

비선형 정규모드를 이용한 보의 비평면 자유진동해석

⁰이원경*, 이규수**, 박철희***

Analysis of Nonplanar Free Vibrations of a Beam by Nonlinear Normal Mode

Won Kyoung Lee, Kyu-Soo Lee, and Chol Hui Pak

Key Words : 비선형정규모드(nonlinear normal mode), 비평면운동(nonplanar motion), Poincaré map, 보(beam)

ABSTRACT

An investigation into the nonlinear free vibrations of a cantilever beam which can have not only planar motion but also nonplanar motion is made. Using Galerkin's method based on the first mode in each motion, we transform the boundary and initial value problem into an initial value problem of two-degree-of-freedom system. The system turns out to have two normal modes. By Syngé's stability concept we examine the stability of each mode. In order to check validity of the stability we obtain the numerical Poincaré map of the motions neighboring on each mode.

1. 서론

비선형 다자유도계의 진동에서, 비선형성이 약하고 고유진동수 사이에 내부공진조건이 만족되는 경우에 에너지가 한 모드로부터 다른 모드로 이동한다는 현상 즉, 모드 상호작용(modal interaction)이 발생한다는 점은 잘 알려져 있다[1]. 비선형성이 강하고 내부공진조건이 만족되지 않더라도 모드상호작용이 가능하다는 점은 비선형정규모드를 연구해온 일단의 연구자들에 의해 밝혀졌다[2]. 비선형 정규모드는, 계의 운동을 기술하는 데 사용된 한 좌표가 원점이나 최대점을 지날 때 다른 모든 좌표도 그 점을 지나는 주기운동으로서 그 성격이 선형계의 정규모드와 매우 흡사하기 때문에 붙여진 이름이다. 이 주제를 흥미로운 공학문제로 인식한 첫 연구자는 Rosenberg[3-7]라 할 수 있다. 정규모드를 찾고 그 안정성을 탐구하던 초창기의 연구를 바탕으로 최근에 이 분야의 연구는 연속계의 정규모드를 Galerkin 방법에 의존하지 않고 직접 찾는 문제, 큰 에너지를 가진 정규모드 주변의 동역학 등으로 발전하고 있다.

이 연구에서는 양 방향굽힘(면내와 면외)이 가능한 외팔보의 비선형진동문제를 정규모드개념을 바탕으로 해석하

였다. 우선 Crespo da Silva와 Glynn[8]의 방정식으로부터 각 방향의 1차 모드만 고려하여 Galerkin 방법을 사용해서 비선형 2자유도계로 근사하고 문제의 정규모드를 찾은 후 Syngé[9]의 안정성개념으로부터 그 정규모드의 안정성을 조사하였다. Poincaré map을 수치적으로 구함으로써 이러한 해석의 타당성을 확인하였으며, 계가 가진 에너지의 크기에 따라 정규모드가 아닌 주기해와 새로운 정규모드의 분기 등을 확인하였다.

2. 운동방정식

단면이 직사각형인 Fig. 1의 보를 생각해보자. 두 굽힘운동 v 와 w 를 지배하는 비감쇠 자유진동방정식을 Crespo da Silva와 Glynn[8]으로부터 다음과 같이 옮겨오기로 한다.

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \beta_y v'''' &= \left\{ (1 - \beta_y) \left[w'' \int_1^s v' w' ds - w''' \int_0^s v' w' ds \right] \right. \\ &\quad - \left[\frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \right] (w'' \int_0^s \int_1^s v' w' ds ds)' \\ &\quad - \left. \left\{ \beta_y (v' (v' v'' + w' w''))' \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ v' \int_1^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\} \right\} \end{aligned}$$

* 영남대학교 기계공학부

** 삼성전자 구미공장

*** 인하대학교 기계공학부

$$\ddot{w} + w''''$$

$$\begin{aligned} &= -\left\{ (1-\beta_y) \left[v'' \int_1^s w'' v'' ds - v'''' \int_0^s w'' v'' ds \right] \right. \\ &+ \left. \left[\frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y} \right] \left\{ v'' \int_0^s \int_1^s w'' v'' ds ds \right\} \right\} \\ &- \left\{ (w' (w' w'' + v' v''))' \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ w' \int_1^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s (w^2 + v^2) ds \right] ds \right\} \end{aligned}$$

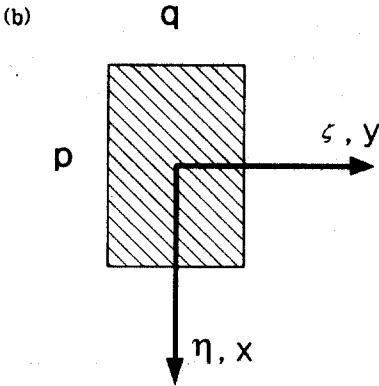
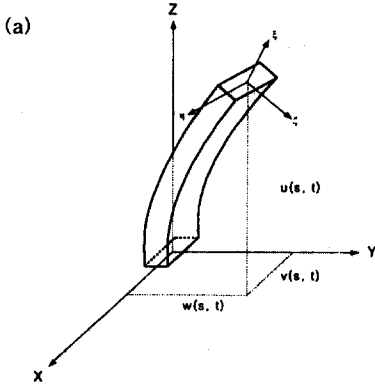


Fig. 1. (a) bending of a beam, (b) cross section, Schematic view of a coordinate system for the beam motion

여기서 $\dot{\quad}$ (dot)은 시간 t 에 대한 미분이며 $'$ (prime)은 보의 길이방향 변수 s 에 대한 미분이다.

$$\beta_y = D_t / D_y = (p/q)^2$$

$$\beta_z = D_t / D_z = 2.28571(1 + \beta_y)$$

여기서 D_t 와 D_y 는 각 방향의 굽힘강성을 나타내며 D_t 은 비틀림강성을 나타낸다. p 와 q 는 단면의 치수이며 보의 재질은 steel로 간주하여 Poisson 비는 0.3125로 계산하였다. 이 방정식의 유도과정에서 보의 비틀림고유진동수가 굽힘고유진동수보다 매우 크다고 가정함으로써 비틀림진동은 무시되었다.

(1) 두 굽힘변위(lateral displacement) v 와 w 의 1차 고유 모드만을 고려하기로 하면

$$v(s, t) = x(t)f_v(s), \quad w(s, t) = y(t)f_w(s) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_v(s) = f_w(s) &= \cosh(as) - \cos(as) \\ &- \phi(\sinh(as) - \sin(as)) \end{aligned} \quad (3)$$

로 표현할 수 있으며 $a=1.8751$, $\phi=0.7345$ 이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 비선형 연립상미분방정식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x + a_3 x x^2 + a_4 x y^2 \\ + a_3 x^2 \ddot{x} + a_4 x y \ddot{y} + a_1 x^3 + a_2 x y^2 = 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y + b_3 y y^2 + b_4 y x^2 \\ + b_3 y^2 \ddot{y} + b_4 y x \ddot{x} + b_1 y^3 + b_2 x^2 y = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (p/q)\omega_2 \\ a_1 &= \int_0^1 f_v \{ \beta_y f_v' (f_v f_v') \} \bar{d}s \\ a_2 &= \int_0^1 f_v \{ \beta_y f_v (f_w f_w') \} \\ &- \left\{ (1-\beta_y) \left[f_w' \int_1^s f_v' f_w' \bar{d}s - f_w'' \int_0^s f_v' f_w' \bar{d}s \right] \right. \\ &- \left. \left[\frac{(1-\beta_y)^2}{\beta_y} \right] \left\{ f_w' \int_0^s \int_1^s f_v' f_w' \bar{d}s \bar{d}s \right\} \right\} \bar{d}s \end{aligned}$$

$$a_3 = \int_0^1 f_v \left\{ f_v \int_1^s \int_0^s f_v' \bar{d}s \bar{d}s \right\} \bar{d}s$$

$$a_4 = \int_0^1 f_v \left\{ f_v \int_1^s \int_0^s f_w'^2 \bar{d}s \bar{d}s \right\} \bar{d}s$$

$$b_1 = \int_0^1 f_w \{ f_w (f_w f_w) \}' \bar{d}s$$

$$b_2 = \int_0^1 f_w [(f_w (f_v f_w))' + \left\{ (1 - \beta) \left[f_v \int_1^s f_v f_w \bar{d}s - f_v \int_0^s f_w f_v \bar{d}s \right] + \left[\frac{(1 - \beta)^2}{\beta} \right] (f_v \int_0^s \int_1^s f_v f_w \bar{d}s \bar{d}s) \right\}] \bar{d}s$$

$$b_3 = \int_0^1 f_w \left\{ f_w \int_1^s \int_0^s f_v^2 \bar{d}s \bar{d}s \right\} \bar{d}s$$

$$b_4 = \int_0^1 f_w \left\{ f_w \int_1^s \int_0^s f_w^2 \bar{d}s \bar{d}s \right\} \bar{d}s$$

여기서 ω_1 과 ω_2 는 각 굽힘운동의 1차 고유진동수이며 $a_2 = b_2$ 와 $a_3 = a_4 = b_3 = b_4$ 임이 판명되므로 식 (4)를 정리하면 다음과 같다.

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + a_3 x \dot{x}^2 + a_3 x y^2 + a_3 x^2 \dot{x} + a_3 x y \dot{y} + a_1 x^3 + a_2 x y^2 = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + a_3 y \dot{y}^2 + a_3 y x^2 + a_3 y^2 \dot{y} + a_3 y x \dot{x} + b_1 y^3 + a_2 x^2 y = 0 \quad (5)$$

여기서 계의 운동에너지 T 와 위치에너지 V 는 다음과 같으며

$$T = \frac{1}{2} (1 + a_3 x^2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (1 + a_4 y^2) \dot{y}^2 + a_3 x y \dot{x} \dot{y}$$

$$V = \frac{1}{2} \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 y^2 + \frac{1}{4} a_1 x^4 + \frac{1}{4} b_1 y^4 + \frac{1}{2} a_2 x^2 y^2 \quad (6)$$

이 계가 보존계이므로 그 합은 보존된다. 즉,

$$T + V = h = \text{일정} \quad (7)$$

3. 정규모드의 안정성해석

식 (5)를 관찰하면

$y=0$ 와

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + a_1 x^3 + a_3 (x \dot{x}^2 + x^2 \dot{x}) = 0 \quad (8)$$

을 만족하는 주기해와

$x=0$ 와

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + b_1 y^3 + a_3 (y \dot{y}^2 + y^2 \dot{y}) = 0 \quad (9)$$

를 만족하는 주기해 즉, 두 개의 정규모드가 존재할 수가 있다. 우리는 이 두 정규모드를 각각 x 모드와 y 모드라고 하자. 이렇게 정규모드의 존재가 확인되면 그 안정성(stability)를 조사하는 게 순서이다.

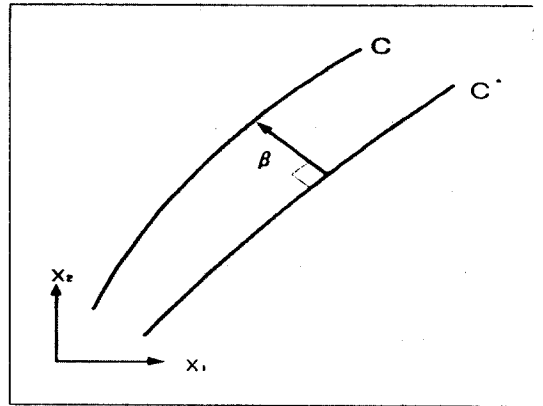


Fig. 2. Unperturbed (C^*) and perturbed (C) trajectories in the configuration space

비선형정규모드의 안정성을 연구하는 데에는 unperturbed solution(정규모드)과 perturbed solution 사이의 상태공간(state space)에서의 차이벡터(disturbance vector)의 거동을 조사하는 Liapunov 개념의 안정성보다 Fig. 2에서와 같이 configuration space에서의 unperturbed solution으로부터 수직한 방향으로의 차이벡터 β 의 거동을 조사하는 Synge[9]의 안정성개념이 더 유용하다는 사실이 알려져 있다(Pak[2]). Synge[9]에 따르면 정규모드의 안정성은 그 차이벡터의 크기 $|\beta| = \beta$ 의 거동을 지배하는 다음의 2계 선형상미분방정식의 trivial solution $\beta=0$ 인 해의 안정성과 일치한다.

$$\ddot{\beta} + Q(t)\beta = 0 \quad (10)$$

여기서 $Q(t)$ 는 계의 위치에너지 V 와 정규모드의 기하학적 특성 등에 의해 결정되는 주기함수이다. 따라서 Synge의 안정성을 이용하면 문제의 상태공간의 차원에 관계없이 2차원 문제(2계 상미분방정식)로 귀결됨을 알 수 있는데 바로 이 점이 Synge의 안정성의 장점 중의 하나이다.

문제는 각 정규모드에 해당하는 $Q(t)$ 를 어떻게 구하느냐 하는 점인데 물론 $Q(t)$ 의 일반적인 표현이 주어지지 않지만[9], 식 (8)과 (9)의 정규모드는 매우 특수하므로 각각 좌표 y 와 x 자체가 configuration 공간내에서 각 정규모드에 직교하는 좌표가 된다. 따라서 이들을 $\beta(t)$ 로 돕으로써 $Q(t)$ 를 쉽게 구할 수가 있다. 편의를 위해 두 정규모드를 분리해서 설명하기로 한다.

3.1 x 모드의 안정성

조화균형법을 사용하기 위하여 x 모드의 근사해를 $x = A \cos \omega t$ 라 두고 이것을 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 진동수-진폭 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} A^3 a_1 - A \omega^2 - \frac{1}{2} A^3 a_3 \omega^2 + A \omega_1^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \left(\frac{3}{4} a_1 A^2 + \omega_1^2 \right) / \left(1 + \frac{1}{2} a_3 A^2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

진동수 ω 가 진폭 A 에 의존함을 보여주는 이 진동수-진폭 관계를 갖는 $y=0$ 이며 $x=A \cos \omega t$ 인 해가 하나의 정규모드 즉 x 모드의 근사해가 된다. 여기서 정규모드의 성격은 전적으로 진폭 A (식 (7)에 의해 에너지 h 와 동일시킬 수 있는)에 의해 결정됨을 주목해야 한다. 또한 configuration space ($x-y$ 평면)에서의 이 모드에 직교하는 궤적은 x 축 위에 놓이므로 $y=\beta(t)$ 이며 $x=A \cos \omega t$ 인 perturbed solution의 거동을 조사해보기 위하여 이 표현을 식 (8)의 2번째 식에 대입하고 선형화하면 식 (10)에 상응하는 다음 식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \left(\frac{1}{2} A^2 a_2 + \omega_2^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} A^2 (a_2 - 2a_3 \omega^2) \cos 2\omega t \right) \beta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

이 식은 Mathieu 방정식

$$\ddot{\beta} + (\delta + 2\epsilon \cos 2\tau) \beta = 0 \quad (13)$$

에서 $\delta = \frac{1}{2} A^2 a_2 + \omega_2^2$, $\epsilon = \frac{1}{4} A^2 (a_2 - 2a_3 \omega^2)$ 인 경우에 해당하는데 δ 와 ϵ 이 운동의 진폭 A 혹은 에너지 h 에 달려 있음을 주목해야 한다. 위의 δ 와 ϵ 으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\delta = 2\epsilon + a_3 A^2 + \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \quad (14)$$

Mathieu 방정식 (13)에 해당하는 안정성선도(stability diagram)는 매우 잘 알려져 있는데, 문제의 정규모드가 갖는 에너지 h 에 따라 $\delta-\epsilon$ 평면에 그려진 안정성선도 위의 점이 결정되고 그 점이 안정영역에 위치하면 정규모드도 안정되고, 그 점이 불안정영역에 위치하면 그 정규모드도 불안정한 것이다. 따라서 식 (14)는 정규모드의 에너지가 변화함에 따라 안정성선도에서의 정규모드의 성격을 규명하는 이 궤적을 운동곡선(motion curve)라고 한다. 다시 말하자면 $\delta-\epsilon$ 평면내의 모든 점이 아니라 반드시 운동곡선상의 점만이 정규모드에 해당하므로 우리는 운동곡선에만 관심을 갖는다.

3.2 y 모드의 안정성

x 모드의 경우에서와 마찬가지로 조화균형법을 사용하기 위하여 y 모드의 근사해를 $y = B \cos \omega t$ 라 두고 이것을 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 진동수-진폭 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} B^3 b_1 - B \omega^2 - \frac{1}{2} B^3 a_3 \omega^2 + B \omega_2^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \left(\frac{3}{4} b_1 B^2 + \omega_2^2 \right) / \left(1 + \frac{1}{2} a_3 B^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

configuration space에서의 이 모드에 직교하는 궤적은 x 축 위에 놓이므로 $x=\beta(t)$ 이며 $y=B \cos \omega t$ 인 perturbed solution의 거동을 조사하기 위하여 이 표현을 식 (9)의 두 번째 식에 대입하고 선형화하면 식 (10)에 상응하는 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \left(\frac{1}{2} B^2 a_2 + \omega_1^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B^2 (a_2 - 2a_3 \omega^2) \cos 2\omega t \right) \beta = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

이 식은 Mathieu 방정식 (13)에서

$$\delta = \frac{1}{2} B^2 a_2 + \omega_1^2, \quad \epsilon = \frac{1}{4} B^2 (a_2 - 2a_3 \omega^2)$$

인 경우에 해당하는데

$$\delta = 2\epsilon + a_3 B^2 + \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \quad (17)$$

의 관계가 성립함을 알 수 있다. 이 관계식이 안정성선도

에서 y 모드의 에너지에 따라 그 안정성을 판별해주는 운동곡선을 주게된다.

4. 수치결과

수치결과를 위하여 보의 횡단면비 $p/q=1$ 일 때 즉 정방형 단면의 경우와 $p/q=1.2$ 일 때 즉 장방형 단면의 경우를 분리해서 설명하자. 각 단면비에 해당하는 매개변수 값은 아래의 Table 1에 주어져 있다.

	$p/q = 1.0$	$p/q = 1.2$
β_y	1.0	4.57145
β_z	1.44	5.57113
ω_1	3.51598	4.21917
ω_2	3.51598	3.51598
a_1	40.44066344	40.44066344
b_1	40.44066344	58.23455535
$a_2 = b_2$	40.44066344	48.76109820
$a_3 = a_4 = b_3 = b_4$	4.596772500	4.596772500

Table 1. Values of system parameters for the cases of $p/q=1.0$ and 1.2.

4.1 $p/q=1.0$ (정방형 단면)의 경우

우선 x 모드의 안정성을 위해 Table 1의 계수값을 대입하고 Mathematica를 사용해서 식 (14)를 δ 와 ϵ 만의 관계식으로 정리하면 다음의 운동곡선식을 얻는다.

$$\delta = [12.36(1 + 0.57(2\sqrt{(0.39 + 0.65\epsilon)^2 - 1.06\epsilon} - 2(0.39 + 0.65\epsilon)))] / [12.36 + 7.58(2\sqrt{(0.39 + 0.65\epsilon)^2 - 1.06\epsilon} - 2(0.39 + 0.65\epsilon))] + 1.15(2\sqrt{(0.39 + 0.65\epsilon)^2 - 1.06\epsilon} - 2(0.39 + 0.65\epsilon)) + 2\epsilon \quad (18)$$

이 식은 $\delta=1-\epsilon$ 과 매우 근사함이 판명되지만 Fig. 2의 안정성선도에서 에너지(혹은 진폭 A)에 따라 천이곡선을 여러 차례 가로질러 안정영역(s)에도 불안정영역(u)에도 위치할 수 있는 것으로 확인되었다. 따라서 x 모드의 안정성은 에너지에 달려 있다.

y 모드의 경우, Table 1에서 $\omega_1=\omega_2$ 이고 $a_1=b_1$ 이므로 식 (17)은 식 (14)에 일치하게 되어 이 경우의 운동곡선의 식은 x 모드의 운동곡선의 식 (18)과 일치한다. Fig.

2에서 알 수 있듯이 에너지(혹은 진폭 A)가 증가할수록 ϵ 은 $-\infty$ 에 접근한다.

이렇게 판별한 정규모드의 안정성을 확인하기 위하여 계 (5)를 수치적으로 적분함으로써 Poincaré map을 그리기로 한다. 여기선 x 모드의 경우만 다루기 위하여 Poincaré 단면도를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\Sigma = \{x=0, \dot{x}>0\} \cap \{T+V=h\}$$

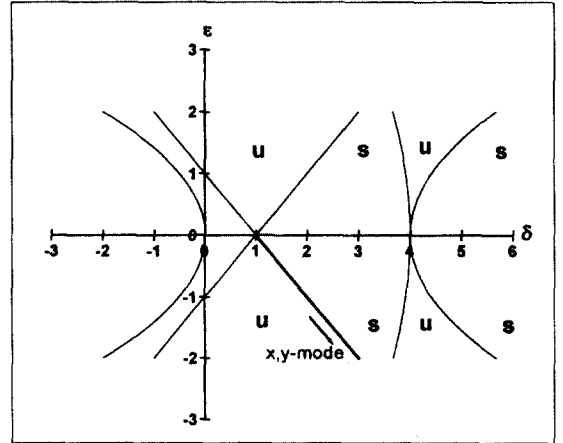


Fig. 3. Motion curves in the stability diagram for $p/q=1.0$. — : transection curves; - - - : motion curves; \rightarrow : increase of total energy h ; s : stable; u : unstable. The motion curves turn out to be in the region u.

Fig. 4의 에너지 $h=0.3$ (a)과 $h=1.0$ (b)의 경우는 Fig. 3에서 운동곡선이 불안정영역에 위치하는 경우로서, Poincaré map의 원점 즉, $(y, \dot{y})=(0, 0)$ 에 위치한 fixed point에 해당하는 x 모드가 불안정함을 보여줌으로써 Fig. 3의 해석결과가 타당함을 말해준다. 이 x 모드의 불안정성은 실험적으로 면내운동만 하도록 초기조건을 주더라도 에너지가 면외운동으로 전달됨을 의미한다. 원점의 좌우에 위치한 fixed point는 각각 하나의 주기해를 의미하는데 정규모드가 아닌 이 주기해를 분기모드라고 부르기도 한다.

4.2 $p/q=1.2$ (장방형 단면)의 경우

정방형의 경우에서와 마찬가지로 각 정규모드에 해당하는 운동곡선은 다음과 같으며,

x 모드의 운동곡선 :

$$\delta = (7.47 + 14.83\epsilon^2 + 7.09\sqrt{0.47 - 0.70\epsilon + 0.53\epsilon^2})$$

$$\frac{\epsilon(-15.04 - 20.38\sqrt{0.47 - 0.70\epsilon + 0.53\epsilon^2})}{(7.35 - 11.03\epsilon + 15.16\sqrt{0.47 - 0.70\epsilon + 0.53\epsilon^2})} \quad (19)$$

y모드의 운동곡선 :

$$\delta = \frac{(11.89 + 15.91\sqrt{(-0.99 + \epsilon)(-0.14 + \epsilon)})\epsilon + (-21.70 - 10.20\sqrt{(-0.99 + \epsilon)(-0.14 + \epsilon)})\epsilon + 10.21\epsilon^2}{(7.47 + 13.18\sqrt{(-0.99 + \epsilon)(-0.14 + \epsilon)}) - 13.18\epsilon} \quad (20)$$

이들을 Fig. 6에 나타내었다. 이 경우에는 정방형의 경우와는 달리 x모드와 y모드의 운동곡선이 서로 다를 수 있다.

우선 x모드의 운동곡선을 관찰하면 $\epsilon=0$ 에서 x모드가 안정한 상태에서 출발하여 계의 에너지 h 가 증가함에 따라 점 a ($h=0.8893$)에서 x모드가 불안정해지고 점 b (h

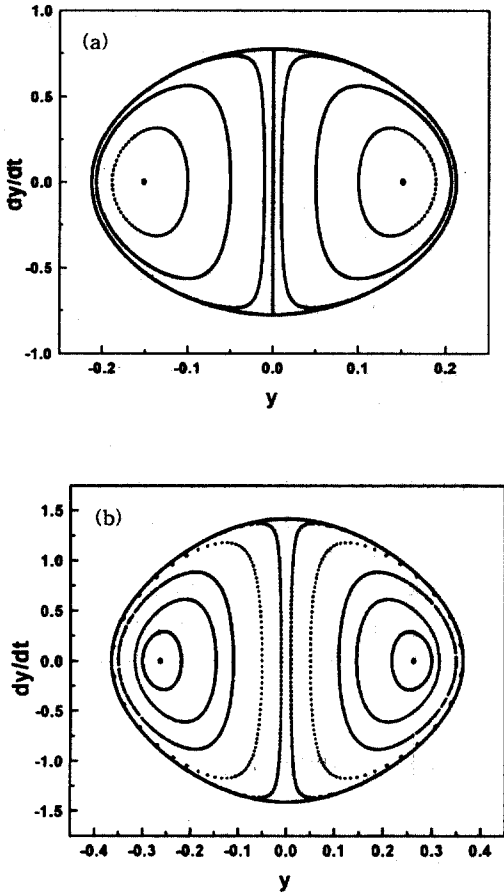


Fig. 4. Poincaré maps for $p/q=1.0$ showing the x-mode is unstable. (a) $h=0.3$; (b) $h=1.0$.

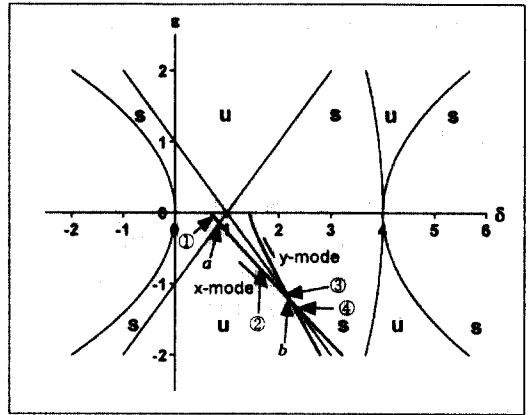


Fig. 5. Motion curves in the stability diagram for $p/q=1.2$. — : transection curves; — : motion curves; \rightarrow : increase of total energy h ; s : stable; u : unstable. ① $h=0.8$; ② $h=8.4$; ③ $h=13.75$; ④ $h=15$.

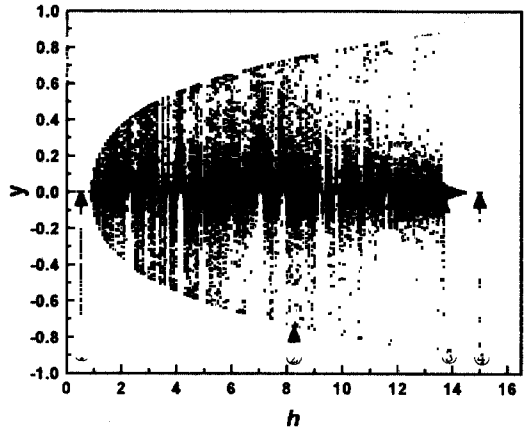


Fig. 6. Bifurcation diagram for $p/q=1.2$ showing how stability characteristics of the x-mode change. ① $h=0.8$; ② $h=8.4$; ③ $h=13.75$; ④ $h=15$.

=15.4394)에서 다시 안정상태로 변화함을 알 수 있다. 즉 에너지에 따라 x모드는 안정성 특성(stability characteristics)이 두 번 바뀜을 보여준다. 여기서 점 a 와 b 는 천이곡선과 운동곡선의 교점이며 그림의 점 ① ($h=0.8$)과 ④ ($h=15$)는 안정영역에 위치한 운동곡선의 점이며 ② ($h=8.4$)와 ③ ($h=13.75$)은 점 a 와 b 사이의 점 즉 불안정영역에 위치한 운동곡선 위의 점이다.

반면에 y모드의 경우엔 $\epsilon=0$ 에서 안정한 상태에서 출발하여 에너지가 증가함에 따라 $h=13.26$ 에서 천이곡선과 교차하게 되어 에너지가 더 증가하면 불안정해진다.

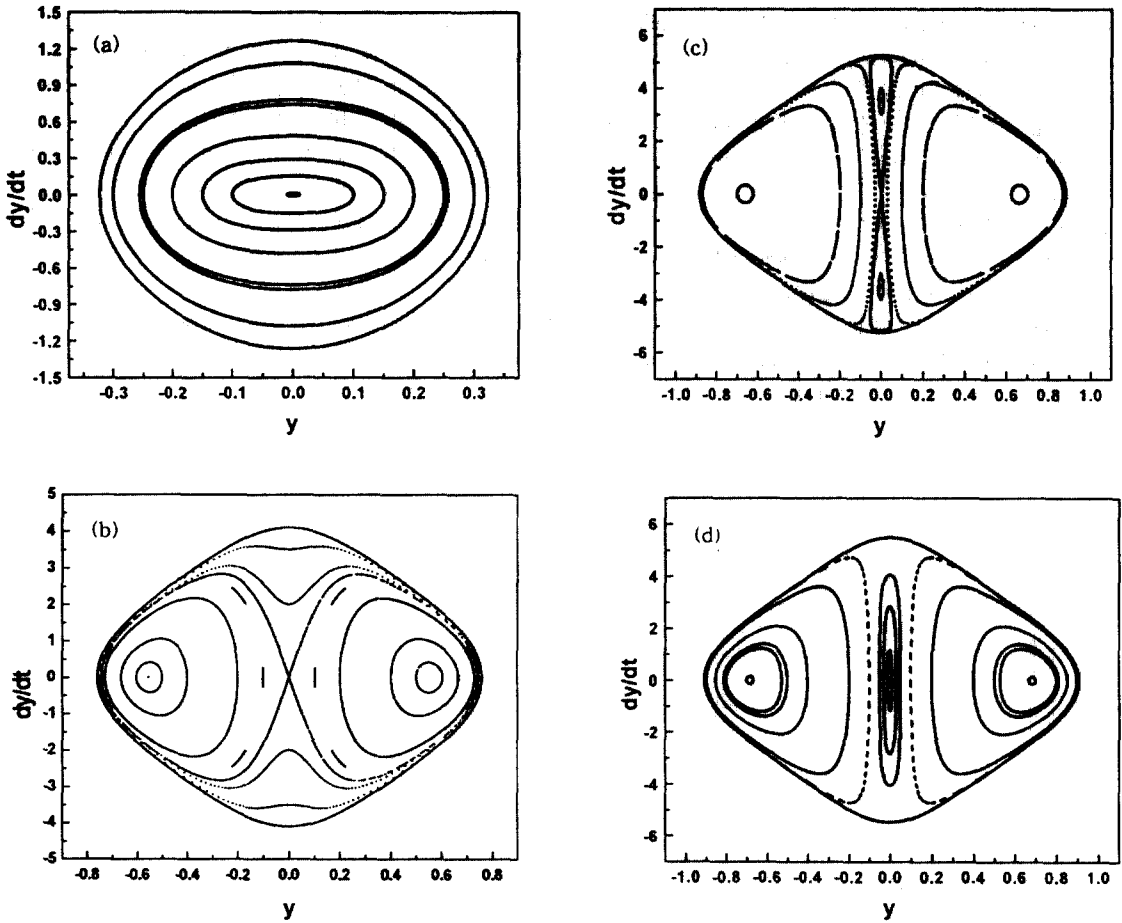


Fig. 7. Poincaré maps for $p/q=1.2$ showing stability of the x -mode depends on the energy h . (a) $h=0.8$; (b) $h=8.4$; (c) $h=13.75$; (d) $h=15$.

이렇게 해석적으로 구한 정규모드(이 원고에서는 설명을 간단히 하기 위하여 x 모드의 경우만 언급하기로 한다)의 안정성판별이 타당한지를 수치적분을 통해 확인하기 위하여 Fig. 6엔 분기선도(bifurcation diagram)를, Fig. 7엔 Poincaré map을 그렸다. Fig. 5에서 예측한 것과 같이 분기선도의 ①과 ④의 에너지에서는 $y=0$ 인 주기해 즉 x 모드가 안정하지만 ②와 ③의 에너지에선 불안정하여 y 운동이 발생함을 보여주고 있다. 마찬가지로 Fig. 7의 Poincaré map(a)~(d)는 각각 Fig. 5의 ①~④의 에너지에 해당하면서도 (a)와 (d)의 경우엔 x 모드가 center로 (b)와 (c)의 경우엔 saddle point로 나타나 그 안정성 특성이 Fig. 5에서 예측한 바와 잘 일치하고 있다.

이 그림의 (b)~(d)에서 원점 $(y, \dot{y})=(0, 0)$ 좌우의 center들은 주기해이긴 하지만 정규모드는 아니므로 분기

모드에 불과하지만 Fig. 7 (c)에서 원점 상하의 center 즉 y 축 위의 center들은 $(x, y)=(0, 0)$ 를 통과하는 주기해들의 의미하므로 정규모드들이다. 다시 말하자면 이 그림엔 세 개의 정규모드를 포함하고 있지만 원점 $(x, y)=(0, 0)$ 에 위치한 saddle point에 해당하는 정규모드가 바로 Fig. 5에서 안정성을 검토한 x 모드라는 것이다.

참고문헌

- [1] Nayfeh, A. H., and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley, N. Y.
- [2] Pak C. H., 1999, "Nonlinear Normal Mode Dynamics" Inha University press.
- [3] Rosenberg, R. M., and Atkinson, C. P., 1959, "On

- the Natural Modes and Their Stability in Nonlinear Two-Degree-Of Freedom Systems" , Journal of Applied Mechanics, pp. 377.
- [4] Rosenberg, R. M., 1964, "Nonsimilar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom" Journal of Applied Mechanics, June pp. 283.
- [5] Rosenberg, R. M., 1966, "On Nonlinear Vibration of Systems with Many Degrees of Freedom", Advances In Applied Mechanics, pp. 155 -242.
- [6] Pak, C. H., and Rosenberg, R. M., 1968, "On the Existence of Normal Mode Vibrations in Nonlinear Systems", Vol. XXIV, No.3.
- [7] Rosenberg, R. H., 1966, "On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degree of Freedom." Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp.155-242.
- [8] Crespo da Silva, M. R. M., and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams I. Equation of Motion, II. Forced Motions." J. Struct. Mech. Vol. 6, pp. 437-461.
- [9] Synge, J. L., 1926, "On the Geometry of Dynamics," Philosophical Trans. A226, pp. 31-106.