

# 진동 구조물의 경계조건을 실험적으로 구하는 방법

<sup>0</sup>김 영 주\*, 김 양 한\*\*

## The Experimental Method to Identify The Boundary Condition of Vibrating Structure

<sup>0</sup> Young-Ju Kim and Yang-Hann Kim

### ABSTRACT

The vibration shape of the structure with arbitrary boundary condition under excitation is determined by the governing equation and the boundary condition and driving force. In this paper, driving point impedance that is defined by the ratio of the driving force at one point to the velocity of that point is selected as a measure to identify the boundary condition. First, this paper deals with a string with arbitrary boundary condition. It is selected because of its simplicity, but generality of which exhibits the desired physical phenomena. Particularly the relation among the driving point impedance, the boundary condition and the vibration shape is dealt as a primary step to identify the boundary condition by using the driving point impedance.

### 1. 서론

임의의 경계조건(boundary condition)을 가진 구조물이 진동하는 형상은 경계조건에 따라 다양하게 나타나게 된다. 따라서 경계조건과 구조물의 진동형상과의 관계를 알면 구조물의 진동형상을 측정함으로써 경계조건을 구해 낼 수 있을 것이다. 그러나 구조물의 진동형상은 경계조건뿐만 아니라 가진력에 따라서도 변화하기 때문에 가진력(driving force)에 대한 고려 또한 필요하게 된다. 본 논문에서는 구조물의 경계조건을 구해내기 위한 실험적

측정값으로 한 점을 가진하는 힘과 그 점이 움직이는 속도의 비로 정의가 되는 가진점 임피던스(driving point impedance)<sup>(1,2)</sup>를 선택하였다. 간단한 구조물인 현(string)이 임의의 경계조건을 가지는 경우 가진점 임피던스를 이용해 경계조건을 구하기 위한 전 단계로써 가진점 임피던스와 경계조건 그리고 진동형상 사이의 관계를 알아보고 제안된 개념의 확장 가증성을 분석하고자 한다.

### 2. 가진점 임피던스

양 끝에 임의의 경계조건을 가지는 현(Fig. 1)의 어떤 한 점에 조화가진(harmonic excitation)을 하는

\* 한국과학기술원 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

경우 그 가진점(driving point)에서의 가진점 임피던스를 현의 파동 방정식(wave equation)과 그린함수(green function)를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$Z(x_i, k) = -2Z_c \left[ -\frac{1}{1 + P e^{2jkx_i}} + \frac{1}{1 + Q e^{-2jk(L-x_i)}} \right] \quad (1)$$

여기서  $Z_c$  는 현의 특성 임피던스 (characteristic impedance)이다.  $k, x_i$  은 각각 현에서의 파수(wave number)와 가진위치를 나타낸다.

$P$  와  $Q$  는 각각 현의 왼쪽과 오른쪽의 경계조건에 관계된 항으로 다음과 같다.

$$P(\omega) = \frac{Z_c + Z_0(\omega)}{Z_c - Z_0(\omega)} \quad (2)$$

$$Q(\omega) = \frac{Z_c - Z_L(\omega)}{Z_c + Z_L(\omega)} \quad (3)$$

$Z_0(\omega)$  와  $Z_L(\omega)$  은 각각 현의 오른쪽과 왼쪽에서의 부하 임피던스 (load impedance)<sup>(1,2)</sup> 를 의미하며 다음과 같다.

$$Z_0(\omega) = C_0 + j(M_0\omega - \frac{S_0}{\omega}) \quad (4)$$

$$Z_L(\omega) = C_L + j(M_L\omega - \frac{S_L}{\omega}) \quad (5)$$

$M_0, C_0, S_0$  는 각각 현의 왼쪽 경계에서의 질량 (mass), 점성감쇠계수(coefficient of viscous damping), 강성계수(spring constant) 의 크기를 의미하며  $M_L, C_L, S_L$  은 오른쪽 경계에서의 질량, 점성감쇠계수, 강성계수의 크기를 의미한다.

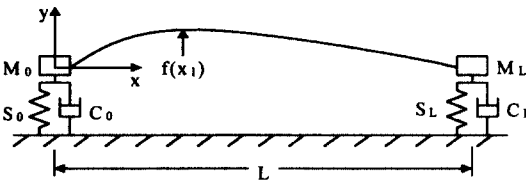


Fig. 1 String with arbitrary boundary condition

식 (1)에서 가진점 임피던스는 가진점과 가진점 주파수의 함수로 표현되는 것을 알 수 있다. 식 1의 등호 오른쪽의 첫번째 항은 왼쪽 경계조건에 의한 영향을 나타내며 두번째 항은 오른쪽 경계조건에 의한 영향을 나타낸다. 가진점 임피던스가 0 이 되는 경우에 속도가 무한하게 커지므로 공진(resonance)이 발생하게 되고 가진점 임피던스가  $\infty$ 가 되면 가진 지점은 움직이지 않게 된다.<sup>(1,2)</sup>

가진 임피던스가  $\infty$ 가 되는 경우는 식 (1)의 오른쪽의 첫번째 항이  $\infty$ 가 되는 경우와 두번째 항이  $\infty$ 가 되는 경우의 두 가지가 있다. 첫번째와 두번째 항이 왼쪽과 오른쪽의 경계조건 각각에만 관계하므로 가진점 임피던스가  $\infty$ 가 되는 경우는 왼쪽 경계조건에만 관계하는 경우와 오른쪽 경계조건에만 관계하는 두가지 경우가 있음을 알 수 있다.

### 3. 경계조건에 따른 가진점 임피던스

#### 3.1 고정단 (Rigidly Fixed End)

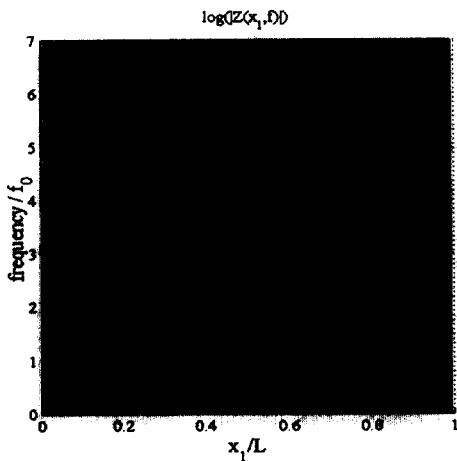
양 끝이 고정단인 경우의 가진점 임피던스와 현의 진동형상을 나타낸 것이 Fig. 2 이다.

Fig. 2 (a)는 가진점 임피던스의 절대값에  $\log$  를 취한 값( $\log|Z(x_i, f)|$ )을 가진위치와 가진주파수에 대해 그려준 것이다. 수평축은 현의 길이로 가진 위치를 나뉜 값이며 수직축은 가진 주파수를 기본 주파수(fundamental frequency :  $f_0$ )로 나뉜 값이다.

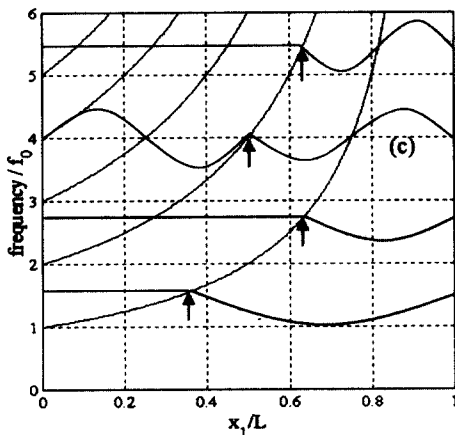
Fig. 2 (a)에서 검정색 선은 가진점 임피던스가 0 이 되는 경우 즉, 공진이 발생하는 경우를 의미한다. 고정단에서 기본주파수의 정수배로 가진하는 경우 공진이 발생하는 것을 확인 할 수 있다.<sup>(1,2)</sup> 흰색 선은 가진점 임피던스가  $\infty$ 가 되는 점으로 이 점을 가진하는 경우 가진점은 움직이지 않게 된다.

Fig. 2 (b)는 가진점 임피던스가  $\infty$ 인 선상의 화

살표가 가리키는 가진지점을 그때의 가진주파수로 가진하였을 경우의 현의 움직임을 그려 놓았다. 이 선 상을 가진하는 경우 Fig. 2 (b)에서처럼 가진점을 중심으로 한쪽만 진동하는 현상이 나타나게 된다. 공진이 일어나는 선과 가진점 임피던스가  $\infty$ 인 선이 만나는 부분을 가진하는 경우엔 공진이 발생하지 않고 Fig. 2 (b) 에서의 (c)의 경우처럼 가진점을 중심으로 꺾인 상태로 진동하게 된다.<sup>(1,2)</sup> 일반적으로 현이 진동할 때 절점 양쪽에서 위상차가  $\pi$  rad 이 나게 되는데 이 경우엔 가진점 양쪽의 위상이 같게 된다.



(a) driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ )

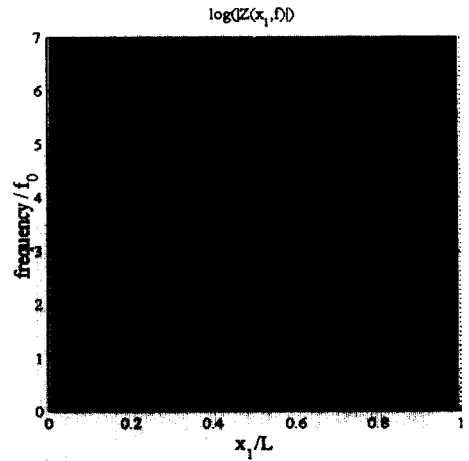


(b) vibration shape of the string for the case of exciting the line on that driving point impedance is infinite

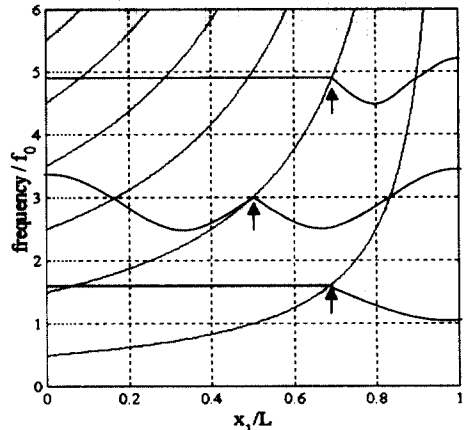
Fig. 2 rigidly fixed boundary condition

### 3.2 자유단 (Free End)

양 끝이 고정단인 경우와 마찬가지로 자유단인 경우에 가진점 임피던스와 현의 움직임을 그린 것이 각각 Fig. 3 (a), Fig. 3 (b) 이다. 공진이 일어나는 주파수는 고정단의 경우와 같음을 확인 할 수 있다. 자유단인 경우 경계에서 현의 기울기가 0 가 되므로 같은 주파수에서 가진점 임피던스가  $\infty$ 가 되는 점이 고정단인 경우보다 현의 양 가장자리쪽으로 이동하게 되어 가진점 임피던스가  $\infty$ 인 선이 고정단의 경우보다 아래로 내려가게 된다.



(a) driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ )



(b) vibration shape of the string for the case of exciting the line on that driving point impedance is infinite

Fig. 3 free boundary condition

### 3.3 자유단 - 고정단 (Free - Rigidly Fixed)

현의 왼쪽 경계조건이 자유단으로 주어지고 오른쪽의 경계조건이 고정단으로 주어지는 경우의 가진점 임피던스가 Fig. 4 이다. 가진점 임피던스가  $\infty$  가 되는 선이 비대칭적으로 나오는 것을 볼 수 있다. 앞에서 말했듯이 가진점 임피던스가  $\infty$  가 되는 경우는 왼쪽 경계조건과 오른쪽 경계조건 각각에만 관계하는 두가지 경우가 있는데 이 경우 현 양쪽의 경계조건이 다르기 때문에 가진점 임피던스가  $\infty$ 인 선이 비대칭적으로 나오게 된다.

가진 임피던스가  $\infty$ 인 선 중 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 올라가는 선은 오른쪽 경계만의 영향을 받게 되므로 고정단의 경우와 같게 되고 왼쪽 위로 올라가는 선은 자유단의 경우와 같게 된다.

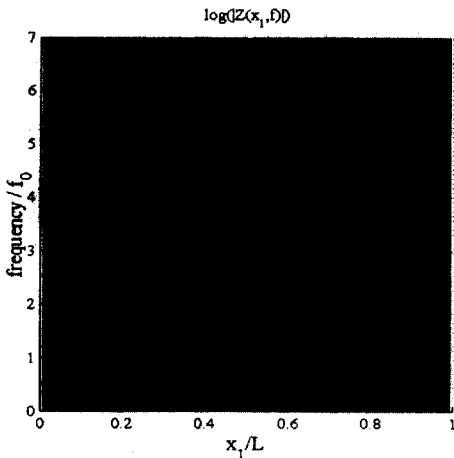


Fig. 4 driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ ) free - fixed boundary condition

### 3.4 질량이 달려있는 경우

현의 양 끝에 질량이 달려있는 경우 식 (1)에서 양쪽의 경계조건에 관계하는 요소인  $P, Q$  는 다음과 같다.

$$P(\omega) = \frac{Z_c + Z_0(\omega)}{Z_c - Z_0(\omega)} = \frac{Z_c + jM_0\omega}{Z_c - jM_0\omega} \quad (6)$$

$$Q(\omega) = \frac{Z_c - Z_L(\omega)}{Z_c + Z_L(\omega)} = \frac{Z_c - jM_L\omega}{Z_c + jM_L\omega} \quad (7)$$

$P, Q$  를 보면 가진주파수가 낮아지면 부하 임피던스(load impedance)가 0 에 접근하므로 자유단 처럼 움직이게 되고 가진주파수가 높아지면 부하 임피던스가  $\infty$  로 접근하므로 고정단처럼 움직이게 됨을 알 수 있다.<sup>(1,2)</sup>

Fig. 5 는 양쪽 질량의 크기가 같은 경우에 대해 그린 것이다. 가진주파수가 높아짐에 따라 고정단 처럼 움직임을 알 수가 있다.

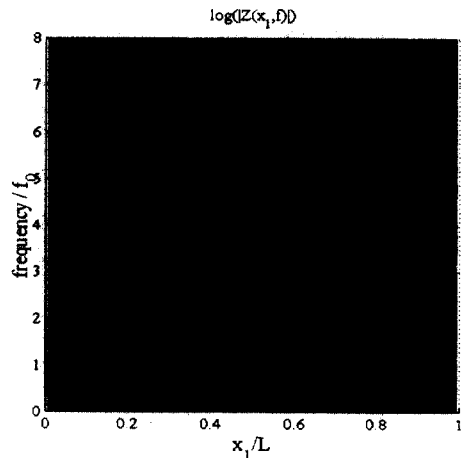


Fig. 5 driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ ) boundary condition with mass only

### 3.5 스프링이 달려있는 경우

이 경우  $P, Q$  는 다음과 같다.

$$P(\omega) = \frac{Z_c + Z_0(\omega)}{Z_c - Z_0(\omega)} = \frac{Z_c - j\frac{S_0}{\omega}}{Z_c + j\frac{S_0}{\omega}} \quad (8)$$

$$Q(\omega) = \frac{Z_c - Z_L(\omega)}{Z_c + Z_L(\omega)} = \frac{Z_c + j\frac{S_L}{\omega}}{Z_c - j\frac{S_L}{\omega}} \quad (9)$$

질량이 있는 경우와는 달리 가진주파수가 낮아질수록 부하 임피던스가  $\infty$  에 접근하므로 고정단

처럼 움직이게 되고 가진주파수가 높아질수록 자유단처럼 움직이게 됨을 알 수 있다.<sup>(1,2)</sup>

Fig. 6 은 양쪽의 강성계수가 같은 경우에 대해 그린 것이다. 가진주파수가 높아짐에 따라 자유단처럼 움직이는 것을 알 수 있다.

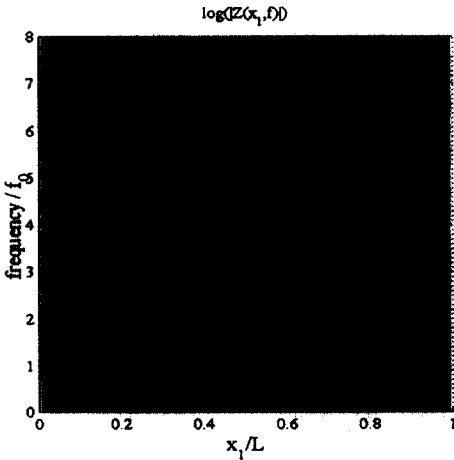


Fig. 6 driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ )  
boundary condition with spring only

### 3.6 질량, 댐퍼, 스프링이 달려 있는 경우

이 경우의 P, Q는 다음과 같다.

$$P(\omega) = \frac{Z_c + Z_o(\omega)}{Z_c - Z_o(\omega)} = \frac{Z_c + C_o + j(M_o\omega - \frac{S_o}{\omega})}{Z_c - C_o - j(M_o\omega - \frac{S_o}{\omega})} \quad (10)$$

$$Q(\omega) = \frac{Z_c - Z_L(\omega)}{Z_c + Z_L(\omega)} = \frac{Z_c - C_o - j(M_L\omega - \frac{S_L}{\omega})}{Z_c + C_o + j(M_L\omega - \frac{S_L}{\omega})} \quad (11)$$

가진주파수가 낮을 경우 스프링의 영향이 크게 나타나고 주파수가 높아질수록 질량의 영향이 크게 나타나게 됨을 알 수 있다. 허수부분이 0 이 되는 주파수 근처, 즉  $\omega = \sqrt{M_o S_o}$  혹은  $\omega = \sqrt{M_L S_L}$  에서는 댐퍼가 주로 영향을 미치게 되는 것을 알 수가 있다.

Fig. 7 은 현 양쪽에 질량, 스프링이 있는 경우의

가진점 임피던스를 그린 그래프 이고 Fig. 8 은 Fig. 7 의 경우에다 댐퍼를 넣은 경우이다. 두 경우 모두 현의 양쪽 경계조건이 같은 경우에 대해 그렸다.

Fig. 8 에서 허수부분이 0 이 되는 주파수 근처에서 댐핑이 없었을 때 (Fig. 7) 날카롭게 나타나던 가진점 임피던스의 피크들이 댐퍼의 영향에 의해 둔화된것을 볼 수 있다.

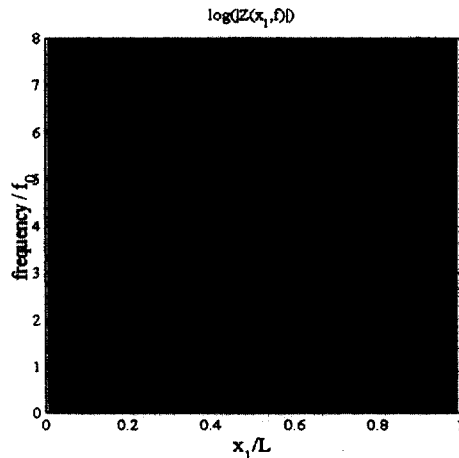


Fig. 7 driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ )  
boundary condition with mass and spring

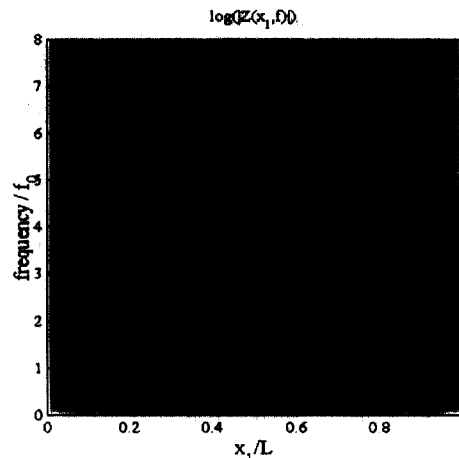


Fig. 8 driving point impedance ( $\log|Z(x_1, f)|$ )  
boundary condition with mass, damper, spring

## 4. 결론

임피던스를 이용해 경계조건을 구하기 위한 전 단계로써 간단한 구조물인 현의 경우에 대해 가진점 임피던스와 경계조건 그리고 진동형상 사이의 관계를 알아보았다.

앞으로 이 결과를 토대로 현의 경우에 가진점 임피던스에서 경계조건을 알아내는 방법을 정립하고 2 차원 구조물인 박막(membrane), 플레이트(plate)와 3 차원 구조물의 경우에 대해서까지 확장해 나갈 예정이다.

### 후기

본 연구는 과학기술부가 추진하는 국가지정연구실사업 프로그램의 지원에 의해서 연구되었음을 밝힙니다.

### 참고문헌

- (1) Philip M. Morse and K. Uno Ingard, 1968, *Theoretical Acoustics*, chapter 4, Princeton University Press, New Jersey
- (2) Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders, 1982, *Fundamentals of Acoustics*, 3rd Ed., chapter 2, John Willey & Sons, 1982, Singapore