한국소음진동공학회 창립10주년 기념 소음진동학술대회논문집, pp.531~535

2차원 연속 Scanning을 이용한 진동모드 해석

°윤상열*, 류제길**, 박기환***

The Analysis of Mode Shape using 2 Dimensional Continuous Scanning

°Yoon Sang-yol*, Ryu Je-kil**, Park Kyi-hwan*

Abstract

If the displacement of the structure is obtained by integrating the signal from accelorometer and laser, the vibration mode can be examined. This conventional method, however, has the disadvantage of the necessity of multiple accelerometers and many data processing steps such as frequency response function(FRF). In order to get smooth mode shape, we should also use algorithms of cubic spline or others.

In this paper, we propose a method which gets the mode shape by using the velocity signal directly obtained from the plane scanning. In this method, we just use coefficients and phases for specific frequency.

1 서론

일반적으로 진동모드를 측정하기 위해 Modal Test 방법이 이용된다. 이 때 이용되는 센서는 일반적으로 가속도계이다. 진동을 측정하고자 하는 구조물의 여러 측정점에 가속도계를 부착시키는데 이는 소형이며 경량인 구조물에 대해서 가속도계의 질량으로 인한 오차를 발생 시킬 수 있다. 가속도계의 질량 효과를 피하기위해 레이저를 이용하기도 한다. 그러나 이 방법 또한 가속도계를 이용하는 경우와 같은 알고리즘으로 진동모드를 구하게 된다. 즉, 각 측정점에서 가속도계로 측정한 가속도나 레이저로 측정한 속도 출력을 변위로 적분한 후, 정규화된 고유벡터(Normalized Eigen-vector)와 진동모드를 주파수응답함수(Frequency Response Function)을 이용하여 구한다[1]. 이 고유벡터로부터 부드러운 진동모드를 구하기 위해서 3차 스플라인 곡선 등의 알고리즘이 이용되어야 한다.

그러나 본 논문에서 제안된 연속 스캐닝을 이용한 진동모드 측정 방법은 Mach-Zenhder 간섭계[2]를 이용하여 레이저의 출력인 속도를 그대로 이용한다. 즉, 출력인 속도를 Fast Fourier Transform(FFT)을 이용하여 특정 주파수 성분에 대한 계수값과 위상만으로

* 광주과학기술원 기전공학과 대학원
** 금호 타이어 기술연구소 OE개발팀
*** 광주과학기술원 기전공학과

진동체의 진동모드를 측정하는 방법을 소개한다.

2 진동체의 진동모드 해석

자유도가 N인 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

식 (1)에서 인수행렬인 M, C, K는 각각 질량과 감쇄, 강성을 나타내는 N×N 행렬이고 u는 일반화된 변위 좌표계를 나타내는 N×1 벡터이며 F는 정현가진력을 나타내는 N×1 벡터이다. 식 (1)에서 조화 가진력 $F = F\cos(\omega t)$에 대한 정상상태 응답은 식 (2)와 같이 모드 중첩법에 의해 정상모드의 합으로 표현된다[3].

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r(x) \cdot C_r \cos(\omega t - \alpha_r) \quad (2)$$

여기서, $\phi_r(x)$는 r번 째 진동모드이고 C_r은 r번 째 진동모드의 크기이며 α_r은 r번 째 위상차이다. 단, x는 공간 상의 임의 위치를 나타낸다. 이 때, 식 (2)을 미분하여 속도에 관한 식으로 표현하면 식 (3)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{r=1}^{N} \phi_r(x) \cdot (C_r^R \sin(\omega t) + C_r^I \cos(\omega t)) \\ &= \phi_R(x) \cdot \sin(\omega t) + \phi_I(x) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, C_r^R는 Real 모드의 크기이며 $-C_r\omega\cos(\alpha_r)$을 의미한다. 이 때의 진동모드 $\phi_R(x)$는 $\sum_{r=1}^{N} C_r^R \phi_r(x)$로 표현된다. 또, C_r^I는 Imaginary 모드의 크기이며 $-C_r\omega\cos(\alpha_r)$을 의미한다. 이 때의 진동모드 $\phi_R(x)$는 $\sum_{r=1}^{N} C_r^I \phi_r(x)$로 표현된다.

2.1 1차원 정현 Scanning을 이용한 진동모드 해석

연속 Scanning을 이용하는 방법 중 Scanning 끝단에서의 불연속을 피하기 위해 정현 Scanning 기술을 이용한다.

식 (3)에서 Real 진동모드인 $\phi_R(x)$만을 고려하고 $\phi_R(x) = \phi(x)$로 놓는다.

1차원에 대한 진동모드를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(x) = \sum_m V_m x^m \quad (4)$$

이 때 편의를 위해 정규화된 Scanning 변위인 $x(t)$를 다음과 같이 표현한다.

$$x(t) = \cos(\Omega_x t) \quad (5)$$

여기서 Ω_x는 정현 Scanning 주파수이다.

식 (5)을 이용하여, 공간과 시간에 관한 속도를 나타내는 식 (3)에서 $\phi(x)$를 시간에 관한 함수로 표현하면 식 (4)은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(x) = \phi(\cos(\Omega_x t)) = \sum_m V_m \cos^m(\Omega_x t) \quad (6)$$

삼각함수의 급수 관계식[4]을 이용하면,

$$\cos^{2\gamma}\alpha = \frac{1}{2^{2\gamma}}\left\{\sum_{\beta=0}^{\gamma-1} {}_{2\gamma}C_\beta \cos 2(\gamma-\beta)\alpha + {}_{2\gamma}C_n\right\} \quad (7)$$

식 (6)은 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_m V_m \cos^m(\Omega_x t) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_x t) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 센서의 출력 신호인 시간에 대한 속도를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_x t) \cdot \sin(\omega t) \\ &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin[(\omega \pm m\Omega_x)t] \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)으로부터 센서의 출력 신호인 속도에 대해 FFT를 수행하면 Fig. 1처럼 된다.

Type I Chebyshev 다항식[5]인 $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$를 이용하면 진동모드는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A_0 + \sum_{m=1}^{p} 2A_m \cos(m\cos^{-1}x) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{p} 2A_n T_n(x) \end{aligned} \quad (10)$$

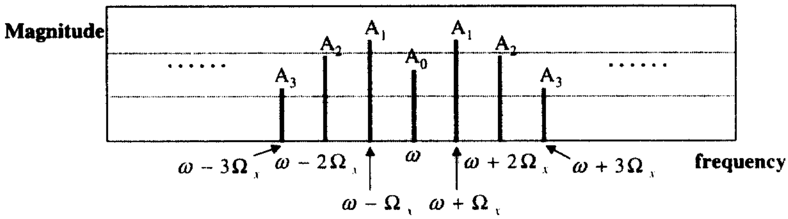

Figure 1. The frequency spectrum of 1 dimensional line scanning

따라서, 센서의 출력 신호인 속도에 대해 FFT를 수행하여 얻은 Fig. 1와 같은 결과의 계수 값들인 A_0, A_1, A_2, A_3, $\ldots$을 식 (10)에 대입하면 진동모드를 얻을 수 있다. 여기서 각 주파수에 대해 위상이 만약 0°이면 +의 혹은 ±180°이면 −의 계수값을 가지게 된다.

$T_n(x)$는 다음과 같은 관계[5]를 가지고 있다.

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{11}$$

따라서 식 (4)와 식 (10)에 위의 관계식을 이용하면 V_m와 A_m의 관계를 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

2.2 2차원 정현 Scanning을 이용한 진동모드 해석

2차원에 대한 진동모드를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(x,y) = \sum_m V_{mn} x^m y^n \tag{13}$$

1차원 Scanning의 경우와 마찬가지로 2차원 Scanning에서 센서의 출력 신호인 공간과 시간에 대한 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} v(x,y,t) &= \sum_m \sum_n V_{mn} x^m y^n \cdot \sin(\omega t) \\ &= \phi(x,y) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{14}$$

Figure 2와 같이 측정하고자 하는 진동체를 Scanning하게 된다. 여기서 x방향과 y방향에 대해서 정현 Scanning을 취하게 되면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\Omega_x t) \\ y(t) &= \cos(\Omega_y t) \end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)을 식 (14)에 대입하여 공간에 대한 표현을 시간에 대하여 표현하면 진동모드는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \phi(\cos(\Omega_x t), \cos(\Omega_y t)) \\ &= \sum_m \sum_n V_{mn} \cos^m(\Omega_x t) \cos^n(\Omega_y t) \end{aligned} \tag{16}$$

1차원 Scanning의 경우와 마찬가지로, 식 (7)을 이용하면 식 (16)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= A_{00} + \sum_{m=1}^{p} 2A_{m0} \cos(m\Omega_x t) \\ &+ \sum_{n=1}^{q} 2A_{0n} \cos(n\Omega_y t) \\ &+ \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{q} 4A_{mn} \cos(m\Omega_x t) \cos(n\Omega_y t) \end{aligned} \tag{17}$$

식 (17)을 식 (14)에 대입하면 다음과 같이 시간의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} v(t) &= A_{00} \sin(\omega t) \\ &+ \sum_{m=1}^{p} A_{m0} \sin\left([\omega \pm m\Omega_x]t\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{q} A_{0n} \sin\left([\omega \pm n\Omega_y]t\right) \end{aligned}$$

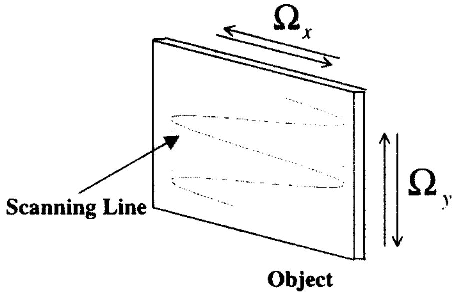

Figure 2. 2 dimensional area scanning

$$+ \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} A_{mn}\left\{ \sin\left([\omega + m\Omega_x \pm n\Omega_y]t\right) + \sin\left([\omega - m\Omega_x \pm n\Omega_y]t\right)\right\} \quad (18)$$

식 (18)으로부터 센서의 출력 신호인 속도에 대해 FFT을 수행하면 Fig. 3처럼 된다.

식 (18)을 보면 계수 A_{00}는 가진 주파수인 ω에서, A_{m0}는 $\omega + m\Omega_x$와 $\omega - m\Omega_x$에서, A_{0n}는 $\omega + n\Omega_y$와 $\omega - n\Omega_y$에서 결정된다. 또한, A_{mn}는 $\omega \pm m\Omega_x \pm n\Omega_y$에서 결정된다.

Type I Chebyshev 다항식[5]인 $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$를 이용하면 진동모드는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} V_{mn}x^m y^n \\
&= A_{00} + \sum_{m=1}^{p} 2A_{m0}\cos(m\cos^{-1}x) \\
&+ \sum_{n=1}^{q} 2A_{0n}\cos(n\cos^{-1}y) \\
&+ \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}\Big[4A_{mn}\cos(m\cos^{-1}x) \\
&\quad \times \cos(n\cos^{-1}y)\Big] \\
&= A_{00} + \sum_{m=1}^{p} 2A_{m0}T_m(x) + \sum_{n=1}^{q} 2A_{0n}T_n(y) \\
&+ \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} 4A_{mn}T_m(x)T_n(y) \qquad (19)
\end{aligned}$$

따라서, 1차원 Scanning의 경우와 마찬가지로, 센서의 출력 신호인 속도에 대해 FFT를 수행하여 얻은 Fig. 3와 같은 결과의 계수 값들인 A_{00}, A_{01}, A_{02}, $\ldots$, A_{10}, A_{11}, A_{12}, $\ldots$, A_{21}, A_{22}, A_{21}, $\ldots$을 식 (19)에 대입하면 진동모드를 얻을 수 있다. 1차원과 마찬가지로 각 주파수에 대해 위상이 만약 0°이면 +의 혹은 ±180°이면 −의 계수값을 가지게 된다.

1차원의 경우와 마찬가지로 식 (11)의 관계를 가지므로 식 (19) 에서 삼각함수에 관한 계수 A_{mn}와 다항식의 계수인 V_{mn}의 관계를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_{00} &= A_{00} - 2A_{02} + 2A_{04} - 2A_{20} + 2A_{40} \\
&\quad +4A_{22} - 4A_{24} - 4A_{42} + 4A_{44} \\
V_{10} &= 2A_{10} - 6A_{30} - 4A_{12} + 4A_{14} \\
&\quad +12A_{23} + 12A_{32} - 12A_{34} \\
V_{20} &= 4A_{20} - 16A_{40} - 8A_{22} + 8A_{24} + 32A_{42} \\
&\quad -32A_{44} \\
V_{30} &= 8A_{30} \\
V_{40} &= 16A_{40} - 32A_{42} + 32A_{44} \\
V_{01} &= 2A_{01} - 6A_{03} - 4A_{21} + 12A_{23} + 4A_{41} \\
&\quad -12A_{43} \\
V_{11} &= 4A_{11} - 12A_{13} - 12A_{31} + 36A_{33} \\
V_{21} &= 8A_{21} - 24A_{23} - 32A_{41} + 96A_{43} \\
V_{31} &= 16A_{31} - 48A_{33} \\
V_{41} &= 32A_{41}
\end{aligned}$$

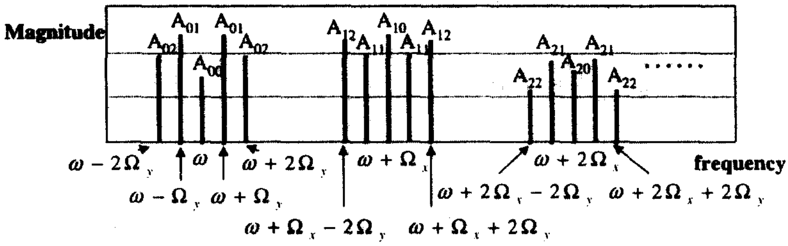

Figure 3. The frequency spectrum of 2 dimensional area scanning

$$
\begin{aligned}
V_{02} &= 4A_{02} - 16A_{04} - 8A_{22} + 32A_{24} + 8A_{42} \\
&\quad -32A_{44} \\
V_{12} &= 8A_{12} - 32A_{14} - 24A_{32} + 96A_{34} \\
V_{22} &= 16A_{22} - 64A_{24} - 64A_{42} + 256A_{44} \\
V_{32} &= 32A_{32} - 128A_{34} \\
V_{42} &= 64A_{42} - 256A_{44} \\
V_{03} &= 8A_{03} - 16A_{23} + 16A_{43} \\
V_{13} &= 16A_{13} - 48A_{33} \\
V_{23} &= 32A_{23} - 128A_{43} \\
V_{33} &= 64A_{33} \\
V_{43} &= 128A_{43} \\
V_{04} &= 16A_{04} - 32A_{24} + 32A_{44} \\
V_{14} &= 32A_{14} - 96A_{34} \\
V_{24} &= 64A_{24} - 256A_{44} \\
V_{34} &= 128A_{34} \\
V_{44} &= 256A_{44}
\end{aligned}
$$

3 결론

각 측정점에서 가속도계로 측정한 가속도나 레이저로 측정한 속도 출력을 변위로 적분한 후, 정규화된 고유백터와 진동모드를 주파수응답함수을 이용하여 구한 후 이 고유벡터로부터 부드러운 진동모드를 구하기 위해서 3차 스플라인 곡선 등의 알고리즘이 이용되어야 하는 Modal Test 방법에 비해 보다 간단한 방법으로 즉, 연속 스캐닝을 이용하여 레이저 출력인 속도를 FFT을 이용하여 특정 주파수 성분에 대한 계수값과 위상만으로 진동모드를 측정할 수 있는 방법을 제시하였다. 또한, 속도로부터 구한 계수값은 삼각함수에서 이용되기 때문에 다항식에서 이용될 수 있는 계수로 바꿀 수 있는 관계식을 유도하였다. 이는 진동모드를 구하는데 있어 좀 더 편리게 이용될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Daniel J. Inman, **Engineering Vibration**, Prentice Hall, pp. 364-394, 1996.

[2] J.K. Ryu, **Development of a Continuous Scanning System for Vibration Mode Shape Analysis**, 한국소음진동학회 춘계학술대회 논문집, pp. 387-388, 1999.

[3] Roy R. Craig, Jr., **Structural Dynamics**, John Wiley & Sons, Inc., 1981.

[4] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, **Table of Integrals, Series, and Products**, Academic Press, Inc., pp. 25, 1980.

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, **Table of Integrals, Series, and Products**, Academic Press, Inc., pp. 1032, 1980.