한국소음진동공학회 창립10주년 기념 소음진동학술대회논문집, pp. 455~460.

충격성분을 갖는 보의 진동에 대한 비선형 해석

이봉현*, 최연선 **

Nonlinear Analysis of Beam Vibration with Impact

B. H. Lee and Y. S. Choi

ABSTRACT

Impact occurs when the vibration amplitude of a mechanical component exceeds a given clearance size. Examples of these mechanical systems include impact dampers, gears, link mechanism, rotor rub, and so on. The vibration due to impact has strong non-linear characteristics, which cannot be predicted by usual linear analysis. The designs of mechanical systems with impacts should be done on the basis of overall dynamic characteristics of the systems.

In this paper, the nonlinear behaviors of a beam with a periodically moving support and a rigid stop are investigated numerically and experimentally. The beam vibration with impact is modeled by the equations of motion containing piecewise linear restoring forces and by the coefficient of restitution, respectively. Experimental and numerical results show jump phenomena and higher-harmonic vibrations. The effects between the increase of stiffness during impact and the coefficient of restitution are investigated through the comparison of the experimental and numerical results.

1. 서론

기계계에는 가공여유와 운전 중 발생하는 마모로 인해 간극이 발생하여 부품들간에 간헐적인 접촉이 발생하고, 접촉부위에 불규칙한 동하중이 걸리게 된다. 간극은 큰 응력, 과도한 진동, 소음 등을 일으켜 기계계의 성능저하와 함께 피로파괴의 원인이 되고 있다. 기계계에 존재하는 간극으로 인한 진동은 시스템의 성능에 커다란 영향을 미치므로, 정밀기계의 설계를 위해서는 필히 연구되어야 할 과제이다.

그러나 간극이 있는 기계계의 진동은 강비선형 진동문제로써 초기조건 의존성(initial condition dependence), 다중해(multiple-solution), 도약현상(jump phenomenon), 혼돈운동(chaotic motion), 등의 비선형 현상을 유발한다. 따라서 정확한 응답을 예측하기에 많은 어려움이 있어 이론적으로나 실험적 연구로 증명하기에는 많은 어려움이 있다.[1-3]

따라서 본 연구에서는 간극이 존재하는 외팔보 실험장치를 제작하여, 간극과 가진력의 변화에 따른 응답특성을 살펴보고, 실험적으로 나타난 여러 현상들을 물리적으로 해석할 수 있는 이론 해석모델을 유도하였다. 외팔보와 스토퍼(stopper)가 접촉하는 충격모델[1,4,5]은 크게 반발계수모델과 편적선형모델로 나눌 수 있으며 각각에 대해 수치해석한 결과를 실험결과와 비교하여 타당한 충격모델을 밝히고자 하였다.

2. 해석모델

본 연구에서는 Fig. 1 과 같은 실험장치를 이용

* 성균관대학교 기계설계학과 대학원
** 성균관대학교 기계공학부, 교수

하여 스토퍼에 의해 운동이 구속되고, 외팔보 가진 실험을 하고 이론해석을 수행하기 위하여 1 자유도계 운동방정식을 유도하였다. 실험에 사용된 외팔보는 길이가 길고 두께가 얇은 보이므로 Euler-Bernoulli 보 이론을 적용할 수 있으며, 감쇠를 무시한 운동방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

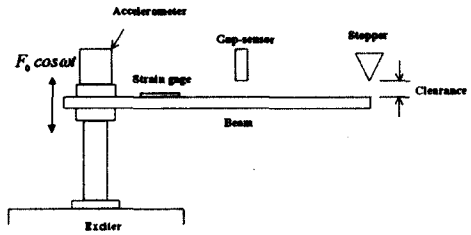


Fig. 1 Analytical model of the beam

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]=f(x,t) \tag{1}$$

식 (1)에서 외팔보는 전체 길이에 대해서 단면의 변화가 없다고 가정하면 자유진동의 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}=0 \tag{2}$$

여기서 c는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

변위는 시간과 공간의 함수로서 변수분리법을 이용하여 해를 가정하면 외팔보의 응답은 다음과 같이 정의된다.

$$w(x,t)=\phi(x)u(t) \tag{3}$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하여 정리하면 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{c^2}{\phi(x)}\frac{d^4\phi(x)}{dx^4}=-\frac{1}{u(t)}\frac{d^2u(t)}{dt^2}=\omega^2 \tag{4}$$

식 (4)는 식 (5)와 (6)과 같이 두개의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\omega^2u(t)=0 \tag{5}$$

$$\frac{d^4\phi(x)}{dx^4}-\beta^4\phi(x)=0 \tag{6}$$

여기서 β는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\beta^4=\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\rho A\omega^2}{EI} \tag{7}$$

보의 운동은 보의 중심선에 대한 진동과 기반 진동의 중첩의 형태로 나타나므로 전체 보에 대한 응답은 다음 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_{total}(x,t)=\phi(x)u(t)+x_{base}(t) \tag{8}$$

여기서 기반의 가진에 의한 진동은 다음 식 (9)와 같이 변위의 형태로 정의할 수 있다.[2]

$$x_{base}(t)=-\frac{1}{\Omega^2}a_{base}\cos\Omega t \tag{9}$$

여기서 Ω는 가진주파수를 나타내며 a_{base}는 기반 진동의 가속도를 나타낸다.

식 (9)를 식 (2)에 대입하고 양변을 정리하면 다음과 같은 기반 가진에 의한 외팔보 운동을 유도할 수 있다.

$$\rho A\left(\ddot{u}_i(t)\int_0^L\phi_i^2(s)ds\right)+EIu_i(t)\int_0^L\phi_i(s)\phi_i^{''''}(s)ds=\rho Aa_{base}\cos\Omega t\int_0^L\phi_i(s)ds \tag{10}$$

여기서 $\int_0^L\phi_i^2(s)ds=L$

$$\int_0^L \phi_i(s)\phi_i''''(s)ds = \beta_i^4 \int_0^L \phi_i^2(s)ds$$

$$\int_0^L \phi_i(s)ds = I_i$$

식 (10)을 정리하고 여기에 감쇠를 고려하면 결국 식 (11)과 같은 1 자유도계 운동방정식이 유도된다.

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{Ia_{base}\cos\Omega t}{L} \qquad (11)$$

식 (11)에서 1 차 모드만을 고려하고 센서 부착 위치에서의 모드 형상을 고려하면 계의 응답을 구할 수 있다.

3. 실험장치

본 연구에서는 간극이 존재하는 외팔보 실험을 수행하기 위하여 Fig. 1 과 같이 가진기에 의해 가진되는 외팔보 실험장치를 제작, 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 외팔보의 재료는 SK-5 탄소공구강을 사용하였으며, 그 규격을 Table 1 에 나타내었다. 스토퍼의 재료는 알류미늄을 사용하였으며, 외팔보의 끝단과는 선접촉을 하도록 제작하였다.

가진기에 외팔보의 한쪽 끝단을 고정시키고 다른 끝단은 자유운동을 하도록 구속조건을 만들고 자유단에 스토퍼를 설치하여 간극의 크기를 조절할 수 있도록 설치하였다.

외팔보에 가해지는 기반 가진은 가진기의 외팔보 고정부에 부착한 가속도계로 가속도를 측정한 후 식 (9)를 이용하여 변위의 형태로 변환하였으며, 외팔보의 응답은 보 끝단에 설치한 갭센서(gap sensor)를 이용하여 측정하였다. 기반 가진은 함수발생기(function generator)로부터 정현파를 발생시켜 파워앰프(power amplifier)로 가진기(exciter)를 구동하여 가감속 실험을 수행하였으며, 간극의 크기와 가진력을 변화시키며 실험하였다.

충격실험(impact test)한 결과 외팔보의 1 차 고유진동수는 98Hz 로서 실험구간인 40-300 Hz 에서는 2 차 모드 이상의 영향은 받지 않으므로 본 연구에서는 외팔보 운동의 1 차 모드만을 고려하여 해석하였다. Table 2 는 충격실험 결과 얻어진 시스템 변수를 나타내며 Table 3 은 본 연구에서 수행한 실험조건을 나타낸 표이다. 여기서 나타낸 가속도 값은 300 Hz 에서의 가속도값으로 가진기의 특성상 100 Hz 까지는 가속도값이 연속적으로 증가하다가 그 이후부터 일정한 가속도값이 되므로 300 Hz 를 기준으로 가속도값을 표기하였다.

Table 1. Properties of the beam

l (length)	60 mm
h (Thickness)	0.4 mm
b (width)	15 mm

Table 2. System parameters of the beam

ω_n	ζ	$I(mm)$
98	0.03	48

Table 3. Base exciting accelerations

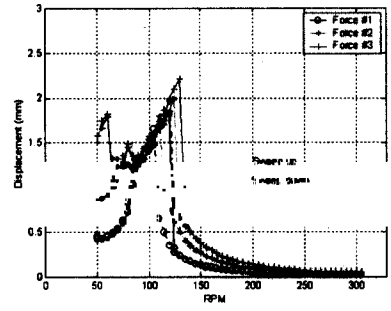
	Force #1	Force #2	Force #3
Acc (m/s^2)	50	100	150

4. 진동레벨

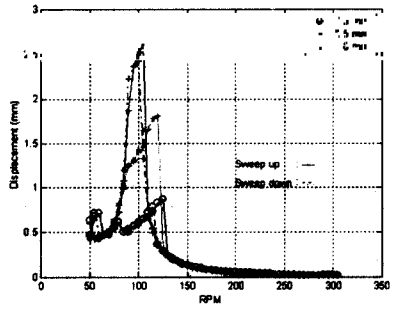
본 연구에서는 간극과 가진력의 변화에 따른 가감속 실험을 수행하였다. Fig. 2 는 가속과 감속 시 진동레벨의 변화를 나타낸 그림으로 외팔보와 스토퍼가 접촉 시 충격적인 현상으로 인해 도약현상(jump phenomenon)이 발생함을 알 수 있다. Fig. 2 (a)는 간극 0.5mm 에서 가진력의 변화에 따른 진동레벨을 나타낸 그림으로 가진력이 클수록 도약현상 발생구간이 좁아지며 도약현상 발생 시 진폭이 커짐을 알 수 있다. Fig. 2 (b)는 Force #1 에서 간극의 효과를 나타낸 그림으로 간극이 적어짐에 따라 도약현상 구간이 넓어짐을 알 수 있다. 즉 외팔보와 스토퍼가 접촉 시 가진력이 커짐에 따라 간극의 크기가 커짐에 따라 도약현상이 발생하는 구간이 좁아짐을 알 수 있다.

Fig. 3 은 Force #3, 간극이 0.5mm 인 경우에 대한 waterfall diagram 으로 접촉 구간에서는 광대역의 주파수 성분과 고차조화주파수 성분이 발생하

나 그 이후에는 1X 성분의 가진주파수 성분만 존재함을 알 수 있다.



(a) Effects of exciting force



(b) Effects of clearance

Fig. 2 Vibration levels for experimental results

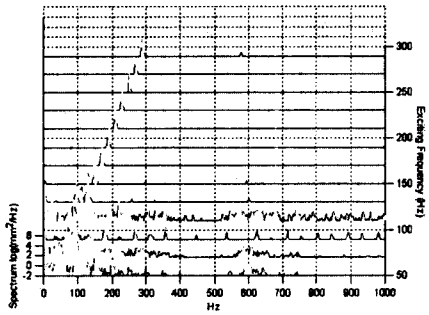


Fig. 3 Waterfall diagram (Force #3-0.5mm)

5. 충격모델 비교

식 (11)의 해는 외팔보의 운동과 기반진동에 의한 운동을 고려한 식으로서 변위가 스토퍼와의 간극보다 커지면 충격적인 접촉이 발생하게 된다. 이와 같은 충격현상을 모델링하는 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다.[5-6] 본 연구에서는 두 모델에 대한 운동방정식을 유도하여 수치해석을 수행, 실험적으로 구한 결과와 비교하여 충격모델을 나타낼 수 있는 타당한 운동방정식을 제시하고자 한다.

5.1 반발계수를 이용한 충격모델

외팔보가 스토퍼와 접촉하면 접촉 전의 속도와 접촉 후의 속도는 식 (12)와 같이 반발계수만큼의 차가 발생하게 된다. 이는 접촉 시 감쇠의 영향을 고려한 것으로 재료의 성질에 따라 응답특성이 달라진다는 가정에 의해 유도된 충격모델이다.[7]

$$x \geq d \;\rightarrow\; r = \frac{V_+}{V_-},\; x = d \tag{12}$$

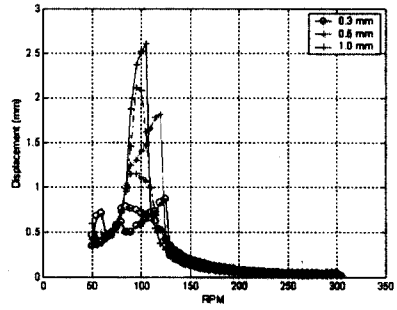


Fig. 4 Vibration levels (-- : Experiment, -.- : Simulation)

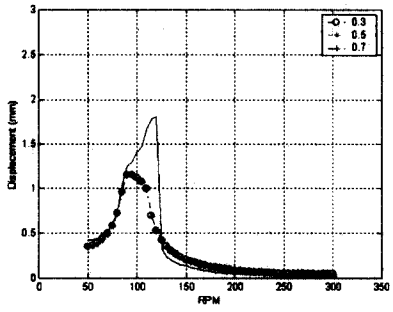


Fig. 5 Effects of coefficients of restitution
(-- : Experiment, -.- : Simulation)

반발계수를 고려한 충격모델에 대해 수치해석을

수행하면 Fig. 4 와 같은 결과를 얻을 수 있다. 여기서 반발계수는 재료의 반발계수값인 0.7 을 사용하였다. 그림으로부터 가속구간에서의 실험결과와 수치해석결과가 일치하지 않음을 알 수 있다. 이로부터 충격모델을 구현하기 위한 가정으로 반발계수를 이용한 모델이 적절하지 않음을 알 수 있다. Fig. 5 는 간극 0.5mm 에서 가속구간에 대한 반발계수의 영향을 나타낸 그림이다. 각각의 반발계수값에 대한 진동레벨이 동일하게 나타남을 알 수 있다. 이는 재료의 성질에 따라 반발계수이 변하다는 정의에 어긋나기 때문에 이와 같은 가정에 의한 충격모델은 적절하지 못하다는 것을 알 수 있다.

5.2 편적 선형 충격모델

식 (11)의 운동방정식에서 진폭이 간극보다 큰 경우 충격이 발생한다. 충격이 발생하면 시스템 파라메터에 영향을 미치게 되는데 특히 강성의 형태가 편적 선형 형태를 나타내므로 외팔보 운동의 운동방정식은 Fig. 6 의 해석모델로부터 식 (13)과 같이 진폭의 크기에 따라 두 가지 형태로 정의할 수 있다.[1]

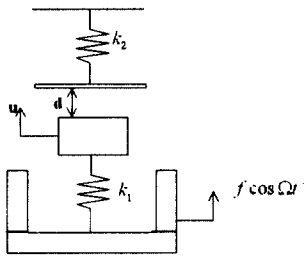


Fig. 6 Piecewise linear model

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \overline{R}(x) = \frac{Ia_{base}\cos\Omega t}{L} \qquad (13)$$

$$\overline{R} = \begin{cases} \omega_n^2 x & : x < d \\ \omega_n^2 x + \overline{\omega}^2(x-d) & : x \geq d \end{cases}$$

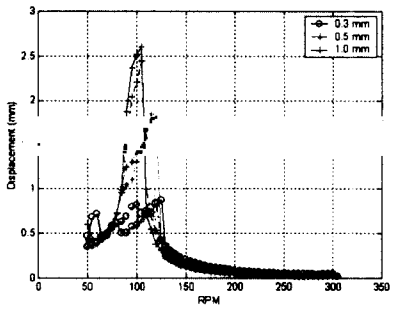


Fig. 7 Vibration levels (-- : Experiment, -.- : Simulation)

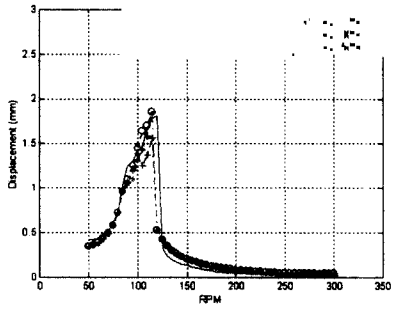
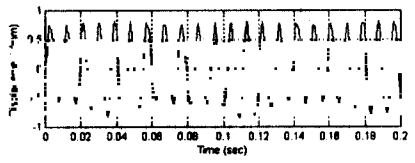


Fig. 8 Effects of contact stiffness
(-- : Experiment, -.- : Simulation)

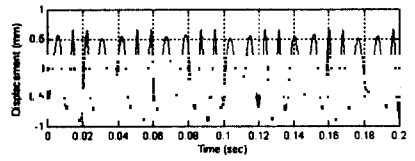
Fig. 6 의 k_1, k_2 는 외팔보 강성과 stopper 의 접촉강성을 나타내며 $\overline{\omega}$ 는 접촉 시 부가적인 접촉강성을 나타낸다. 식 (13)에 대한 수치해석을 수행하면 Fig. 7 과 같은 결과를 얻을 수 있다. 여기서 접촉강성의 값은 실험적으로 구하기 어려우므로 수치해석으로부터 실험결과와 일치하는 접촉강성값을 구하여 접촉시 시스템 강성의 30 배에 해당하는 접촉강성이 부가적으로 작용함을 알 수 있었다. 그림으로부터 수치해석에 의한 결과와 실험결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 이로부터 충격모델을 나타내는 타당한 운동방정식 형태는 편적 선형 강성을 고려한 운동방정식임을 알 수 있다. 또한 접촉강성의 영향을 알아보기 위하여 Fig. 8 과 같이 부가 강성의 크기를 변화시키면서 수치해석한 결과 접촉강성이 커질수록 진동레벨이 작아짐을 알 수 있었다.

5.3 시간영역 해석

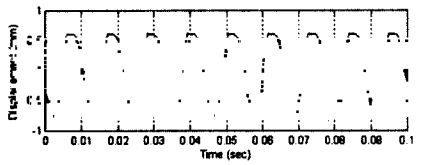
본 연구에서는 두 편적선형 모델을 수치해석과 실험데이터로부터 접촉구간에서의 시간역 신호를 비교한 결과 Fig. 9 와 같이 도약현상 발생구간에서 맥노리(beat) 현상이 발생함을 알 수 있다. 맥노리 현상은 고유주파수와 가진주파수가 거의 일치하는 경우에 발생하는 현상으로서 접촉 시 시스템 강성의 증가에 의해 고유진동수 이상의 영역인 도약현상 구간에서 맥노리 현상이 발생하며 이는 편적선형계로부터 시스템 강성의 증가로 설명이 가능하다. 반발계수를 이용한 모델의 경우 초기의 도약현상 구간에서 접촉이 일어나므로 90 Hz 영역에서의 시간영역 신호를 분석한 결과 정현파에서 윗부분이 잘려나간 형태의 파형을 보이며 이는 실험결과와 상당한 오차가 있음을 알 수 있다.



(a) Experiment (110 Hz)



(b) Piecewise linear model (110 Hz)



(c) Model using coefficient of restitution (110 Hz)

Fig. 9 Time response of the beam (Force #1, 0.5mm)

6. 결 론

간극이 있는 외팔보 실험장치를 제작, 실험과 이론해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 외팔보 운동은 모드형상과 가진의 형태에 따라 모델링 될 수 있으며 응답은 외팔보 운동자체와 기반가진 운동의 중첩의 형태로 표현될 수 있다.
2. 충격 발생 시 가속과 감속의 응답특성이 다른 도약현상이 발생함을 알 수 있었다. 또한 가진력이 클수록 간극의 크기가 클수록 도약현상 발생구간이 줄어듬을 알 수 있었다.
3. 접촉에 의한 충격모델은 편적 선형 강성을 이용한 충격모델이 타당함을 실험결과와 수치해석으로부터 알 수 있었다.
4. 접촉구간에서의 외팔보 운동은 도약현상과 함께 맥노리(beat) 현상이 나타남을 실험과 이론해석을 통해 알 수 있었다.

참고문헌

[1] S. W. Shaw, "A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator," Journal of Sound and Vibration, Vol. 90, No. 1, pp.129-140, 1983.

[2] R. W. Krauss and A. H. Nayfeh, "Experimental Nonlinear Identification of a Single Mode of a Transversely Excited Beam," Nonlinear Dynamics, Vol 18, pp. 69-87, 1999.

[3] S. Lenci, G. Rega, "Non-Smooth Dynamics and Non-Classical Bifurcations in Impuse-Impact Oscillators," Proceedings of the 1999 ASME DETC, September, pp. 1-10, 1999.

[4] M. D. Todd and L. N. Virgin, "An Experimental Impact Oscillator," Chaos, Solitions & Fractals, Vol. 8, No. 4, pp. 699-714, 1997.

[5] F. Peterka, "Bifurcation and Transition Phenomena in an Impact Oscillator," Chaos, Solitions & Fractals, Vol. 7, No. 10, pp.1635-1647, 1996.

[6] P. Metallidis, S. Natsiavas, "Dynamics of A Continuous System with Clearance and Motion Limiting Stops," Proceeding of the 1999 ASME DETC, September, pp. 1-9, 1999.

[7] A. P. Ivanov, "Bifurcation in Impact Systems," Chaos, Solitions & Fractals, Vol. 7, No. 10, pp. 1615-1634, 1996.