

# 구조손상을 갖는 평판의 동적특성

<sup>0</sup>김남인, 이우식\*

## Dynamic Characteristics of the Plate with Structural Damages

Namin Kim and Usik Lee

### ABSTRACT

Though there have been many researches to investigate the relationship between the damage location, damage size and the changes in eigenparameters, there have been few studies on the small-sized damages. Thus, this paper considers the plate with small local damages. The equation of motion for damaged plate is derived in terms of the damage distribution function and then the effects of small damages on the dynamic characteristics of plate are investigated. It is observed that the damage-induced modal coupling and a sufficient number of vibration modes should be considered especially for small damage detections.

### 1. 서론

구조물에 손상이 발생하면 구조물의 고유진동수, 진동 모드와 진동응답이 변화한다. 이러한 특성을 이용하여 구조물에서 발생한 손상을 추적하고 탐지하기 위한 연구가 꾸준히 이루어져 왔다. Cawley와 Adams [1]는 고유진동수를 이용하여 평판에서의 손상을 검출하였고 Yuen [2]은 모드 형상의 변화를 이용하여 손상을 검출하는 방법을 소개하였다. Pandey [3]는 손상이 진동 모드의 변화를 초래한다는 연구 내용을 소개하였으며 Luo와 Hanagud [4]는 손상된 보의 고유치 문제로부터 적분방정식을 유도하고 손상검출 기법을 소개하였다. 최근에는 Papadopoulos와 Garcia [5]가 손상이 없는 구조물과 손상된 구조물로부터 측정된 진동 모드를 이용하여 손상을 검출하는

방법을 소개하였고 Salawu [6]는 손상검출과 관련된 연구문헌들에 대한 종합적인 요약 소개하였다. 구조손상 검출과 규명에 관한 대부분의 연구에서 다루어진 손상은 실험이나 수치해석을 통해서 충분히 검출될 수 있을 정도로 상당한 정도의 크기를 갖는 손상들이 주류를 이루고 있다[1, 2, 4].

따라서, 본 연구에서는 손상의 크기나 강도가 비교적 작아서 이론해석이나 실험과정에서 충분한 주의가 요구되는 매우 작은 손상, 즉 미세손상을 대상으로 고찰하였다. 미세 손상을 갖는 평판에 대한 운동방정식을 유도하고 손상된 평판의 동특성을 고찰하였다. 또한, 모드 해석과정에서 무시된 고차 모드가 손상된 평판의 고유진동수와 진동응답에 미치는 영향을 고찰하고, 마찬가지로 손상의 위치와 크기가 이들에 미치는 영향도 고찰해 보았다.

<sup>0</sup> 인하대학교 대학원

\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

## 2. 손상된 평판의 동역학

### 2.1. 손상된 평판의 운동방정식

구조물에 손상이 발생하면 다음과 같이 일반적으로 탄성계수가 감소하는 것으로 가정한다[1, 2].

$$\bar{E} = E(1 - d) \quad (1)$$

여기서,  $E$ 는 손상되기 전의 탄성계수이고  $\bar{E}$ 는 손상된 후의 탄성계수이다.  $d(x,y)$ 는 손상분포함수로서  $d = 0$ 은 손상이 없는 상태, 그리고  $d = 1$ 은 손상된 부위가 재료적으로 완전히 파손상태에 이른 것을 의미한다.

해밀톤의 원리를 이용하여 손상된 평판의 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$D\nabla^4 w - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ d \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1-\nu) d \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ d \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + m \ddot{w} = f(x,y,t) \quad (2)$$

여기서,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 평판의 굽힘강성이고,  $m$ 은 단위 면적당 밀도이다. 손상이 없는 평판의 운동방정식은 식(2)에서 두번째, 세번째, 그리고 네번째 항을 제거함으로써 구할 수 있다. 평판의 경계에 손상이 존재하지 않는다고 가정하면 손상이 없는 평판에 적용되는 경계조건이 손상된 평판에 동일하게 적용된다.

### 2.2. 손상이 없는 평판의 동적응답

손상이 없는 평판의 운동방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 w + m \ddot{w} = f(x,y,t) \quad (3)$$

정규 모우드의 중첩에 의해서 얻어지는 진동응답은 다음과 같이 가정한다.

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n} W_{mn}(x,y) q_{mn}(t) \quad (4)$$

여기서,  $q_{mn}(t)$ 는 고유치문제를 만족하는 Modal

Coordinate 이고  $W_{mn}(x,y)$ 는 정규 모우드로서 다음 관계식을 만족한다.

$$D\nabla^4 W_{mn} = m \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (5)$$

$$\int_A m W_{mn} W_{rs} dx dy = \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (6)$$

$$\int_A (D\nabla^4 W_{mn}) W_{rs} dx dy = \omega_{mn}^2 \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (7)$$

여기서,  $\delta_{mr}$ 과  $\delta_{ns}$ 는 Kronecker 기호이다. 식(6)와 (7)은 정규 모우드의 직교성을 나타낸다.

식(4)를 식(3)에 대입하고 식(6)과 식(7)을 이용하면 Modal Equation 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ddot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 q_{rs} = f_{rs}(t) \quad (8)$$

여기서,  $\omega_{rs}$ 는 손상이 없는 평판의 고유진동수이고  $f_{rs}(t)$ 는 Modal Force 이다. 가진주파수  $\omega$ 를 갖는 절점력을 위치  $(x_F, y_F)$ 에 작용시킨다면 Modal Coordinate 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q_{rs}(t) = \left[ \frac{W_{rs}(x_F, y_F)}{\omega_{rs}^2 - \omega^2} \right] e^{i\omega t} \equiv Q_{rs} e^{i\omega t} \quad (9)$$

손상이 없는 평판의 진동응답은 식(9)을 식(4)에 대입함으로써 구할 수 있다.

### 2.3. 손상된 평판의 동적 응답

손상된 평판에 대한 운동방정식은 식(2)에 표현되었다. 식(2)의 일반해는 손상이 없는 평판의 정규 모우드  $W_{mn}(x,y)$ 를 이용해서 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n} W_{mn}(x,y) \bar{q}_{mn}(t) \quad (10)$$

식(10)을 식(2)에 대입하고 식(6)과 식(7)을 사용하면 Modal Equation 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ddot{\bar{q}}_{rs} + \omega_{rs}^2 \bar{q}_{rs} - \sum_{m,n} \lambda_{rsmn} \bar{q}_{mn} = f_{rs}(t) \quad (11)$$

윗 식에서  $\lambda_{rsmn}$ 는 구조손상의 영향을 나타내는 손상영향행렬(DIM)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_{rsmn} = D \int d(x,y) \left[ \left( \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial x \partial y} + \left( \nu \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (12)$$

식(12)에서 살펴볼 수 있듯이 손상영향행렬은 손상의 분포형태와 모우드의 곡률에 지배됨을 알 수 있다. 손상분포함수  $d(x,y)$ 가 주어지면 모든 종류의 미세손상에 대해서 식(12)로부터 손상영향행렬을 구할 수 있다.

손상된 평판의 고유진동수  $\bar{\omega}$ 는 다음으로부터 구할 수 있다.

$$\det \left[ (\omega_{mn}^2 \delta_{mr} \delta_{ns} - \lambda_{rsmn}) - \bar{\omega}^2 \delta_{mr} \delta_{ns} \right] = 0 \quad (13)$$

손상유발 모우드 연성이 매우 작아 무시될 수 있는 경우 손상영향행렬은 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$\lambda_{rsmn} \cong \Lambda_{rs} \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (14)$$

여기서,

$$\Lambda_{rs} = D \int d(x,y) \left[ \left( \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{rs}}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (15)$$

근사화된 손상영향행렬을 사용함으로써 손상된 평판의 고유진동수( $\bar{\omega}$ )는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\omega}_{rs}^2 \cong \omega_{rs}^2 - \Lambda_{rs} \quad (16)$$

위치  $(x_r, y_r)$ 에 절점력이 작용할 때 식(11)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\bar{q}_{rs}(t) = q_{rs}(t) + \Delta q_{rs}(t) \quad (17)$$

여기서,  $q_{rs}(t)$ 는 식(8)의 일반해이고  $\Delta q_{rs}(t)$ 는 미세손상에서 인해 발생하는 미소 변화량이다. 식(17)을 식(10)에 대입하면 다음과 같다.

$$\Delta \ddot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 \Delta q_{rs} = \sum_{m,n} \lambda_{rsmn} (q_{rs} + \Delta q_{rs}) \cong \sum_{m,n} \lambda_{rsmn} Q_{rs} e^{i\omega t} \quad (18)$$

윗 식에서  $Q_{rs}$ 는 식(9)에 정의되어 있다. 식(18)을  $\Delta q_{rs}(t)$ 에 대해서 풀면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta q_{rs}(t) = \left[ \sum_{m,n} \frac{\lambda_{rsmn} Q_{rs}}{\omega_{rs}^2 - \omega^2} \right] e^{i\omega t} \equiv \Delta Q_{rs} e^{i\omega t} \quad (19)$$

식(9)과 식(19)을 식(17)에 대입하고, 그 결과를 식(10)에 대입하면 손상된 평판의 진동응답은 다음과 같다.

$$w(x,y,t) = \left[ \sum_{m,n} \frac{W_{mn}(x,y) W_{mn}(x_F, y_F)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} + \sum_{m,n,r,s} \lambda_{rsmn} \frac{W_{mn}(x,y)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \frac{W_{rs}(x_F, y_F)}{\omega_{rs}^2 - \omega^2} \right] F e^{i\omega t} = W(x,y) e^{i\omega t} \quad (20)$$

고유진동수  $\omega_{mn}$ 을  $\omega_{mn}(1+i\eta)^{1/2}$ 로 대체함으로써 구조감쇠의 영향을 포함시킬 수 있다. 여기서  $\eta$ 는 손실계수이다.

### 3. 동특성 해석결과

일반적으로 구조물의 동특성 변화에 대해서 미세손상의 영향은 매우 작다. 그러므로 신뢰할 수 있는 동특성 결과를 얻기 위해서는 실험이나 수치해석 과정에서 존재할 수 있는 오차의 원인을 이해하고 사전에 제거해야 한다. 모우드해석 과정에서 무시되는 고차 정규모우드의 영향이나 손상영향행렬의 off-diagonal 성분에 해당하는 손상유발 모우드 연성을 종종 무시함으로써 발생하는 오차 등이 있을 수 있다. 이러한 오차들의 영향을 고찰하고 손상의 위치와 크기의 변화가 고유진동수와 진동응답에 미치는 영향을 수치예제를 통해 고찰해 보았다. 본 연구의 수치예제로 선정한 평판은 가로  $a = 0.4 \text{ m}$ , 세로  $b = 0.6 \text{ m}$ , 두께가  $h = 0.004 \text{ m}$  이고 단위 면적당 밀도는  $\rho = 2800 \text{ kg/m}$  로 가정하였다.

#### 3.1. 무시된 고차 모우드의 영향

Fig. 1은 순수한 손상영향과 진동응답에 대해 무시된 고차 모우드의 영향을 비교한다. 손상이 없는 평판의 정확한 진동응답은 충분한 수의 정규모우드(25개의 정규모우드)를 고려함으로써 얻을 수 있다. 그것은 무시된 고차 모우드 영향과 순수한 손상영향을 계산하기 위해 참고값으로 사용된다. 또한 Fig. 1은 무시되는 고차 모우드 영향이 순수한 손상 영향보다 훨씬

선 작게 하기 위해 고려되는 충분한 정규 모우드의 수를 나타낸다. 무시되는 고차 모우드 영향이 순수한 손상영향의 10%보다 더 작게 하기 위해서는 최소 9개의 정규 모우드가 필요하다.

### 3.2. 손상유발 모우드 연성의 영향

Table 1은 위치  $x_D=0.2\text{ m}, y_D=0.3\text{ m}$ 에서 크기가  $d=0.5$ 인 단일손상을 갖는 평판의 손상영향행렬을 나타낸다. Table 2는 두개의 손상을 갖는 평판의 손상영향행렬을 나타낸다. 즉, 위치  $x_D=0.20\text{ m}, y_D=0.30\text{ m}$ 에서  $d=0.5$ 와 위치  $x_D=0.15\text{ m}, y_D=0.375\text{ m}$ 에서  $d=0.8$ 인 손상을 갖는다. 손상영향행렬의 값은 모우드 번호  $(m, n)$ 가 증가함에 따라 증가되는 것을 알 수 있다. 이것은 미세손상의 영향이 고차 고유진동수에서 더 크다는 것을 의미한다. 손상영향행렬의 off-diagonal 성분은 diagonal 성분보다 항상 작으나, 고차 모우드에 해당하는 off-diagonal 성분은 저차 모우드의 diagonal 성분보다 클 수도 있다. 그러므로 고차 모우드의 off-diagonal 성분은 저차 모우드의 diagonal 성분보다 더 중요할 수 있기 때문에 세심한 주의가 필요하다. Table 3은 손상이 없는 평판과 위치  $x_D=0.2\text{ m}, y_D=0.3\text{ m}$ 에 크기가  $d=0.5$ 인 단일손상을 갖는 평판의 고유진동수를 비교한다. 손상이 없는 평판의 고유진동수와 손상유발 모우드 연성을 포함함으로써 정확하게 계산되는 평판의 고유진동수를 비교하면 손상의 존재로 인해 고유진동수가 감소하는 것을 알 수 있다. 그리고 고유진동수의 변화는 고차 고유진동수에서 더 크게 나타난다.

### 3.3. 고유진동수에서의 손상위치와 크기의 영향

Table 4는 손상의 크기  $d=0.5$ 인 단일손상을 갖는 평판에서 손상위치  $(x_D, y_D)$ 가 변화할 때 고유진동수 변화를 나타낸다. 일반적으로 고차 고유진동수가 저차 고유진동수보다 손상 위치의 변화에 대해서 더 민감하다는 것을 알 수 있다. Table 5는 평

판의 중앙에 손상이 있고, 손상의 크기가  $d=0.2$ 에서  $d=0.8$ 까지 변할 때 고유진동수의 변화를 나타낸다. 마찬가지로 고차 고유진동수가 저차 고유진동수보다 손상 크기의 변화에 대해서 더 민감하다는 것을 알 수 있다.

### 3.4. 진동응답에서의 손상위치와 크기의 영향

Fig. 2는 손상의 크기  $d=0.5$ 인 단일손상을 갖는 평판에서 손상위치  $(x_D, y_D)$ 가 변화할 때 진동응답의 변화를 나타낸다. Fig. 3은 평판의 중앙에 손상이 있고 손상의 크기가  $d=0.4$ 에서  $d=0.8$ 까지 변할 때 진동응답의 변화를 나타낸다. 손상의 크기가 증가할수록 응답이 커지는 것은 손상의 크기가 증가할수록 강성의 감소율이 더 크다는 것을 의미한다.

## 4. 결론

본 연구에서는 미세손상을 갖는 평판의 운동방정식을 유도하였고, 손상된 평판의 동특성에 대해서 고찰하였다. 또한 모우드해석 과정에서 무시된 고차 모우드의 대해서 고찰 하였다. 구조물에서 미세손상의 영향은 고차 고유진동수에서 더 크다는 것을 알 수 있었고, 일반적으로 고차 고유진동수가 저차 고유진동수에 비해 상대적으로 손상위치와 크기의 변화에 대해 더 민감하다는 것을 알 수 있었다. 그리고 손상의 크기가 커질수록 응답이 커지는 것을 알 수 있었다.

## 후기

본 연구는 건설교통부, 산업자원부, 과학기술부의 선도기술개발사업인 고속전철기술개발사업의 지원으로 이루어진 연구결과의 일부이며 관계자께 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Cawley, P. and Adams, R. D., "The Localization of Defects in Structure from Measurements of Natural Frequencies," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 14, No. 2, 1979, pp. 49-57.
2. Yuen, M. M. F., "A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 103, 1985, pp. 301-310.
3. Pandey, A. K., Biswas, M., and Samman, M. M., "Damage Detection From Changes in Curvature Mode Shapes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, No. 2, 1991, pp. 321-332.

4. Luo, H. and Hanagud, S., "An Integral Equation for Changes in the Structural Dynamics Characteristics of Damaged Structures," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 35-36, 1997, pp. 4557-4579.
5. Papadopoulos, L. and Garcia, E. "Structural damage identification: a probabilistic approach," *AIAA Journal*. Vol. 36, No. 11, 1998, pp. 2137-2145.
6. Salawu, O. S. "Detection of structural damage through changes in frequency: a review," *Engineering Structures*. Vol.19, No.9, 1997, pp. 718-723.
7. Lee, U., Chang, J. and Kim, N., "Structural Micro-Damage Identification," *41th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structure Forum*, Atlanta, GA, 2000, AIAA Paper-2000-1503.

Table 1 Damage influence matrix for the plate with a single damage

| rs<br>mn | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    | ... | 9    |      |
|----------|-----------|------|------|------|------|-----|------|------|
| 1        | 1.0       | -1.8 | 2.1  | -1.9 | 3.3  | ... | 5.3  |      |
| 2        |           | 3.5  | -4.9 | 3.3  | -6.6 | ... | 12.9 |      |
| 3        |           |      | 8.7  | -4.1 | 9.5  | ... | 23.6 |      |
| 4        |           |      |      | 3.6  | -6.4 | ... | 11.0 |      |
| 5        |           |      |      |      | 12.8 | ... | 26.5 |      |
| ⋮        |           |      |      |      |      | ⋮   | ⋮    |      |
| 9        | SYMMETRIC |      |      |      |      |     |      | 70.9 |

Table 3 Damage-induced modal coupling dependence of the natural frequencies

| Modes (n, n) | Intact Plate | Damaged Plate (d = 0.5) |               |
|--------------|--------------|-------------------------|---------------|
|              |              | DIMC Included           | DIMC Excluded |
| (1, 1)       | 87.96        | 87.95                   | 87.95         |
| (3, 3)       | 791.66       | 791.66                  | 791.64        |
| (5, 5)       | 2199.05      | 2198.01                 | 2196.04       |
| (7, 7)       | 4310.13      | 4310.12                 | 4280.13       |
| (9, 9)       | 7124.91      | 7021.90                 | 7011.76       |

Table 2 Damage influence matrix for the plate with two damages

| rs<br>mn | 1         | 2    | 3    | 4    | 5    | ... | 9     |      |
|----------|-----------|------|------|------|------|-----|-------|------|
| 1        | 1.0       | -1.7 | 1.9  | -1.9 | 3.3  | ... | 5.0   |      |
| 2        |           | 3.5  | -5.2 | 3.3  | -6.9 | ... | -14.1 |      |
| 3        |           |      | 9.9  | -3.8 | 10.2 | ... | 27.5  |      |
| 4        |           |      |      | 3.6  | -6.4 | ... | -10.5 |      |
| 5        |           |      |      |      | 13.2 | ... | 28.5  |      |
| ⋮        |           |      |      |      |      | ⋮   | ⋮     |      |
| 9        | SYMMETRIC |      |      |      |      |     |       | 80.8 |

Table 4 Damage location dependence of the natural frequencies

| Modes (n, n) | Damage Location $x_D/a, y_D/b$ |              |              |
|--------------|--------------------------------|--------------|--------------|
|              | (0.38, 0.63)                   | (0.25, 0.75) | (0.13, 0.88) |
| (1, 1)       | 87.96                          | 87.96        | 87.96        |
| (3, 3)       | 791.66                         | 791.66       | 791.66       |
| (5, 5)       | 2199.05                        | 2199.05      | 2199.06      |
| (7, 7)       | 4315.12                        | 4329.11      | 4331.00      |
| (9, 9)       | 7191.30                        | 7281.40      | 7331.43      |

Table 5 Damage magnitude dependence of the natural frequencies

| Modes<br>(n, n) | Damage Magnitude $d$ |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
|                 | 0.2                  | 0.4     | 0.6     | 0.8     |
| (1, 1)          | 87.78                | 86.24   | 85.32   | 85.02   |
| (3, 3)          | 791.66               | 791.65  | 791.64  | 791.64  |
| (5, 5)          | 2199.04              | 2199.04 | 2199.04 | 2199.03 |
| (7, 7)          | 4310.13              | 4310.12 | 4308.00 | 4304.76 |
| (9, 9)          | 7124.91              | 7124.91 | 7118.33 | 7112.61 |

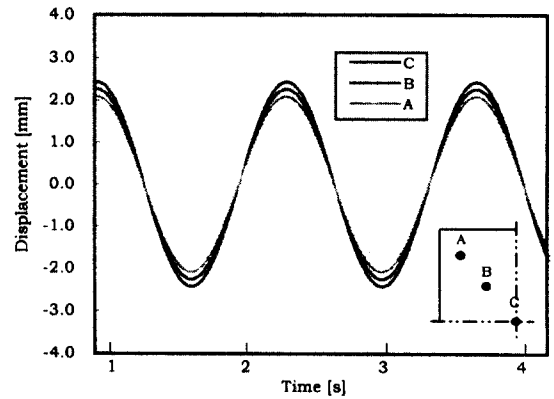


Fig. 2 Damage location dependence of the vibrational displacements

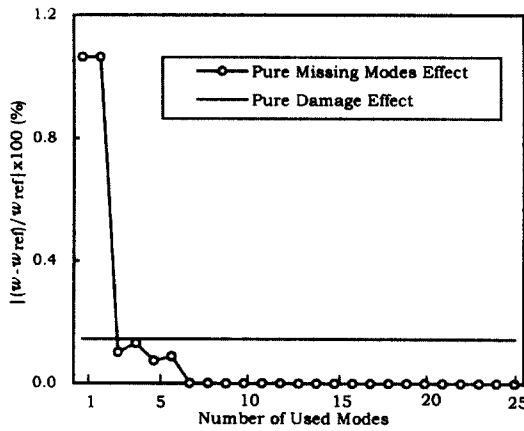


Fig. 1 Missing mode effects on the accuracy of vibrational displacements

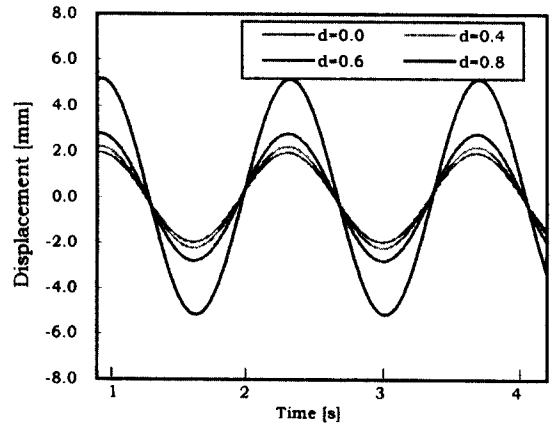


Fig. 3 Damage magnitude dependence of the vibrational displacement at the center of plate