

일차원구조물에서의 진동응답예측을 위한 진행파기법

°채기상*, 이정권*

(A Modified Travelling Wave Method for the Prediction of Vibration Response in One-dimensional Structures)

(Ki-Sang Chae, Jeong-Guon Ih)

ABSTRACT

For one-dimensional structures, a vibration response consists of direct and reflected waves from boundaries. Based on this concept of separable wave components, a modified travelling wave method (MTWM) is proposed in this paper: while all allowable waves are assumed and the boundary conditions are applied on by the conventional travelling wave method (TWM), in the proposed MTWM direct and reflected waves are assumed within the beam element, and the governing relations between direct and reflected waves are described in terms of the reflection or transmission coefficients. It is shown that the vibration response with considerable accuracy can be obtained compared to TWM for single and coupled beams. It is also shown that the band analysis to obtain quadratic response, or power flow response can be carried out by a slight change of the governing equations for one-dimensional structural systems. It is thought that the suggested MTWM can be used as a unified approach for predicting linear spectral response and/or quadratic band response involved in the one-dimensional structural vibration.

1. 서론

구조물의 선형 진동응답은, 파장이 구조물의 특성 길이보다 크게 작지 않은 저주파수 영역에서만 신뢰성이 있다. 고주파수 대역의 진동 예측은 소위 '에너지 방법론'으로 불리우는 방법들에 의해 이루어진다. 이에 통계적에너지해석법^(1,2) (statistical energy analysis: SEA), 진동전도해석법⁽³⁻⁵⁾ (vibrational conduction analysis: VCA) 등이 있으며, 이들에 의하여 얻어지는 진동에너지나 자승진동변위 등이 신뢰성있는 값으로 간주된다.

한편, 1차원 진동 구조물은 흔히 전달파법 (travelling wave method: TWM)으로 해석한다. 많은 연구자들이 1차원 구조에서의 전달파법에 관한 연구에 기여하여 왔다. Von Flotow⁽⁶⁾는 주파수의존적인 전달 계수 및 반사 계수를 이용한 행렬 방법을 제안한 바 있으며, Miller와 von Flotow⁽⁷⁾는 구조망 (structural networks)에서의 파워 흐름 해석을 위한 전달파법을 보고하였다. Beale과 Accorsi⁽⁸⁾는 연성점에서의 파동 산란을 이용하여 2차원 및 3차원

프레임을 위한 일반적 행렬법을 제안하였다. Pan과 Pan⁽⁹⁾은 보구조물에서 선형반응을 예측을 위한 기준 방법으로 전달파법을 사용한 바 있다.

본 논문에서는 1차원 진동구조물 해석을 위한 일반적 전달파법의 한 변형으로서 수정된 전달파기법 (modified travelling wave: MTWM)을 제안한다. 관심 변수는 선형 주파수 반응을 우선 고려하였으며, 주파수 대역 자승응답, 주파수 대역 파워흐름 등도 고려하였다. 본 논문에서는 선형진동응답을 얻기 위한 지배방정식이 간단한 변수 치환과 수정을 통해, 자승응답 및 파워흐름을 산출하기 위한 방정식으로 쉽게 변환될 수 있음을 보인다.

2. 선형 진동해석을 위한 MTWM

2.1. 파동크기벡터 및 진동변위

종방향 가진과 횡방향 가진을 받는 단순보의 경우, 종진행파, 횡진행파, 횡근접장파가 존재한다. 전방향 진행파의 경우, 관측점 x 에서의 각 파동의 크기($\{d(x)\}$)는 다음과 같이 기준점 x_0 에서의 각 파동의 크기($\{d, (x_0)\}$)에 의해 표현가능하다⁽¹⁰⁾:

$$\{d(x)\} = [T]_{x-x_0} \{d, (x_0)\}. \quad (1)$$

*한국과학기술원 기계공학과 소음진동제어센터

여기서 $\{d(x)\} = \{u(x) \ w_f(x) \ w_m(x)\}^T$, (2)

$$[T]_x = \begin{bmatrix} e^{-jk_f x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-jk_f x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-k_f x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, $u(x)$ 는 종방향 변위, $w_f(x)$ 와 $w_m(x)$ 는 각각 횡진행파 및 횡근접파에 의한 횡방향 변위이다. 하첨자 + 및 -는 전방향 및 후방향 진행파를 의미한다. $\{d(x)\}$ 는 x 에서의 파동크기벡터 (wave amplitude vector)함수로 정의되며, $[T]_x$ 는 진행거리 s 에 대한 파동전달함수 (field transfer function)이다. 후방향 진행파까지 고려하면, 파동크기벡터함수는

$$\{d(x)\} = [T]_{x-x_0} \{d_+(x_0)\} + [T]_{-(x-x_0)} \{d_-(x_0)\} \quad (4)$$

이 된다. 만약 i 번째 보의 $x_i = l_i$ 인 지점과 j 번째 보의 $x_j = 0$ 인 지점이 조인트 (joint)로 연결되어 있는 경우, i 번째 보로부터 입사하는 입사파 $\{d_{i,inc}(x_i = l_i)\}$ 에 의해 발생하는 i 번째 보로의 반사파 $\{d_{i,ref}(x_i = l_i)\}$ 및 j 번째 보로의 전달파 $\{d_{i,trans}(x_j = 0)\}$ 의 크기는 다음과 같다:

$$\{d_{i,ref}(x_i = l_i)\} = [r_{i,i}] \{d_{i,inc}(x_i = l_i)\}, \quad (5)$$

$$\{d_{j,trans}(x_j = 0)\} = [t_{ij}] \{d_{i,inc}(x_i = l_i)\} \quad (6)$$

여기서

$$[r_{i,s}] = \begin{bmatrix} r_{i,s,ll} & r_{i,s,fl} & r_{i,s,ml} \\ r_{i,s,lf} & r_{i,s,ff} & r_{i,s,ff} \\ r_{i,s,lfn} & r_{i,s,fn} & r_{i,s,fn} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{ij,ll} & t_{ij,fl} & t_{ij,ml} \\ t_{ij,lf} & t_{ij,ff} & t_{ij,ff} \\ t_{ij,lfn} & t_{ij,fn} & t_{ij,fn} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

이 되며⁽¹⁰⁾, 반사계수행렬 $[r]$ 과 전달계수행렬 $[t]$ 에서의 둘째 하첨자 s 는 반사가 일어나는 경계의 위치, 세번째 하첨자 lf 는 종파 입사에 대한 횡진행파 반사를 의미하며, fn 는 횡진행파입사에 대한 횡근접장파반사를 의미한다. 본 연구에서는 전달파를 경계에서 발생하는 일종의 반사파로 간주한다.

각 위치에서의 종방향 변위 및 횡방향 변위는

$$u(x) = \{1 \ 0 \ 0\} \{d(x)\}, \quad (9)$$

$$w(x) = \{0 \ 1 \ 1\} \{d(x)\}, \quad (10)$$

의 관계를 가진다.

2.2 단일보와 연성보의 선형진동

Fig. 1의 단일보의 전체 파동장은 직접장 (direct wave field)과 간접장 (reflected wave field)에 의하여 형성된다:

$$\{d(x)\} = \{d_{dir}(x)\} + \{d_{ref}(x)\}. \quad (11)$$

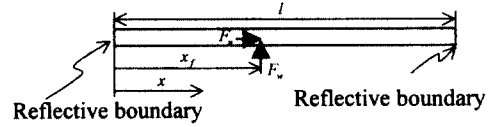


Fig. 1. A single beam under external point forces.

여기서, $\{d_{dir}(x)\}$ 과 $\{d_{ref}(x)\}$ 는 각각 직접장과 간접장을 의미한다. 직접장은

$$\{d_{dir}(x)\} = [T]_{x-x_f} \{d_{inf}\} \quad (x \leq x_f), \quad (12)$$

$$\{d_{dir}(x)\} = [T]_{x-x_f} \{d_{inf}\} \quad (x \geq x_f), \quad (13)$$

과 같이 표현가능한데, $\{d_{inf}\}$ 는 외력에 의하여 가진점에서 발생하는 초기특성 파동크기벡터로 Fig. 1과 같은 경우

$$\begin{aligned} \{d_{inf}\} &= \{F_u/Z_{l,\infty} \ F_w/Z_{f,\infty} \ F_w/Z_{m,\infty}\}^T / j\omega \\ &= \{u_{i,\infty} \ w_{f,\infty} \ w_{m,\infty}\}^T \end{aligned} \quad (14)$$

가 되며, 여기서 $Z_{l,\infty}$, $Z_{f,\infty}$, and $Z_{m,\infty}$ 는 각각 외력에 의한 종진행파, 횡진행파, 횡근접장파의 점가진 임피던스이다. 반사장은

$$\{d_{ref}(x)\} = [T]_x \{d_{ref,0}\} + [T]_{l-x} \{d_{ref,l}\} \quad (15)$$

로 표현가능하며, 여기서 $\{d_{ref,0}\}$ 과 $\{d_{ref,l}\}$ 는 각각 경계 $x=0$ 과 $x=l$ 에서 발생하는 반사파동의 크기벡터이다.

정상상태를 가정하면 경계조건은

$$\begin{cases} \{d_{ref,0}\} \\ \{d_{ref,l}\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [0] & [r_0][T] \\ [r_l][T] & [0] \end{bmatrix} \begin{cases} \{d_{ref,0}\} \\ \{d_{ref,l}\} \end{cases} \quad (16)$$

$$+ \begin{cases} [r_0][T]_{-x} \\ [r_l][T]_{l-x} \end{cases} \{d_{inf}\}$$

$$\text{또는 } \{d_{ref}\} = [A] \{d_{ref}\} + \{B\} \{d_{inf}\}, \quad (17)$$

$$= [[I] - [A]]^{-1} \{B\} \{d_{inf}\},$$

으로 표현된다. 여기서, $[r_0]$ 와 $[r_l]$ 은 각각 경계 $x=0$ 와 $x=l$ 에서의 전달계수 행렬이며, $[I]$ 는 대각 단위행렬이다. 외력에 의한 강제진동은 식 (16)의 결과를 식 (15)와 식 (11)에 대입하여 얻을 수 있다.

Fig. 2와 같이 연성된 두개의 보의 경우, 각 보에서의 파동크기벡터함수는 다음과 같이 표현이 가능하다:

$$\{d_1(x)\} = \{d_{1,dir}(x)\} + \{d_{1,ref}(x)\}, \quad (18)$$

$$\{d_2(x)\} = \{d_{2,ref}(x)\}. \quad (19)$$

이들에 대한 경계조건은 식 (17)의 형태로 적용될 수 있다.

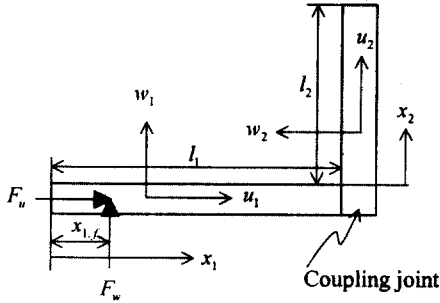


Fig. 2. Coupled two beam model under external forces.

3. 고주파수 대역 에너지량 해석을 위한 MTWM

3.1. 파동의 자승크기벡터 및 자승진동변위

파장의 크기가 구조물의 특성길이에 비해 현저히 작은 고주파수 대역에서는 일반적으로 자승 주파수 대역 반응이 신뢰성 있는 척도로 사용된다. 이러한 점은 고주파수 대역에서의 구조물의 불확실성에 바탕을 두고 있다. 고주파수 대역에서는 근접장파는 경계근처에서만 영향을 미치고 경계에서 멀어지면 거의 영향을 미치지 못하기 때문에, 진행파들만이 고주파수 해석에 채용된다. 근접장파가 무시되면, 횡방향변위는 $w(x) \approx w_f(x)$ 으로 근사화되고, 파동 크기벡터함수는 다음과 같이 축소된다:

$$\{d(x)\} = \{u(x) \quad w_f(x)\}^T, \quad (20)$$

$$\{d_{inf}\} = \{u_{inf} \quad w_{inf,f}\}. \quad (21)$$

식 (11)과 식 (15)에서, 파동의 자승크기벡터함수는

$$\{d(x)\}^2 = \{d_{dir}(x)\}^2 + [T_{m,2}]_x \{d_{ref,0}\}^2 + [T_{m,1}]_{-x} \{d_{ref,1}\}^2, \quad (22)$$

$$\text{여기서 } [T_m]_s = \begin{bmatrix} e^{-jk_s x} & 0 \\ 0 & e^{-jk_s x} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

이 된다. 각 진행파간의 간섭을 무시하면

$$\{d(x)\}^2 \approx \{d_{dir}(x)\}^2 + [T_{m,2}]_x \{d_{ref,0}\}^2 + [T_{m,1}]_{-x} \{d_{ref,1}\}^2, \quad (24)$$

$$\text{여기서 } [T_{m,2}]_s = \begin{bmatrix} e^{2\text{Im}(k_s)x} & 0 \\ 0 & e^{2\text{Im}(k_s)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_s x} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_s x} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

여기서, $\{d_{ref,0}\}^2$ and $\{d_{ref,1}\}^2$ 는 각 경계에서의

반사파동 자승크기벡터 (quadratic amplitude vector of the reflected wave)들이다. 각 진행파 간의 간섭의 무시는 대역내에 다수의 공진이 존재하여, 이러한 간섭들이 공진점을 중심으로 변동할 것이라고 가정하는데 그 근거를 두며, 따라서 단일 주파수 해석보다는 대역 해석을 할 경우에 유효하다 할 수 있다. 단일 주파수 해석을 할 경우에는 지역적인 평균치를 예측하게 되어, 평탄한 주파수 응답 함수를 얻을 수 있다⁽⁴⁾.

3.2. 단일보 및 연성보의 자승진동

단일 보의 경우에는

$$\begin{Bmatrix} \{d_{ref,0}\}^2 \\ \{d_{ref,1}\}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [r_0]^2 [T_{m,2}]_{-x} \\ [r_1]^2 [T_{m,2}]_{-x} \end{Bmatrix} \{d_{inf}\}^2, \quad (26)$$

$$+ \begin{bmatrix} [0] & [r_0]^2 [T_{m,2}]_{,l} \\ [r_1]^2 [T_{m,2}]_{,l} & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_{ref,0}\}^2 \\ \{d_{ref,1}\}^2 \end{Bmatrix}$$

이 되며, 여기서, $[r_0]^2$ 와 $[r_1]^2$ 는 $[r_0]$ 와 $[r_1]$ 에서 근접장파동과 관련된 항을 삭제하고 모든 항을 자승값으로 치환하여 만든 행렬이다.

연성된 두개의 보의 경우에는

$$\{d_1(x_1)\}^2 = \{d_{1,dir}(x_1)\}^2 + \left([T_{m,2}]_{1,x_1} \{d_{1,ref,0}\}^2 + [T_{m,2}]_{1,1-x_1} \{d_{1,ref,1}\}^2 \right), \quad (27)$$

$$\{d_2(x_2)\}^2 = [T_{m,2}]_{2,x_2} \{d_{2,ref,0}\}^2 + [T_{m,2}]_{2,2,1-x_2} \{d_{2,ref,1}\}^2, \quad (28)$$

이 되며, 경계조건은

$$\{d_{ref}\}^2 = [I] - [A^2]^{-1} \{B^2\} \{d_{inf}\}^2, \quad (29)$$

로 요약할 수 있다. 식 (26)은 식 (16)식에서 근접장파 관련된 항을 제거하고 나머지 모든 항을 자승값으로 치환하여 얻은 것과 같으며, 식 (29)도 같은 방법으로 얻을 수 있다.

3.3. 파워흐름

종파 및 횡파를 통한 전달 파워는

$$I(x) = \begin{Bmatrix} I_i(x) \\ I_f(x) \end{Bmatrix} \approx \frac{\rho A \omega^2}{2} \begin{bmatrix} c_{r,i} & 0 \\ 0 & c_{r,f} \end{bmatrix} \left[\{d_+(x)\}^2 - \{d_-(x)\}^2 \right], \quad (30)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서, $I_i(x)$ 와 $I_f(x)$ 는 각각 종진동과 횡진동에 의한 파워흐름이다.

4. 예제 해석: 보구조물

Fig. 3의 네개의 보로 이루어진 구조물을 TWM과 제한한 MTWM으로 해석하였다. 보의 길이는 각각 1.7m, 1.9 m, 1.7m 그리고 1.9 m이며, 보의 두께는 0.001m, 보의 폭은 0.03m이다. 영의 계수는 200GPa, 밀도는 7800kg/m³이다. $x_{1,f} = 0.4l_1$ 인 위치에 1N의 F_w 가 존재한다. Fig. 4에 보듯이 MTWM의 선형진동 응답예측은 TWM의 값과 거의 차이가 없는 것으로 판단된다. Fig. 5은 특정위치에서 주파수 변화에 의한 TWM과의 비교로서 역시 TWM과 유사한 결과를 제시함을 볼 수 있다. Fig. 6은 대역자승응답을 예측한 결과이다. 종진동의 경우는 서로 잘 맞지 않으나, 횡진동의 경우는 예측된 자승진동분포와 파워흐름분포가 TWM에 의한 결과를 잘 표현해주고 있다고 판단된다. 이는 종진동의 경우 대역내에 존재하는 공진수들이 작은 데 비하여, 횡진동의 경우 공진의 수가 많은 데 기인한다. 자승진동예측을 주파수에 대하여 소인하여 보면 (Fig. 7), 종진동의

경우는 MTWM의 결과가 과평가하는 경향이 있으나, 횡진동의 경우는 주파수상의 지역적 최저치와 최고치 사이를 통과하는 MTWM의 결과를 볼 수 있다.

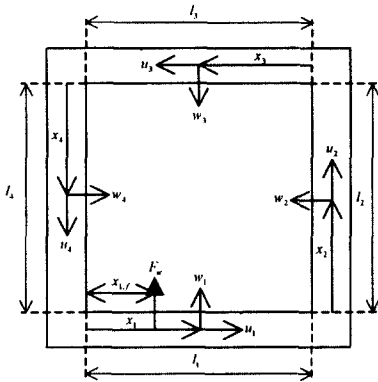


Fig. 3. Configuration of a beam structure composed of four beam elements.

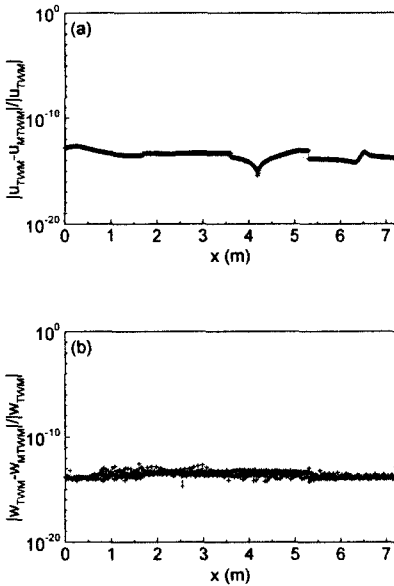


Fig. 4. Relative error distribution of predicted displacement by MTWM compared to TWM (1000 Hz and $\eta = 0.01$). (a) Longitudinal displacement; (b) flexural displacement.

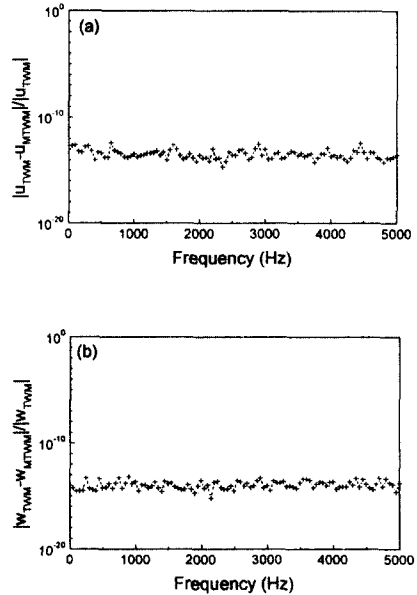
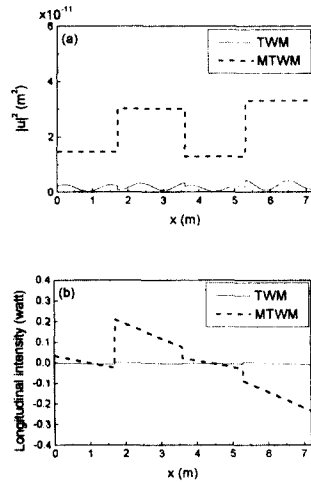


Fig. 5. Relative error distribution of predicted displacement by MTWM compared to TWM varying the frequency ($\eta = 0.01$ at $x_1 = 0.7l_1$ in beam 1). (a) Longitudinal displacement; (b) flexural displacement.



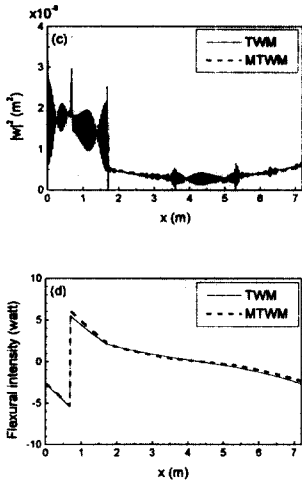


Fig. 6. Comparison of predicted spatial distribution of quadratic response and intensity by TWM and MTWM (2kHz 1/3 octave band with $\eta = 0.01$). (a) Longitudinal quadratic displacement; (b) longitudinal intensity; (c) flexural quadratic displacement; (d) flexural intensity.

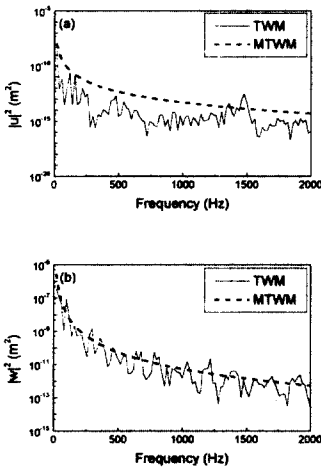


Fig. 7. Comparison of predicted quadratic response by TWM and MTWM at $x_1 = 0.7l_1$ with $x_{1,f} = 0.4l_1$ ($\eta = 0.01$). (a) Longitudinal quadratic displacement; (b) flexural quadratic displacement.

6. 결론

직접장과 간접장, 그리고 파동크기벡터의 개념을 도입하여 보구조물의 해석을 위한 수정된 전달파 기법을 제안하였다. 일반적인 전달파 기법에 의해서는 선형진동응답만을 예측할 수 있으며, 자승응답을 예측하고자 하는 경우에는 SEA나 VCA와 같은 에너지관점의 기법을 시도하여야 하는 데

비하여, 제안된 수정된 전달파기법은 선형응답예측은 물론 자승응답예측에도 적용될 수 있는 장점이 있다. 또한, 일반적인 전달파기법이 경계조건을 그대로 사용하여야 하는 반면에 제안된 수정된 전달파기법은 각 경계에서의 전달계수 및 반사계수를 사용하기 때문에 경계조건이 바뀌는 경우의 재해석이 용이하다.

예제들의 해석 결과 선형 예측치가 기존의 전달파 기법과 거의 근사한 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다. 대역 자승예측치의 경우 대역내에 존재하는 공진의 수가 많은 경우 전달파기법의 해를 비교적 잘 예측함을 확인하였다. 단일 주파수에서 자승예측을 하면 전달파기법에 의한 주파수 함수의 지역적 최솟치와 최댓치 사이를 통과함을 확인할 수 있었다. 비틀림과 등을 포함한 3차원 보와 같은 보다 복잡한 구조물에도 적용가능 하리라 판단된다.

참고문헌

- (1) R. H. Lyon, 1975, *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*. Cambridge: MIT Press.
- (2) H. G. Davies and M. A. Wahab, 1981, "Ensemble Averages of Power Flow in Randomly Excited Coupled Beams," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 77, pp. 311-321.
- (3) D. J. Nefske and S. H. Sung, 1989, "Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams," *Transactions of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 111, pp. 94-100.
- (4) J. C. Wohlever and R. J. Bernhard, 1992, "Mechanical energy flow models of rods and beams," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 153, pp. 1-19.
- (5) P. E. Cho and R. J. Bernhard, 1998, "Energy flow analysis of coupled beams," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 211, pp. 593-605.
- (6) A. H. von Flotow, 1986, "Disturbance propagation in structural networks," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 106, pp. 433-450.
- (7) D. W. Miller and A. von Flotow, 1989, "A travelling wave approach to power flow in structural networks," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 128, pp. 145-162.
- (8) L. S. Beale and M. L. Accorsi, 1995, "Power flow in two- and three-dimensional frame structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 185, pp. 685-702.
- (9) J. Pan and J. Pan, 1998, "A comparison of modal expansion and travelling wave methods for predicting energy flow in beam structures," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 214, pp. 1-15.
- (10) B. R. Mace, 1984, "Wave reflection and transmission in beams," *Journal of Sound Vibration*, Vol. 97, pp. 237-246.