

## 진동 신호를 이용한 평판의 음압 분포 예측

김관주\*, °최승권\*\*

### Estimation of Sound Pressure from Vibration Signals on a Flat Plate and Experiment

Kwanju Kim\*, °Sungkwon Choi\*\*

#### ABSTRACT

진동하는 구조물의 음향 방사 예측에는 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식에 근본을 둔 경계 요소 해석이 널리 사용된다. 이 경계 요소 해석은 익히 알고 있듯이 구조물의 동적 거동이 정량적으로 표현될 수 있는 경우는 매우 높은 정확도의 예측 결과를 제공한다. 그러나 실제 현상에서 접할 수 있는 복잡한 구조물의 음향 방사 예측에는 많은 변수들로 인해 예측의 정확도가 감소됨은 확실하다. 다른 방법으로는 실험을 통한 임의의 음장 예측 방법인 근음장 음향 흘로그래피(nearfield acoustical holography) 방법을 들 수 있다. 이 방법은 실제로 발생되는 음향 방사로부터 마이크로폰을 이용하여 흘로그래피면의 음압 또는 속도를 측정하고 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식에 적용하여 임의의 흘로그래피면에 투사(mapping)시켜 음장을 예측하는 방법이다. 근음장 음향 흘로그래피는 탁월한 정확성을 갖고 있으나, 측정의 복잡성과 흘로그래피면을 형성하기 위한 많은 이산점(절점)의 필요성 등의 단점을 갖고 있다. 본 논문에서는 또 다른 음장 예측 방법인 실험의 장점과 유한 요소 해석의 장점을 복합시킨 모드 확장 방법(modal expansion method)을 사용하여 단순 구조물인 평판의 진동에 의한 음장을 예측해 보았다. 모드 확장 방법은 구조물의 동적 거동은 모드의 선형 조합으로 표현될 수 있다는 것에 그 원리를 둔다. 본 논문은 단순 평판을 대상으로 유한 요소 해석으로 구한 모드 정보와 실험에 의해 얻은 임의 가진 주파수에 대한 진동 표면의 속도 분포를 조합하여 속도 경계 조건을 구성, 경계 요소 해석으로 음장 예측을 수행하였으며 모드 확장 방법을 사용함에 있어 고려해야 할 몇 가지 사항에 대해 다루었다.

#### 1. 서론

구조물의 진동에 기인한 음향 방사로 형성되는 음장을 예측하기 위해서는 진동 표면의 속도 분포 혹은 인접한 위치의 음압 정보를 정확히 알고 있어야 한다. 여기서 임의의 위치에 대한 음장 예측 기법을 두 가지로 나누어 보았다. 첫 번째 방법은 근음장 음향 흘로그래피(nearfield acoustical holography) 방법이다. 이 방법의 개념은 진동 표면에 인접한 마이크로폰들로부터 속도 혹은 음압을 측정하고 그 값을 이용하여 임의의 위치의 음장 분포를 예측하는 방법이다. 두 번째 방법은 모

드 확장(modal expansion) 방법으로써 유한 요소 해석을 이용한 모드 형상 데이터와 실험으로 구한 진동 표면의 속도 분포를 이용하여 음장을 예측하는 방법이다. 위의 두 방법의 기본 원리는 유사하다. 근음장 음향 흘로그래피는 마이크로폰으로 측정된 음압과 속도를 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식에 적용하는 형태이며, 모드 확장 방법은 실험으로 얻은 진동 표면의 속도와 유한 요소 해석으로 얻은 모드를 이용하여 속도 경계 조건을 형성하고 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식에 적용하는 형태이다. 근음장 음향 흘로그래피는 모달 확장 방법보다 많은 정보를 제공해 줄 뿐 아니라, 시변(time variant), 과도(transient) 음장 예측에도 적용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 가장 정확한 음장 예측을 가능하게 해 주는 근음장 음향 흘로그래피는 흘로그래피의 극대화를 위하여 많은 마이크

\*\* 홍익대학교 기계공학과

\* 홍익대학교 일반대학원 기계공학과

로폰이 필요하게 되고, 측정의 복잡성 등의 단점이 있다.[10] 반면 진동 표면의 속도 분포와 유한 요소 해석 모드를 결합하여 경계 요소 해석에 적용하는 모드 확장 방법은 제한된 측정점의 속도 분포를 이용하여 복잡한 구조물에 대해서도 높은 신뢰도를 갖는 결과를 얻을 수 있다.[5,7] 본 논문에서는 모드 확장 방법을 사용하여 단순 평판의 진동에 의해 형성되는 음향 분포를 예측하였으며 실험 방법에 있어 유의해야 할 점에 대해 다루었다.

## 2. 본론

### 2.1 모드 확장 방법 (Modal Expansion Method)

음향 방사 예측에 가장 중요한 변수는 구조물의 진동 표면에서 발생되는 정확한 속도 경계 조건이다. 왜냐하면 경계 조건으로 사용되는 속도 분포는 음향 방사에 직접적인 영향을 주기 때문이다. 유한 요소 해석으로 임의의 가진력, 또는 실험으로 얻은 가진력을 이용한 진동 응답 해석 결과는 구조물의 물성치, 기하학적 경계 조건, 구조물의 감쇠 등의 많은 불확실성에 의해 정확성이 제한된다. 반면 실험을 통한 진동 응답은 구조물의 동적 거동을 거의 완벽히 표현할 수 있는 많은 절점들에 대해 측정이 가능하다면 최상의 값을 제공해 줄 것이다. 그러나 실제로 그러한 실험 수행은 거의 불가능하다. 일례로 평판에 대한 근음장 음향 흘로그래피를 다룬 논문에서는 정확도를 높이기 위하여 256개의 지점을 측정하였다고 되어 있다.[8] 모드 확장 방법은 진동 응답을 선형 함수로 표현할 수 있다는 가정을 그 시작으로  $i$  절점에서  $j$  방향의 변위로 표현되는  $m$  진동 모드의 선형 조합으로 표현된다.

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^m a_k \phi_{ijk} \quad (1)$$

$u_{ij}$  :  $i$  절점의  $j$  방향 변위

$a_k$  : 모달  $k$ 의 모달 기여도

$\phi_{ijk}$  : 고유 벡터  $k$ 의 절점  $i$  의  $j$  방향 변위

만약 식 (1)에서 모달 기여도  $a_k$ 를 알면 다른 모든 절점들의 변위를 구할 수 있고, 그로부터 수직 방향 속도를 구할 수 있다.

$$v_{n,i} = \sum_{k=1}^m (i\omega a_k) \cdot \phi_{n,ik} = \sum_{k=1}^m b_k \cdot \phi_{n,ik} \quad (2)$$

결론적으로 모드 확장 방법은 실제 현상에서 일어날 수 있는 가진과 감쇠 등을 정의하는 것이 어려워 가진에 의한 구조물의 진동 응답을 얻기 힘드나 모드 형상과 고유 주파수를 비교적 쉽고 균질하게 계산할 수 있는 유한 요소 해석의 장점과 제한된 절점에서 얻을 수 있으며 가진의 측정과 감쇠 계수 측정의 필요성이 없어지고 정확한 진동 응답을 제공해 주는 실현의 장점을 조합한 방법이다. 본 논문에서는 간단한 형상의 구조물이지만, 모드 밀도가 높아 저주파 대역에서도 많은 고차 굽힘 모드 형상이 나타나는 얇은 두께의 평판을 실현 대상으로 설정하였다.

### 2.2 평판의 특성 (The Properties of a Plate)

다음 Table-1과 같은 제원의 평판을 대상으로 하였다.

Table 1 평판의 제원

제원	크기(가로×세로×두께)
일반 강(steel)	0.914×0.838×0.003 (m)

평판의 진동에 의한 음향 방사에 있어 중요한 변수는 임계 주파수(critical frequency)이다. 임계 주파수는 평판의 굽힘파(bending wave)의 파장과 주위 매질의 파장이 같아지는 주파수를 말한다. 이론적으로 무한 평판은 임계 주파수 이하인 경우 음향 방사가 일어나지 않고, 이상에서만 방사가 일어난다. 무한 평판에 대한 이 결과는 유한 평판에서도 적용할 수 있다. 균질 등방성 재료인 경우 임계 주파수는 물성치와 두께 및 단위 면적당 질량에 의해 결정된다.[2]

$$f_{cr} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{B}} \quad (3)$$

여기서,  $c$ 는 음속이며,  $m$ 은 단위 면적당 질량,  $B$ 는 평판의 굽힘 강성(bending stiffness)을 의미한다. 위 식을 다시 균질 평판의 재질에 따른 종파 속도(longitudinal wave speed)  $c_L$ 과 두께에 적용한다면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{cr} = \frac{c^2}{1.8 c_L h} \quad (4)$$

식 (3) 또는 식 (4)로 균일한 3mm 두께의 철판의 임계 주파수는 약 4000Hz가 된다.

### 2.3 평판의 유한 요소 해석 (Finite Element Analysis for a Plate)

평판에 대하여 기본적인 유한 요소 해석을 수행하였다. 해석 주파수 대역은 0Hz부터 200Hz로 선정하였다. 해석에 사용한 요소는 4 절점을 갖는 선형 사각 요소  $32 \times 32 = 1024$ 개, 절점  $33 \times 33 = 1089$ 개이다. 최소 4개의 절점으로 한 파장을 형성한다고 가정하면 약 8개의 파장을 표현할 수 있으며 6개의 절점으로는 5.5개의 파장을 표현할 수 있다. 유한 요소 모델의 기하학적 경계 조건은 네 모서리가 단순 지지(simply supported)된 경계 조건으로 하였으므로, 반 파장을 이루는 모드 형상들도 나타나게 된다. 유한 요소 모델의 제원은 Table 2와 같다.

Table 2 유한 요소 모델

물성치	포아송비	밀도	경계 조건
206.8 $M_a$	0.29	7620 $kg/m^3$	모서리 단순 지지

Fig. 1은 유한 요소 해석을 통해 얻은 처음 4개의 고유 주파수와 모드 형상을 보여 주고 있다. 왼쪽 상단의 첫 번째 모드는 X 방향, Y 방향으로 같은 방향의 반 파장이 형성되는 모드이며 오른쪽 상단의 두 번째 모드는 X 방향으로 반 파장, Y 방향으로 한 파장의 모드가 형성되는 것을 볼 수 있다.

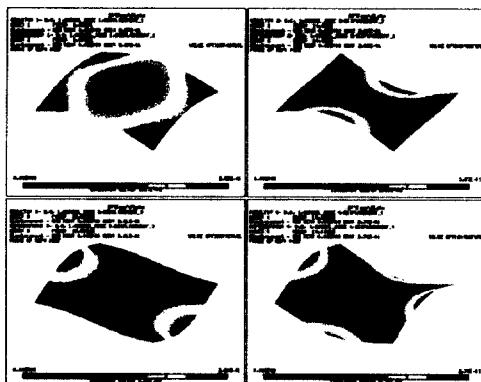


Fig. 1 처음 4개의 모드 형상

앞서 언급한 바와 같이 실험에 사용한 평판은 모드 밀도(modal density)가 높기 때문에 200Hz 이하의 저주파 대역에서 매우 복잡한 굽힘 형상의 고차 모드가 나타난다. 이렇게 유한 요소 해석을 통해 획득한 모드 형상은 모드 확장 방법을 사용한 음장 예측에 사용되어 진다. Table 3은 유한 요소 해석으로 구한 처음 10개의 고유 주파수와 모드 형상을 정리한 것이다.

Table 3 10번째 모드

번호	주파수(Hz)	비고
1	6.80371	X, Y 굽힘
2	14.89550	Y 굽힘
3	15.58862	X 굽힘
4	19.13929	X, Y 굽힘
5	36.92222	파장 짧아지며 굽힘
6	42.78980	"
7	45.77336	"
8	54.53943	"
9	67.16016	"
10	75.66618	"

## 2.2 평판의 모달 해석 (Modal Analysis for a Plate)

충격 해머와 4개의 가속도계를 이용하여 평판 위의 가로, 세로 각각 9점, 총 81점에 대해 모달 해석을 수행하였다. 관심 주파수 대역은 유한 요소 해석의 주파수 대역과 동일한 0Hz~200Hz로 하였다. 주파수 해상도는 0.5Hz 간격으로 설정하였으므로 알리아싱(aliasing) 효과를 배제한 이론적인 측정 시간은 약 2초가 된다. Fig. 2는 모달 해석에 사용한 모델을 보여주고 있으며, Fig. 3은 모달 해석에 의한 모드 형상을 보여 주고 있다.

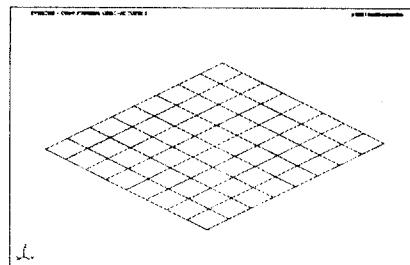


Fig. 2 실험에 사용한 평판 모델

Fig. 4는 모드들에 대한 MAC(Modal Assurance Criteria) 값을 보여 준다. Table 4는 실험과 유한 요소 해석을 통한 고유 주파수 10개의 상관 관계(correlation)를 나타낸 것이다. 평판에 대한 모달 해석은 실험을 통한 표면 가속도를 취득하여 음장 예측을 함에 있어 그 기본이 되는 실험이라 할 수 있으므로 해석을 통해 예상되는 구조물의 모드와 실험 모드를 비교하여 유한 요소 해석 모델의 경계 조건 및 물성치의 수정이 필요한지 판단할 수 있다. 실험과 유한 요소 해석의 결과에 있어 상관 관계는 매우 중요하다. 모드 상관 관계가 밀접할수록 모드 확장 방법을 이용한 음장 예측은 보다 정확한 결과를 제공해 주게 된다.

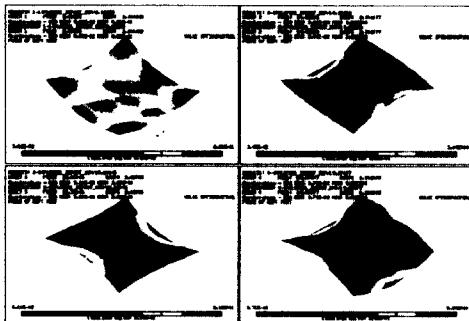


Fig. 3 실험으로 구한 모드 형상

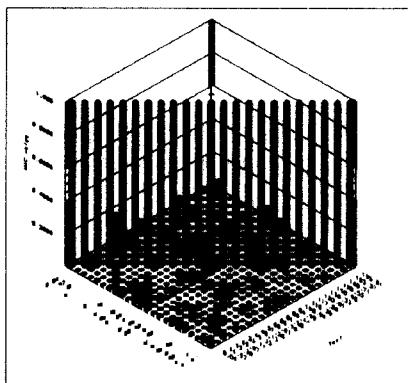


Fig. 4 실험 모드의 MAC 행렬

Table 4 고유 주파수의 실험과 해석 상관 관계

실험/해석	실험값	해석값	상대 변화 (%)	MAC
1 1	8.032	6.813	-15.167	0.957
2 3	14.923	15.645	4.836	0.882
3 2	15.300	14.950	-2.288	0.892
4 4	19.071	19.105	0.181	0.975
5 5	33.711	37.032	9.851	0.913
6 8	45.344	51.493	13.560	0.943
7 7	48.115	45.694	-5.030	0.801
8 6	57.268	42.939	-25.020	0.617
9 0	60.011	—	—	—
10 9	66.782	67.055	0.408	0.958
11 0	81.598	—	—	—
12 0	83.442	—	—	—
13 0	84.964	—	—	—
0 10	—	75.922	—	—

모드 번호는 4번째 모드까지 해석과 실험이 거의 정확히 일치하는 것을 볼 수 있다. 그 이후의 모드에서는 고유 주파수는 조금씩 다르나 그에 따른 모드 형상은 매우 유사함을 확인하였다. 모드 확장

방법에 의해 음장 예측을 수행할 때는 유한 요소 해석에 의한 모드 형상과 모드 기여도, 그리고 실험에 의한 속도 분포, 세 변수가 가장 중요하므로 유한 요소 해석과 실험의 상관 관계를 검사하는 것은 반드시 필요한 단계이다. 실험에 사용한 평판은 얇은 두께로 인해 완벽한 평면을 이루지 못하고 있었으며, 그러한 굴곡에 의해 모서리의 경계 조건도 완벽한 단순 지지를 형성하지 못하였다. 이로 인해 상관 관계가 조금 떨어지는 경향을 볼 수 있다.

### 2.3 평판의 진동 신호 측정

(Measurement of Vibration Signal on a Plate Surface)

모드 확장 방법을 사용한 음장 예측을 위해 진동 신호 측정 실험을 수행하였다. 구조물의 고유 주파수를 가진할 경우, 예측 음장의 정확도는 매우 높음이 이전 논문에서 확인된 바 있다.[12] 따라서 본 논문에서는 고유 주파수가 아닌 125Hz를 가진 주파수로 설정하였다. 평판 위 17번 절점을 가진 기로 가진하였으며, 모델 해석과 동일하게 총 81점의 절점에 대해 가속도 주파수 응답 함수를 측정하였다. Fig. 5는 그에 대한 가속도 분포를 평면 위에 도시화 한 것이다. 가진기가 부착된 17번 절점의 위치에 해당되는 약 (0.9m, 0.1m) 쪽의 가속도 분포가 상대적으로 다른 부분보다 높은 값을 갖고 있음을 알 수 있다.

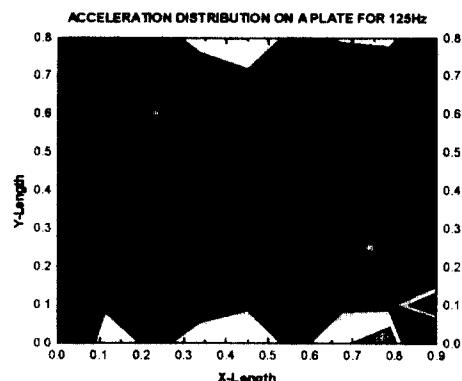


Fig. 5 125Hz 가진할 때 평판 위의 가속도 분포

이렇게 실험을 통해 얻은 가속도 분포를 경계 요소 해석의 속도 경계 조건으로 입력하여 음장 예측을 수행한다.

### 2.4 평판의 진동 신호 측정시 고려 사항

(Consideration of Measurement of Vibration Signal on a Plate Surface)

평판 위의 가속도 주파수 응답 함수를 측정할 때는 기준 가속도계 혹은 기준 힘 측정기와 응답 가속도계의 위상 관계가 매우 중요하다. 그렇기 때문에 단지 가속도의 파워 스펙트럼(power spectrum) 측정만으로는 진동 표면의 속도 분포를 정확히 구성할 수 없다. 즉, 속도 분포는 기준값과의 위상 관계가 규명되지 않는 한 진동에 의한 주위 매질로의 음향 방사를 완전히 재구성할 수 없다. 따라서 진동 표면의 가속도는 반드시 위상 정보를 포함하고 있어야 하기 때문에 주파수 응답 함수(frequency response function)의 원리를 사용하여야 한다. 흔히 정의하는 주파수 응답 함수를 복소 함수인 힘 스펙트럼과 가속도 스펙트럼의 비로 표현하면,

$$A(\omega) = \frac{\ddot{x}(\omega)}{F(\omega)} \quad (5)$$

$$\ddot{x}(\omega) = F(\omega) \cdot A(\omega) \quad (6)$$

이므로 SI 단위계일 경우,  $F=1\text{ N}$  일 때 가속도 응답 함수(accelerance)는 곧 진동 표면의 가속도가 된다. 분모의 힘 스펙트럼의 값을 알고 있다면 가속도 응답 함수  $A(\omega)$ 에  $F(\omega)$ 를 단순히 곱하여 진동 표면의 가속도 스펙트럼을 얻을 수 있다. 위 관계를 이용하면 주파수에 따라 힘 스펙트럼의 크기가 변화하더라도 각 주파수에 따른 진동 표면의 가속도 분포를 크기와 위상 정보를 저장하고 있는 복소 함수 형태로 얻어 낼 수 있다. Fig. 6은 일반적으로 측정된 주파수 응답 함수인 가속도 스펙트럼을 입력되는 힘 스펙트럼으로 나눈 주파수 응답 함수, 그리고 주파수에 따른 힘 스펙트럼을 곱하여 구한 진동 표면의 가속도 스펙트럼을 보여 준다. 120Hz의 또 다른 진동 신호는 해당 주파수에 평판의 모드가 있기 때문이다. 위상 신호를 보면 120Hz에서 180° 위상 변화가 발생한 것을 알 수 있다.

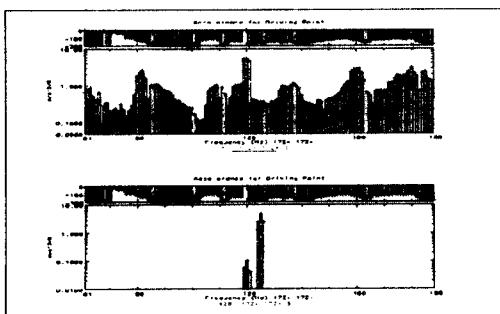


Fig. 6 가속도 주파수 응답 함수(위)와 보정된 가속도 주파수 응답 함수(아래)

이와 같이 간단하고 자명한 식을 사용하면서 약간의 번거로운 계산 과정을 거치는 것은 바로 진동 표면의 속도 크기뿐 아니라 보다 더 중요한 변수일 수 있는 위상 정보를 얻기 위함이다.

## 2.5 모드 확장 방법에 의한 평판의 음장 예측 (Estimation of Pressure Field for a Plate by Using Modal Expansion Method)

2.3의 실험과 2.4의 계산 과정을 통해 얻은 평판 위의 속도 분포를 모드 확장 방법에 적용하여 음장 예측을 수행하였다. 경계 요소 해석에 사용한 모델은 256개의 다항 요소(parabolic element)와 833개의 절점으로 이루어져 있다. 이 경계 요소 모델에 앞서 구한 모드를 적용시키고 실험으로 획득한 속도 분포를 적용하면 Fig. 7과 같은 경계 조건을 얻을 수 있다. 왼쪽 그림은 모드가 존재하여 파생된 120Hz의 표면 속도 분포이며, 오른쪽 그림은 가진 주파수인 125Hz의 표면 속도 분포이다. 속도 값을 비교해 보면 125Hz의 값이 상대적으로 큰 것을 알 수 있다.

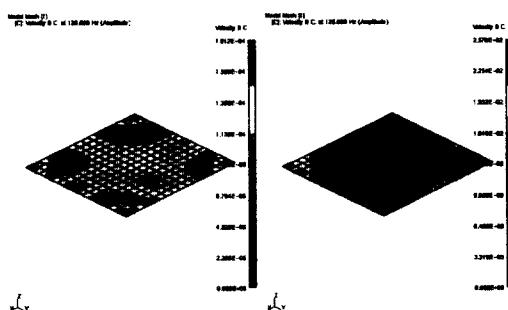


Fig. 7 120Hz의 속도 경계 조건(좌), 125Hz의 속도 경계 조건(우)

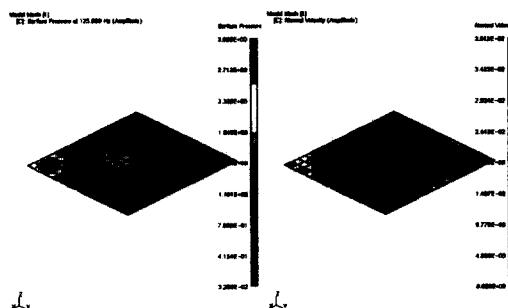


Fig. 8 125Hz의 표면 음압(좌)과 수직 음향 세기(우)

Fig. 8은 경계 요소 해석의 결과로써 왼쪽은 평판의 표면 음압을 나타내고, 오른쪽은 수직 음향 세기(normal sound intensity)이다. 두 그림 모두

가진기가 부착된 부분에서 높은 값을 갖고 있음을 확인된다. 그 외의 표면에서는 125Hz에 영향을 주는 몇 가지 모드들의 조합에 의해 표면 음압이 형성됨을 볼 수 있다. Fig. 9는 평판에서 5cm 위의 음장 분포와 음향 세기를 보여 준다.

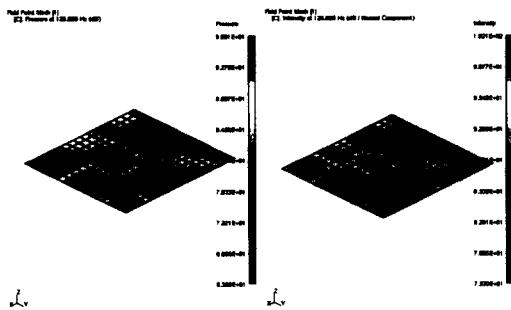


Fig. 9 5cm 위의 음장 분포(좌)와 음향 세기(우)

만약 위와 같은 음장 예측을 근음장 음향 흘로그래피 방법으로 수행한다면 이론적으로  $17 \times 17 = 289$  개의 격자를 갖는 흘로그램면을 구성하여야 하며 기준 마이크로폰 하나와 응답 마이크로폰 하나를 사용하여 측정할 때 288번의 실험을 수행해야 한다. 물론 정확한 결과를 얻기 위한 최소 격자의 크기는 81개 혹은 그 이하의 절점으로도 충분할 수 있을 것이다. 앞서 언급한 바와 같이 이러한 음장 예측 방법들은 각 방법들만의 고유한 장점을 갖고 있고 그에 따른 단점도 있다. 음장 예측 방법들간의 비교는 앞으로의 과제로 남아 있다.

### 3. 결론

본 논문에서는 진동하는 구조물에 의해 발생되는 음향 방사를 모드 확장 방법으로 예측해 보았다. 모드 확장 방법은 유한 요소 해석과 실험이 복합된 변형(hybrid) 방법으로 다음과 같은 장점을 이용한다.

- 실험보다 상대적으로 간단하고 비교적 높은 정확성을 갖는 유한 요소 해석의 모드 해석 장점
- 제한된 절점에서 얻을 수 있으나 구조 진동의 실제 동적 거동 현상을 완전히 표현하여 정확한 진동 정보를 갖고 있는 실험의 장점

이 때 실험을 통한 진동 표면의 가속도 분포 혹은 가속도 신호의 크기뿐 아니라 상대 위상 정보가 대단히 중요한 변수가 된다. 그러나, 모드 확장 방법은 구조물의 동적 거동은 모드의 선형 조합으로 표현될 수 있다는 원리에서 유추할 수 있듯이 연성 모드가 많은, 혹은 매우 높은 감쇠 특성

을 갖는 복잡한 구조물, 모드 밀도가 매우 높은 구조물 등 유한 요소 해석을 이용한 모드 해석 자체의 정확도가 감소되는 경우, 음향 방사 예측에 적절하지 못한 방법일 수 있다. 그럼에도 불구하고 이전의 논문들에서는[5,7] 모드 확장 방법을 사용하여 복잡한 구조물의 음향 방사 문제를 예측하고 실험과 비교하여 매우 정확도 높은 결과를 도출하였다. 이러한 결과로 비추어 제한된 구조 기인 소음 예측에 있어 모드 확장 방법을 이용한 음장 예측은 간단하고 명료한 방법을 이용하여 높은 신뢰도를 갖는 예측 방법이라 할 수 있다.

### 참고 문헌

1. L. Cremer, M. Heckl, "Structure-Borne Sound", Academic Press, 1966
2. M. C. Junger, "Sound, Structures, and their Interaction", The MIT Press, 1994
3. R. H. Lyon, "Theory and Application of Statistical Energy Analysis", Butterworth-Heinemann, 1995
4. Pierre Guisset, Marc Brughmans, "Modal Expansion of Experimental Vibration Data for Numerical Acoustic Radiation Prediction", NIT Technical paper
5. F. J. Fahy, "Sound Intensity", Elsevier Applied Science, 1989
6. P. Guisset, J. P. Roisson, H. Wynendaele, "Comparing Acoustic Measurements with Combined MSC/NASTRAN-SYSNOISE Sound Radiation Predictions of an Engine Block", MSC World User's Conference, 1994
7. J. D. Mynard, E. G. Williams, Y. Lee, "Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH", JASA 78(4), 1985
8. E. G. Williams, Henry D. Dardy, "Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry: Theory and experiment", JASA 81(2), 1987
9. 김양한, "소음원 규명 방법론: 통합된 개념 및 특성들", 한국소음진동공학회지 제6권 제6호, 1996
10. 김시문, 권유상, 김양한, "원통면 음향 흘로그래피를 이용한 음장 예측의 오차해석 및 적용 방법", 한국소음진동공학회지 제5권 제1호, 1995
11. 이봉노, 김관주, "모드확장기법을 이용한 평판의 진동·소음해석", 한국소음진동공학회지 제8권 제4호, 1998