

제 1 종 및 제 2 종 평균 임피던스

°김시문*, 김양한**

The First and Second Kinds of Total Impedances

°Sea-Moon Kim and Yang-Hann Kim

ABSTRACT

Impedance is an inherent property that represents the relation between the excitation and motion of a system. It is not only gives the frequency characteristics of the system but also help us to understand an interaction with the other systems. If the impedance to be described is not with respect to a point but to a certain area, modal impedance must be used. However, it is highly dependent on modal functions and it is needed to know all information on the modal impedance to understand the whole characteristics. In this paper, two new types of impedances are introduced: the first and second kinds of total impedances. Their definitions certainly convey the implication that their properties are similar to the conventional impedance. With some limit checks and the simulations of several simple systems, we found that they are useful to describe the frequency characteristics of systems.

1. 서론

음향·진동계의 임피던스(impedance)란 음압(또는 힘)과 속도(또는 체적속도)와의 비로 정의되며⁽¹⁾ 계 고유의 주파수 특성을 잘 나타내 주고 있다는 장점으로 인하여 해석에 많이 이용되고 있다. 즉 임피던스를 파악함으로써 임의의 입력이 주어졌을 경우 계의 전체적인 거동을 쉽게 예측해 낼 수 있으며 반대로 진동 특성을 이용하여 입력을 알아 낼 수 있다.

임피던스의 종류는 기술하고자 하는 계의 형태에 따라 크게 점 임피던스와 모달 임피던스로 나눌 수 있다. 예를들어 1자유도계에서는 가해지는 힘과 속도의 비로, 1차원 직관 내의 음압 해석에 있어서는 단면의 음압과 체적속도의 비로 정의된 임피던스를 많이 사용하고 있다. 그러나 관내 단면

내의 음압이 위치에 따라 변하는 경우나 박막이나 평판과 같이 일정한 면적을 가지고 있는 계의 특성을 설명하기 위해서는 모달 임피던스⁽²⁾의 개념을 필요로 한다. 특히 구조-음향 연성계에 있어서 모달 임피던스를 해석⁽³⁾을 통하여 모드에 따른 상호작용을 설명하는데 용이하다. 그러나 모달 임피던스는 사용되는 모드 함수에 따라 다른 결과를 얻으며 계의 평균적인 거동을 기술하기에는 무리가 따른다.

본 연구에서는 계의 전체적인 특성을 잘 나타내 줄 수 있는 새로운 물리량인 평균 임피던스를 정의 하고 그의 기본적인 특성을 살펴보고자 한다. 해석 예로 2자유도 진동계와 2차원 공동 및 박막-공동 연성계에 적용하여 평균 임피던스를 통한 해석이 주는 의미를 파악하고자 한다.

* 한국과학기술원 (KAIST) 기계공학과 대학원

** 한국과학기술원 (KAIST) 기계공학과

2. 임피던스의 정의 및 물리적인 의미

임피던스는 주어진 계의 고유 진동 특성을 나타내는 변수로서 해석하고자 하는 계의 특성에 따라 여러 가지 형태로 정의하여 사용하고 있다. 임피던스는 표현하고자 하는 부분의 크기에 따라 크게 점 임피던스와 모달 임피던스로 구분할 수 있으며 이를 살펴보면 다음과 같다.

2.1. 점 임피던스(Point Impedance)

진동/음향 분야에서 해석에 자주 적용되는 임피던스로는 기계적 임피던스 (mechanical impedance), 음향 임피던스 (acoustic impedance), 특성 임피던스 (specific acoustic impedance) 등이 있다⁽¹⁾. 이는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{mech} = \frac{F}{v}, \quad Z_{acoust} = \frac{p}{U}, \quad z = \frac{p}{v} \quad (1a,b,c)$$

여기서 F 와 p 는 힘과 압력을, v 와 U 는 속도와 체적속도를 나타내며 위상정보를 가지고 있는 복소수이다. 이때 가진을 받는 시스템에 전달되는 파워는 다음과 같이 얻어진다.

$$\bar{W}_{mech} = \frac{1}{2} \text{Re}\{Fv^*\}, \quad \bar{W}_{acoust} = \frac{1}{2} \text{Re}\{pU^*\} \quad (2a,b)$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \text{Re}\{pv^*\} \quad (2c)$$

여기서 첨자 *는 공액복소수를 나타내며, \bar{I} 는 단위면적당 전달되는 파워, 즉 인텐시티를 의미한다. 이를 임피던스를 이용하여 표현하면

$$\bar{W}_{mech} = \frac{1}{2} \text{Re}\{Z_{mech}\}|v|^2 = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{Z_{mech}^*}\right\}|F|^2 \quad (3a)$$

$$\bar{W}_{acoust} = \frac{1}{2} \text{Re}\{Z_{acoust}\}|U|^2 = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{Z_{acoust}^*}\right\}|p|^2 \quad (3b)$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \text{Re}\{z\}|v|^2 = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{z^*}\right\}|p|^2 \quad (3c)$$

와 같이 임피던스의 실수부만 연관되어 있음을 알 수 있다. 임피던스의 허수부는 한 주기 내에서 진동하는 파워와 밀접한 관계가 있으며 이를 고려하

여

$$W_{mech} = \frac{1}{2} Fv^* = \frac{1}{2} Z_{mech}|v|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_{mech}^*}|F|^2 \quad (4a)$$

$$W_{acoust} = \frac{1}{2} pU^* = \frac{1}{2} Z_{acoust}|U|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_{acoust}^*}|p|^2 \quad (4b)$$

$$I = \frac{1}{2} pv^* = \frac{1}{2} z|v|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{z^*}|p|^2 \quad (4c)$$

와 같이 복소파워 혹은 복소 인텐시티를 정의할 수 있다. 요컨대 실수부는 액티브 인텐시티와 같이 한주기에 평균적으로 전달되는 파워를 의미하며 허수부는 리액티브 인텐시티와 같이 진동하는 파워와 밀접한 관계를 가진다.

2.2. 모달 임피던스⁽²⁾

앞에서 점 임피던스는 한 점에서 혹은 한면에서 음향학적 성질이 같은 1차원 덕트의 한 면에서 정의 가능한 양이다. 따라서 공간상의 위치에 따라 음향학적 특성이 변하는 1차원 (현 또는 보) 혹은 2차원 (박막 또는 평판) 공간 등에서 적용하기 위해서는 다른 개념이 필요함을 알 수 있다. 이 경우 모달 임피던스(modal impedance)가 사용된다.

모달 임피던스를 적용하기 위해서는 우선 표현하고자 하는 공간 Ω 에서 직교성을 갖는 함수 $\phi_n(\bar{x})$ 가 정의되어야 한다. 이때 음압 및 입자속도는

$$p(\bar{x}) = \sum_n P_n \phi_n(\bar{x}), \quad v(\bar{x}) = \sum_n V_n \phi_n(\bar{x}) \quad (5a,b)$$

와 같이 표현할 수 있으며 이때 모달 임피던스 및 모달 파워는

$$Z_n = \frac{P_n}{V_n} \quad (6)$$

$$W_n = \frac{M_n}{2} P_n V_n^* = \frac{M_n}{2} Z_n |V_n|^2 = \frac{M_n}{2} \frac{1}{Z_n^*} |P_n|^2 \quad (7)$$

$$M_n = \int_{\Omega} \{\phi_n(\bar{x})\}^2 d\bar{x} \quad (8)$$

와 같다. 여기서 W_n 은 물리적으로 n 차 모드만에 의해서 전달되는 파워를 의미하며 실수부와 허수부의 의미는 2.1.절에서 기술된 바와 동일하다. 이

때 전체 파워 W_{total} 은 $\phi_n(\bar{x})$ 의 직교성을 이용하여

$$W_{total} = \sum_n W_n \quad (9)$$

와 같이 모달 파워의 합으로 표현할 수 있으며 이를 모달 임피던스를 사용하여 나타내면

$$W_{total} = \sum_n \frac{M_n}{2} Z_n |V_n|^2 = \sum_n \frac{M_n}{2} \frac{1}{Z_n} |P_n|^2 \quad (10)$$

와 같다.

3. 평균 임피던스

그러나 앞 절에서 기술된 모달 임피던스는 1차원 혹은 2차원 공간 등에서 계의 특성을 표현할 수 있다는 장점이 있으나 많은 모드가 존재하는 경우 이를 일일이 기술해야하는 어려움이 있다. 따라서 계의 전체적인 특성을 파악할 수 있는 새로운 물리량이 요구된다. 이를 위하여 본 연구에서는 새로운 형태의 임피던스인 평균 임피던스를 정의하고 이에 대한 성질을 살펴보았다.

3.1. 평균 임피던스의 정의

평균 임피던스의 정의는 임피던스와 파워와의 관계식에 의하여 정의하였다. 즉, 모달 임피던스와 모달 파워가 식 (7)과 같은 관계를 가지듯이 전체적인 에너지의 흐름을 나타내는 W_{total} 은 계의 전체적인 임피던스를 나타내는 Z_{total} 과 다음과 같은 두 가지 관계식을 생각해 볼 수 있다.

$$W_{total} = \frac{1}{2} Z_{total}^{|V_{total}|^2}, \quad W_{total} = \frac{1}{2} \frac{1}{\{Z_{total}^{(2)}\}} |P_{total}|^2 \quad (11a,b)$$

여기서 $|V_{total}|^2$ 및 $|P_{total}|^2$ 은 계의 전체적인 운동에너지와 위치에너지로서

$$|V_{total}|^2 = \sum_n M_n |V_n|^2, \quad |P_{total}|^2 = \sum_n M_n |P_n|^2 \quad (12a,b)$$

와 같이 표현될 수 있다. 따라서 식 (10), (11a),

(12a)로부터

$$Z_{total}^{(1)} = \sum_n \alpha_n Z_n, \quad \alpha_n = \frac{M_n |V_n|^2}{\sum_n M_n |V_n|^2}, \quad \sum_n \alpha_n = 1 \quad (12a,b,c)$$

를 얻을 수 있는데 여기서 $Z_{total}^{(1)}$ 은 Z_n 의 산술평균 형태를 취하고 있으며 이때 모달 운동에너지의 가중치가 곱해진 형태의 평균값을 갖는다. 본 논문에서는 이를 제 1종 평균 임피던스라 칭하고 있다. 이와 동일한 방법으로 식 (10), (11b), (12b)로부터

$$\frac{1}{Z_{total}^{(2)}} = \sum_n \beta_n \frac{1}{Z_n}, \quad \beta_n = \frac{M_n |P_n|^2}{\sum_n M_n |P_n|^2}, \quad \sum_n \beta_n = 1 \quad (13a,b,c)$$

와 같은 식을 얻는다. 이때 식 (12)와는 달리 $Z_{total}^{(2)}$ 은 Z_n 의 모달 위치에너지의 가중치가 곱해진 조화평균 형태를 하고 있다. 본 논문에서는 이를 제 2종 평균 임피던스라 칭하고자 한다.

3.2. 평균 임피던스의 특성

앞 절에서 정의된 평균 임피던스의 의미를 파악하고자 몇가지 특수한 경우에 대해서 살펴보고자 한다.

우선 모드가 한개만 존재하는 경우에는 식 (12)와 (13)으로부터

$$Z_{total}^{(1)} = Z_{total}^{(2)} = Z_1 \quad (14)$$

와 같이 얻어진다. 즉, 두 종류의 평균 임피던스 모두가 모달 임피던스와 동일한 값을 얻는다. 이는 또한 평균 임피던스의 성질도 모달 임피던스와 동일하다는 것을 의미한다.

두개 (m 과 n)의 모드가 존재하는 경우의 평균 임피던스는

$$Z_{total}^{(1)} = \frac{Z_m |V_m|^2 M_m + Z_n |V_n|^2 M_n}{|V_m|^2 M_m + |V_n|^2 M_n} \quad (15a)$$

$$\frac{1}{Z_{total}^{(2)}} = \frac{\frac{|P_m|^2 M_m}{Z_m} + \frac{|P_n|^2 M_n}{Z_n}}{|P_m|^2 M_m + |P_n|^2 M_n} \quad (15b)$$

와 같이 유도된다. 여기서 모드 m 의 운동에너지가 0에 근접하는 경우 ($V_m \rightarrow 0$) $Z_{total}^{(1)}$ 은 Z_n 에 수렴하며 모드 m 의 위치에너지가 0에 근접하는 경우 ($P_m \rightarrow 0$) $Z_{total}^{(2)}$ 가 Z_n 에 수렴한다. 이는 $Z_{total}^{(1)}$ 과 $Z_{total}^{(2)}$ 가 각각 운동에너지와 위치에너지가 지배적인 모드의 임피던스 값과 가까운 경향을 가지는 것을 의미한다. 만약 주어진 계가 체적음원 (volume source)에 의해서 가진되고 있으며 그중 모드 m 이 공진(resonance) 모드라면 음압 및 임피던스가 큰 값을 얻게되어 ($P_m \rightarrow \infty, |Z_m| \rightarrow \infty$) 제1종 및 제2종 평균 임피던스 모두 큰 값을 얻게된다 ($|Z_{total}^{(1)}| \rightarrow \infty < |Z_m|, Z_{total}^{(2)} \rightarrow Z_m, |Z_m| \rightarrow \infty$). 이와는 반대로 모드 m 이 반공진(anti-resonance) 모드인 경우에는 음압 및 임피던스가 작은 값을 가지게 되며 ($P_m \rightarrow 0, |Z_m| \rightarrow 0$) 이때 평균 임피던스는 모두 유한한 값을 가지며 특히 제2종은 Z_n 과 가까운 값을 가지게 된다.

특히 제1종 평균 임피던스는 방사효율과 밀접한 관계를 가지고 있다. 즉, 방사효율은

$$\sigma \equiv \frac{\overline{W}_{total}}{\rho c \langle |v|^2 \rangle_x S} \quad (16)$$

와 같이 정의되며⁽⁴⁾ 이로부터

$$\frac{1}{2} \text{Re}\{Z_{total}^{(1)}\} = \sigma \rho c \quad (17)$$

와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

4. 평균 임피던스 해석의 적용 예

앞에서 설명한 평균 임피던스 개념을 2자유도 모델과 무한자유도 모델인 공동계에 대하여 적용하여 보았다.

4.1. 2자유도 모델

Fig. 1과 같은 2자유도 모델에서 평균 임피던스가 어떠한 값을 갖는지 모의실험을 수행하였다.

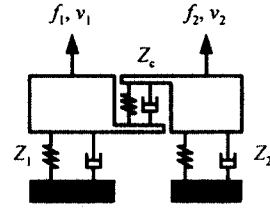


Fig. 1 A model of two degree of freedom system

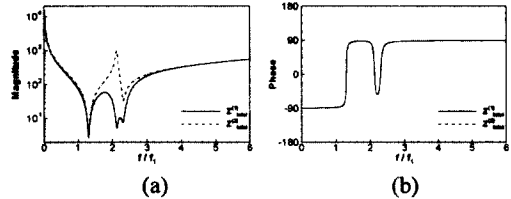


Fig. 2 Two kinds of total impedance of the model of two degree of freedom ($m_1=1\text{kg}, m_2=1\text{kg}, k_1=1*10^4\text{N/m}, k_2=4*10^4\text{N/m}, k_c=1*10^4\text{N/m}, \zeta_1=0.01, \zeta_2=0.02, \zeta_c=0.01$) (a) magnitude (b) phase

Fig. 2는 결과를 나타낸다. 두가지 모두 골을 나타내고 있는 주파수가 고유주파수에 해당하며 이때 위상은 180도가 증가하게 되는 것을 알 수 있다. 두 고유주파수 사이에 제1종은 골을, 제2종은 산을 나타내고 있는 주파수가 존재하는데 이는 반공진이 일어나는 모드로서 위상은 180도 감소하는 현상을 보인다. 시간에 따른 주기적인 거동을 $e^{i\omega t}$ 로 표현하는 경우 임피던스의 위상이 90도면 질량 효과를, -90도인 경우는 스프링 효과를 나타낸다. 따라서 본 2자유도 모델은 저주파에서 스프링 효과가, 고주파에서는 질량 효과가 지배적인 것을 알 수 있으며 이는 1자유도 모델에서 얻는 경향과 동일함을 알 수 있다. 또한 감쇠율이 클수록 산 및 골의 주파수 대역폭이 증가하며 주파수에 따른 위상 변화가 줄어들게 된다.

4.2. 닫힌 공동계

가로 $L_x=0.16$, 세로 $L_z=0.13$ 의 크기를 가진 2차원 공동계가 바닥면에 위치한 단극음원에 의해서 가진되고 있는 경우 바닥면에서의 평균 임피던스를 구하였다. Fig. 3은 이의 결과를 나타낸다. 두 평균 임피던스 값 모두 산을 나타내는 곳이 공동계의 고유주파수에 해당되는 것이며 제2종 평균 임

피드스만이 산을 나타내는 주파수는 반공진에 해당된다. 닫힌 공동계에서는 에너지를 소실시키는 요소가 없기때문에 위상은 90도 또는 -90의 값을 가지며 크기의 주파수 대역폭이 작음을 알 수 있다.

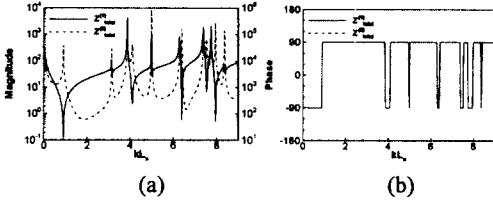


Fig. 3 Two kinds of total impedance at the bottom of the closed cavity ($L_x=0.16, L_z=0.13$) (a) magnitude (b) phase

4.3. 일부 개방된 공동계

Fig. 4와 같이 공동의 일부가 개방되어 외부 유체와 상호작용을 하는 계에 대한 해석을 수행하였다. 이와 같은 계에서는 외부 음장이 일종의 감쇠 요소로서 작용하고 있으므로 앞 결과는 약간 다른 결과를 얻을 것임을 예측할 수 있다.

Fig. 5는 가로 $L_x=0.16$, 세로 $L_z=0.13$ 의 크기를 가지며 $\alpha=0.8$ 인 경우 평균 임피던스를 나타낸다. Fig. 5(a)와 (b)는 바닥면에서의 평균 임피던스를 나타낸다 Fig. 3와 같이 두 평균 임피던스 값 모두 산을 나타내는 곳이 공동계의 고유주파수에 해당되는 곳이며 제 2종 평균 임피던스만이 산을 나타내는 주파수는 반공진에 해당된다. 그러나 외부음장이 공동계에서 났을 때는 감쇠요소로 작용하기 때문에 피크 부분의 대역폭이 넓게 얻어짐을 알 수 있으며 위상도 90도와 -90사이의 값을 가지게 된다. Fig. 5(c)와 (d)는 공동과 외부유체가 접해 있는 입구에서의 임피던스를 나타낸다. 전달 파워를 나타낸 것으로 같은 값을 얻는다. 바닥면의 임피던스는 주파수에 따라서 큰 폭으로 변하고 있는 반면 입구의 임피던스는 변화량이 작음을 알 수 있다. 이는 바닥면에서 바라보는 내부음장의 공명 특성에 의해 바닥면의 임피던스가 변하는 반면 공동에서 쳐다보는 외부 음장은 특성 변화가 적기 때문이다. 일부의 주파수에서 크기가 급격히 감소하는 현상을 보이는데 이는 입구에서의 음압이 작은

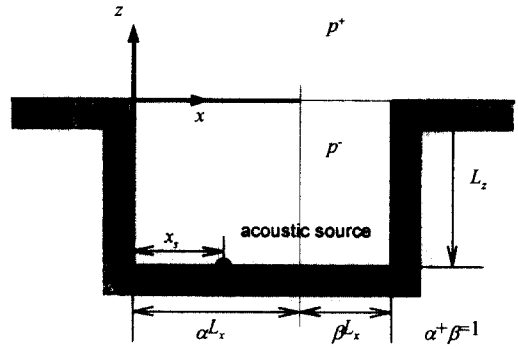


Fig. 4 A two-dimensional partially opened cavity

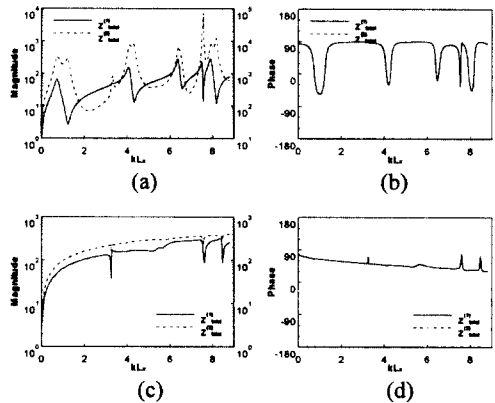


Fig. 5 Two kinds of total impedance for the two-dimensional partially opened cavity ($L_x=0.16, L_z=0.13, \alpha=0.8$) (a) magnitude (at the bottom) (b) phase (at the bottom) (c) magnitude (at the hole) (d) phase (at the hole)

경우로서 계산상의 오차가 나타나는 것이라 생각된다. 위상은 90도에 가까운 값을 가져 질량 효과가 지배적인 것을 알 수 있으며 이는 일반적으로 공동 입구에서 부가 질량이 존재한다는 사실과 일치함을 알 수 있다.

4.4. 박막-공동 연성계

마지막으로 Fig. 6과 같은 이차원 박막-공동 연성계에 대해 살펴보았다. Fig. 7(a)와 (b)는 바닥면에서 (c)와 (d)는 입구에서 (e)와 (f)는 박막에서의 평균 임피던스를 나타낸다. Fig. 7(a)부터 (d)까지의 결과는 Fig. 5와 유사한 경향을 보이며 저주파에서는 박막과의 연성 작용에 의해서 작고 많은 변화가

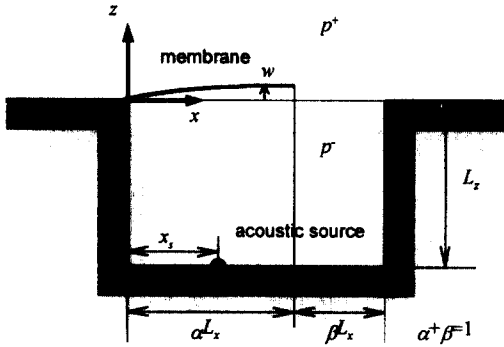


Fig. 6 A two-dimensional partially opened membrane-cavity coupled system

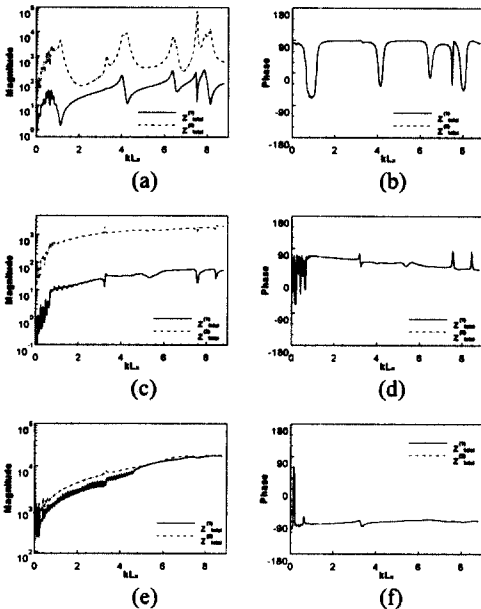


Fig. 7 Two kinds of total impedance for the two-dimensional partially opened membrane-cavity coupled system ($L_x=0.16$, $L_z=0.13$, $\alpha=0.8$) (a) magnitude (at the bottom) (b) phase (at the bottom) (c) magnitude (at the hole) (d) phase (at the hole) (e) magnitude (at the membrane) (f) phase (at the membrane)

나타남을 알 수 있다. 이 변화에서 작은 산 사이의 간격은 박막의 고유진동수와 같은 값을 가지며 특히 박막의 임피던스를 나타내는 결과에서 뚜렷하게 나타난다. 박막의 임피던스는 주파수가 증가함에 따라 같이 증가하는 경향을 보이며 위상은 대부분의 경우 -90 도의 값을 가져 스프링과 같은 거동을 함을 알 수 있다.

5. 요약 및 결론

복잡한 음향·진동계의 해석을 용이하게 하기 위하여 평균 임피던스를 적용하여 그 특성을 살펴 보았다. 음향·진동계에의 적용 예로 2 자유도 모델, 밀폐된 공동계, 일부 개방된 공동계, 박막-공동 시스템을 사용하였다. 임피던스의 크기 곡선에서 산과 골은 계의 공진 혹은 반공진 주파수에 해당되며 대역폭은 감쇠 정도와 관련이 있다. 임피던스의 위상이 90 도에 가까운 경우에는 질량 효과가, -90 도에 가까운 경우에는 스프링 효과가 지배적으로 작용하며 공진 및 반공진 주파수에서 급격한 변화를 보이고 있다. 요컨대 평균 임피던스를 살펴봄으로서 계의 전체적인 특성 파악이 가능함을 알 수 있다.

후기

본 연구는 한국과학재단 (KOSEF) 의 특정기초 연구과제와 한국과학기술평가원 (KISTEP) 의 국가 지정연구실 프로그램 지원에 의해서 연구되었음을 밝힙니다.

참고 문헌

- (1) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V., 1982, *Fundamentals of Acoustics*, 3rd Ed., pp. 11, 111, 231, John Wiley & Sons, Singapore.
- (2) Pierce, A. D., 1994, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, p. 318, Acoustical Society of America, New York.
- (3) 김시문, 김양한, 1999, "부분적으로 개방되어 있는 이차원 박막-공동 연성계의 임피던스 해석," 한국소음진동공학회 1999년도 춘계학술대회 논문집, pp. 742-747, 무주리조트 호텔타를, 1999.5.13-14.
- (4) Fahy, F., 1985, *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*, pp. 64-65, Academic Press, London.