표계이다. 또한,  $N_i$ 는 내부 영역의 총 자유도 수이다. 식 (4)를 식(3a)에 대입하고, 각 분계가 초기에 정지하고 있다고 가정하면 ( $\dot{u}_i(x,0) = u_i(x,0) = 0$ ), 일반화된 좌표계의 푸리에 변환 식을 식 (5)와 같이 얻을 수 있다.

$$\tilde{\xi}_n(\omega) = \frac{\phi_{nj}^T \tilde{P}_j(\omega)}{\Omega_n^2 - \omega^2} \quad (n=1, 2, \dots, N_i) \quad (5)$$

식 (5)에서  $\Omega_n$  은  $n$  번째 고유 진동수이고, 경계부에서의 고유 모드  $\phi_{nj}$  는 다음과 같이 정의한다.

$$\phi_{nj} = \phi_n(x_j)$$

또한, 식 (5)에서 문자 위의  $\tilde{(\cdot)}$  는  $(\cdot)$  의 푸리에 변환을 나타낸다. 잔여 고차 모드를 구하는 방법은 불구속 모드법에서 잔여 부가 모드를 구하는 방법과 유사하다.<sup>11)</sup> 식 (5)의 일반화된 좌표계를  $\omega=0$  에 대하여 Maclaurin series 로 전개하고, 다시 시간영역에서  $P_j$  의 2 차 항까지만 취하면

$$u_i = \Phi_k P_k + \Phi_d A_d^{-1} \Phi_{dj}^T P_j - \Phi_d A_d^{-2} \Phi_{dj}^T \ddot{P}_j \quad (6)$$

식 (7)에서

$$A_d^{-m} = [\Omega_n^{2m}] \quad (n = N_k + 1, \dots, N_i) \quad (7)$$

식 (6)은 다음과 같이 잔여 구속 모드 형태로 표현할 수 있다.

$$u_i = \Phi_k P_k + \Psi_1 P_j - \Psi_2 \ddot{P}_j \quad (8)$$

$m$  차 잔여 구속 모드 행렬(residual attachment modal matrix)  $\Psi_m$  은 식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\Psi_m = \Phi_d A_d^{-m} \Phi_{dj}^T \quad (m=1, 2) \quad (9)$$

$m$  차 잔여 부가 모드 행렬  $\Psi_m$  은  $m$  차 잔여 유연성 행렬(residual flexibility matrix)  $G_m$  으로 부터도 구할 수 있다.

$$\Psi_m(x) = G_m(x) \quad (10)$$

일반적으로 잔여 유연성 행렬  $G_m$  은 식 (11)로부터 구할 수 있다

$$G_m = k_{ii}^{-1} (m_i k_{ii}^{-1})^{m-1} - \Phi_k A_k^{-m} \Phi_k^T \quad (11)$$

임의 차수의 잔여 부가 모드는 식 (10), (11)을 이용하여 구할 수 있다.

### 3. 장-일치 개념을 이용한 구속 모드 합성법

장-일치 개념에 의한 고차의 구속 모드법은 여러 분계의 합성에도 적용되나, 설명의 편의상 그림 1 과 같은 두 분계의 시스템을 고려한다. 현 방법은 임의 차수의 잔여 부가 모드에도 적용할 수 있지만, 본 논문에서는 1 차 잔여 부가 모드를 사용한 방법에 대하여 설명하고자 한다.

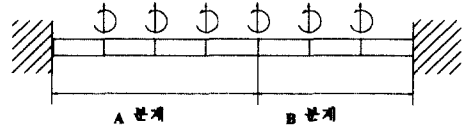


그림 1. 두 분계로 이루어진 시스템

식 (8)에서 저차의 고유 모드와 1 차의 잔여 부가 모드만 고려하고, 식 (3b)를 이용하여 내부 변위를 표현하면 식 (12)와 같다.

$$u_i = \Phi_k P_k - \Psi_1 k_{ij} u_j - \Psi_1 m_{ij} \ddot{u}_j \quad (12)$$

식 (12)를 식 (13)과 같이 물리적 좌표계와 일반 좌표계 사이의 관계식으로 표현할 수 있다.

$$u_i = \Theta p \quad (13)$$

식 (13)에서, 변환 행렬  $\Theta$  은

$$\Theta = [\Phi_k \quad -\Psi_1 k_{ij} \quad -\Psi_1 m_{ij}] \quad (14a)$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_k \\ u_j \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} \quad (14b)$$

식 (14b)는 변환행렬에 일치하는 일반화된 좌표계를 나타낸다.

식 (1)의 운동 방정식을 식 (14a,b)를 이용하여 일반화된 좌표계  $p$ 로 표현하면 식 (15)와 같다.

$$M'_s \ddot{p}' + K'_s p' = \Theta_j'^T f_j' \quad (r = A, B) \quad (15)$$

식 (15)에서  $M'_s$ 는 일반화된 질량 행렬을  $K'_s$ 는 일반화된 강성 행렬을 나타낸다.

두 분계를 합성하기 위하여는 두 분계사이의 연속 조건이 필요하다. 경계부에서의 변위와 힘의 연속 조건은 (16a,b)와 같이 표현된다.

$$u_j^A = u_j^B \quad (16a)$$

$$f_j^A = -f_j^B \quad (16b)$$

식 (16a,b)는 변위를 기술할 때에 저차의 고유 모드나 잔여 부가 모드를 고려하지 않은 경우에는 항상 만족하는 경계부의 연속 조건이다. 하지만, 저차의 고유 모드 또는 잔여 부가 모드를 고려하면 식 (16a,b) 이외의 추가적인 연속 조건이 필요하다. Hurty<sup>1)</sup>, Craig와 Bampton<sup>2)</sup>은 주어진 모드의 조합 안에서 식 (16a)는 명시적으로 만족시켰으나, 식 (16b)는 근사적으로 만족시키는 방법을 사용하였다. 현 방법과 같이 1차의 잔여 부가 모드를 사용한 경우에는 경계부에서의 연속 조건은 식 (17)과 같이 3 가지의 경우가 된다.

$$u_j^A = u_j^B; \quad \ddot{u}_j^A = \ddot{u}_j^B; \quad f_j^A = -f_j^B \quad (17a,b,c)$$

본 방법이 Hurty<sup>1)</sup>, Craig와 Bampton<sup>2)</sup> 방법과 다른 점은 각 분계에서 1차의 잔여 부가 모드를 고려함과 동시에 경계부 연속 조건인 식 (17b,c)를 명시적으로 표현함으로써 최종 행렬의 크기는 Hurty<sup>1)</sup>, Craig와 Bampton<sup>2)</sup> 방법 동일하면서 해의 정확성과 수렴성을

항상시킨 것이다. Suarez와 Singh<sup>3)</sup>는 잔여 부가 모드의 차수를 증가시킬수록 최종 행렬의 크기가 같이 증가하여 경계부 자유도가 많은 셀 구조물과 같은 경우에는 해석의 효율성이 떨어지는 단점이 있다. 구속

모드법에서 임의의  $n$  ( $n \geq 1$ )차 잔여 부가 모드까지 고려하였을 경우에 식 (18,19,20)과 같은 장-일치 개념에 의한 연속성 조건을 이용하여 항상 최종 행렬의 크기가 동일한 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$u_j^A = u_j^B \quad (18)$$

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} u_j^A = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} u_j^B \quad (19)$$

$$\frac{d^{2(k-1)}}{dt^{2(k-1)}} f_j^A = -\frac{d^{2(k-1)}}{dt^{2(k-1)}} f_j^B \quad (20)$$

$$(k = 1, \dots, n-1)$$

식 (18)의 경계부 연속 조건은 잔여 부가 모드의 차수에 관계없이 항상 적용하여야 하며, 식 (19),(20)은 잔여 부가 모드의 차수에 관련된 연속조건이다. 현 방법과 기존 방법의 중요한 차이점은 경계부에서 변위와 힘의 연속성을 사용한 함수의 차수에 비례하여 고려한다는 것이다.

1차의 잔여 부가 모드를 고려한 현 방법에서 경계부 연속 조건인 식 (17c)를 만족시키기 위하여 식 (1)의 두 번째 행을 풀어쓰면

$$f_j = m_{jj} \ddot{u}_j + m_{jj} \ddot{u}_j + k_{jj} u_j + k_{jj} u_j \quad (21)$$

식 (21)에서 경계부 힘  $f_j$ 를 표현하기 위하여는,  $\ddot{u}_j$

를 알아야 한다.  $\ddot{u}_j$ 는 식 (12)를 시간에 대하여 미분

함으로써 구할 수 있다. 단, 경계부 변위를  $\ddot{u}_j$ 까지

만 고려하였기 때문에, 그 이상의 차수를 무시하면서 구하면 되는데 그 유도 방법은 불구속 모드법과 유사하다.<sup>11)</sup>

식 (17a,b,c)를 이용하면 식 (22)와 같은 각 분계에서의 변수와 최종 행렬 사이의 변수의 관계식을 구할 수

이다.

$$p = Sq \quad (22)$$

식 (22)에서

$$p = \begin{Bmatrix} p^A \\ p^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_k^A \\ u_j^A \\ \ddot{u}_j^A \\ p_k^B \\ u_j^B \\ \ddot{u}_j^B \end{Bmatrix} \quad (23a)$$

$$q = \begin{Bmatrix} p_k^A \\ p_k^B \\ u_j^A \end{Bmatrix} \quad (23b)$$

식 (22)를 이용하면 최종 운동 방정식은 식 (24)와 같이 고유치 문제로 귀결된다.

$$M_T \ddot{q} + K_T q = 0 \quad (24)$$

식 (24)에서

$$M_T = S^T \begin{bmatrix} M_S^A & 0 \\ 0 & M_S^A \end{bmatrix} S, K_T = S^T \begin{bmatrix} K_S^A & 0 \\ 0 & K_S^B \end{bmatrix} S \quad (25a,b)$$

식 (23b,24)로부터 최종 행렬에서  $p_k^A, p_k^B, u_j^A$  만이 독립 변수임을 알 수 있다. 그 결과로 합성된 시스템의 최종 운동 방정식의 크기는 각 분계의 차수에 상관 없이 항상  $N_k^A + N_k^B + N_j$  와 같음을 알 수 있다.

#### 4. 수치 예제

본 방법의 타당성을 검증하기 위하여 Chang<sup>9)</sup> 이 사용한 그림 1 과 같은 양단 고정 보를 사용하였다. 그림 1의 양단 고정 보는 각 절점에 회전과 병진 방향의 자유도를 갖는 모델이며, 전체 구조물의 총 자유도는 12 개이다. 표 1은 전체 시스템 행렬의 크기가 8 일 때, 각 해석 방법에 따른 고유 진동수의 결과를 나타내고 있다. 표 1에서의 고유 진동수 오차는 다음과 같이

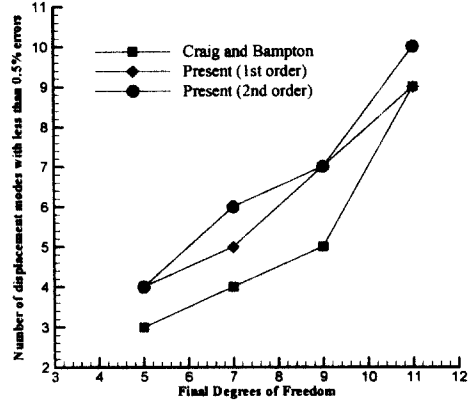


그림 1. 최종 행렬의 크기와 오차 범위(0.5%) 내에 포함되는 고유 모드의 개수

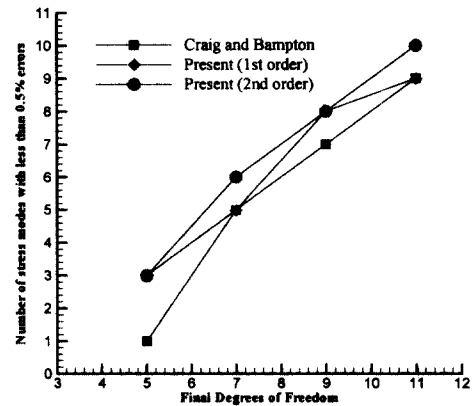


그림 2. 최종 행렬의 크기와 오차 범위(0.5%) 내에 포함되는 고유 스트레스 모드의 개수

정의하였다.

$$error(\Omega) = \left| \frac{\Omega - \Omega_{no\ division}}{\Omega_{no\ division}} \right| \times 100(\%)$$

위 식에서 'no division' 은 원래의 시스템을 의미한다. Suarez 와 Singh<sup>9)</sup> 방법은 고차의 잔여 구속 모드를 취함에 따라 최종 시스템 행렬의 크기가 커지므로, 최종 시스템 행렬의 크기를 고정하였을 때는 고차 모드에서 Craig 와 Bampton<sup>2)</sup> 의 방법보다 오히려 좋지 않

표 1. 최종 시스템 행렬의 크기가 8 일때 각 방법에 따른 고유 진동수 비교

n	Craig and Bampton		Suarez and Singh		Present(1 <sup>st</sup> order)		Present(2 <sup>nd</sup> order)		No division frequency
	frequency	Error(%)	frequency	Error(%)	Frequency	Error(%)	Frequency	Error(%)	
1	0.2085	0.00	0.2085	0.00	0.2085	0.00	0.2085	0.00	0.2085
2	1.5877	0.01	1.5875	0.00	1.5876	0.00	1.5876	0.00	1.5875
3	6.1381	0.02	6.1371	0.01	6.1370	0.01	6.1367	0.00	6.1367
4	17.023	0.26	17.063	0.50	16.993	0.08	16.983	0.02	16.980
5	38.698	0.13	40.962	5.99	38.653	0.01	38.652	0.01	38.648
6	76.853	1.63	94.585	25.07	76.099	0.63	75.646	0.03	75.625
7	184.69	12.99	266.26	62.88	172.70	5.65	163.93	0.29	163.46
8	489.77	70.94	907.47	216.7	340.70	18.91	297.72	3.91	286.51

은 결과를 보이고 있다. 본 방법은 잔여 부가 모드의 차수를 증가하여도 최종 시스템 행렬의 크기가 커지지 않으면서, 고차 고유 진동수에서도 좋은 결과를 보여 준다. 이러한 개선된 결과는 장-일치 개념을 이용하여 경계부 연속성의 차수를 같이 증가한 것에 기인한다.

그림 1 과 2 에서는 합성된 변위 모드와 스트레스 모드의 오차가 0.5 % 이하인 모드의 개수를 전체 시스템의 크기와 비교하였다. 변위 모드와 스트레스 모드에 대한 오차의 정의는 MAC (modal assurance criterion)을 이용하였다.

$$error(mode\ shape) = (1 - MAC) \times 100(\%)$$

여기에서

$$MAC(\alpha_{no\ division}, \alpha) = \frac{(\alpha_{no\ division}^T \alpha)^2}{(\alpha^T \alpha)(\alpha_{no\ division}^T \alpha_{no\ division})}$$

$\alpha$  는 변위 모드나 스트레스 모드를 나타낸다

## 5. 결론

본 논문에서는 장-일치 개념을 이용한 새로운 고차 불구속 모드 합성법을 제안하였다. 본 방법의 장점은 잔여 부가 모드의 차수를 증가하여도 최종 운동 방정식의 크기가 Craig 와 Bampton 이 제안한 방법과 같으면서, 해의 정확성을 증가시킨다는 것이다.

## 6. 참고문헌

- (1) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic analysis of structural systems using component modes," AIAA Journal., Vol. 3, pp. 678-685.
- (2) Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., 1968, "Coupling of substructures for dynamic analyses," AIAA Journal., Vol. 3, pp. 1313-1319.
- (3) Suarez, L. E. and Singh, M. P., 1992, "Improved fixed interface method for modal synthesis," AIAA Journal., Vol. 30, pp. 2952-2958.
- (4) Qiu, J. B., Ying, Z. G. and Williams, F. W., 1997, "Exact modal synthesis techniques using residual constraint modes," Int. j. numer. Methods eng., Vol. 40, pp. 2475-2492.
- (5) Goldman, R. L., 1969, "Vibration analysis by dynamic partitioning," AIAA Journal., Vol. 7, pp. 1152-1154.
- (6) Hou, S. N., 1969, "Review of modal synthesis techniques and a new approach," Shock Vib. Bull., Vol. 40, pp. 25-39.
- (7) Craig, R. R. and Chang, C. J., 1977, "On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis," Proc. AIAA/ASME 18th structures, structural dynamics & materials conference, Vol. B, pp. 89-99.
- (8) Chang, C. J., 1977, *A general procedure for substructure coupling in dynamic analysis*, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin, Texas, Austin.
- (9) Suarez, L. E. and Matheu, E. E., 1992, "A modal synthesis technique based on the force derivative method," Journal of Vibration and Acoustics, ASME, Vol. 114, pp. 209-216.
- (10) Gu, K. and Tongue, B. H., 1987, "A method to improve the modal convergence for structures with external forcing," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 54, pp. 904-909.
- (11) Kang, J. H. and Kim, Y. Y., 1999, "New higher-order free-

interface component mode synthesis by a field-consistency concept," Proc. of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, pp. 399-406.

(12) Benfield, W. A. and Hruza, R. F., 1971, "Vibration analysis of structures by component mode substitution," AIAA Journal, Vol. 9, pp. 1255-1261.

(13) Jezequel, L., 1980, "A method of damping synthesis from substructure tests," Journal of Mechanical Design ASME, Vol. 102, pp. 286-294.

(13) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1991, "Rayleigh-Ritz based substructure synthesis for flexible multibody systems," AIAA Journal, Vol. 29, pp. 1709-1719.

(14) Chandler, K. O. and Tinker, M. L., 1997, "A general mass-additive method for component mode synthesis," AIAA-97-1381, pp. 93-103.

(15) Kang, J. H., 1998, *Hypothetically Extended Substructure Method for Component Mode Synthesis*, Ph. D. Dissertation, Seoul National University, Seoul.