한국소음진동공학회 창립10주년 기념 소음진동학술대회논문집, pp. 301~308.

임의 방향 점가진력에 의한 연성 평판 진동의 파워흐름해석

[0]길현권*, 최재성**, 홍석윤***

Power Flow Analysis of Vibration of Coupled Plates Excited by a Point Force In an Arbitrary Direction

H.-G. Kil, J.-S. Choi, S.-Y. Hong

ABSTRACT

The power flow analysis(PFA) has been performed to analyze the vibration of coupled plates excited by a point force in an arbitrry direction. The energy governing equations for longitudinal, shear and flexural waves were solved to predict the vibrational energy density and intensity. The wave transmission approach was used to consider the mode conversion at the joints of the coupled plates. Numerical results for energy density and intensity on the coupled plates were presented. Comparison of the results by PFA with exact results showed that PFA can be an effective tool to predict the spatial variation of the vibrational energy and intensity on the coupled plates at high frequencies.

1. 서 론

복합구조물의 진동을 줄이고 또한 방사되는 소음을 줄이기 위하여서는 진동에너지의 공간적 분포와 에너지 흐름의 경로를 알기 위한 해석이 필요하다. 진동에너지 해석을 위하여 일반적으로 저주파수 영역에서는 유한요소해석법[1]이 그리고 고주파수 영역에서는 통계적 에너지해석법[2]이 널리 사용되고 있다. 유한요소 해석법의 경우는 진동수가 증가하게 되면 진동장을 형성하는 파동의 파장이 작아지므로 구조체를 더욱 작은 요소로 나누어야 한다. 따라서 고주파수 영역에서의 적용은 많은 계산 시간을 요하게 된다는 단점이 있다. 통계적 에너지해석법의 경우에는 복합구조물 각 요소의 진동에너지에 대한 공간적인 평균값만을 제공하게 된다는 단점이 있다.

유한요소법과 통계적 에너지해석법의 한계점들을 보완하기 위한 여러 근사법들 중에서 최근에 국외에서 연구가 활발히 진행되고 있는 파워흐름해석법 (Power Flow Analysis, PFA)을 들 수가 있다. 이 방법은 Belov등[3]에 의하여 제안되었으며, 진동에너지 흐름 형태에 따른 고유의 에너지 지배방정식을 정립하고 해석함으로써 진동에너지의 공간적인 분포와 전달 경로 등을 제시할 수 있는 방법이다. 이러한 파워흐름해석법은 주로 고주파수 대역에서 적용되어지나, 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되어 왔다[4]. 이러한 파워흐름해석법에 대한 적용은 보 및 연성보의 진동과 평판의 면외진동의 적용에 제한되어 왔다[4-7]. 국내에서도 파워흐름해석법에 대한 연구가 시작되어, 평판의 면내진동과 연성 평판의 진동을 해석하기 위하여 파워흐름해석법의 적용이 이루어지고 있다[8,9].

* 수원대학교 기계공학과
** 수원대학교 대학원 기계공학과
*** 서울대학교 조선해양공학과

파워흐름해석법을 적용하여 효과적으로 복합구조물의 진동을 해석하기 위해서는, 진동 형태로서는 면외 및 면내진동을 그리고 가진력 형태로서도 임의 방향을 갖는 가진력을 다룰 수 있어야 한다. 본 논문에서는 복합구조물로서 연성 평판을 고려하고, 파워흐름해석법을 이용하여 임의 방향을 갖는 가진력에 의한 진동을 해석하였다. 면외진동을 이루는 굽힘파와, 면내진동을 이루는 종파와 전단파에 의한 진동에너지 전달을 고려하였으며, 연결지점에서 발생하는 이들 파동들의 파동변환을 고려하기 위하여 파동전달법[10,11]을 이용하였다. 파워흐름해석법에 의한 진동해의 근사해는 엄밀해와 비교함으로써 파워흐름해석법에 대한 검증을 수행하였다. 이러한 해석 결과로써, 파워흐름해석법은 연성평판의 진동 해석에 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다.

2. 파워흐름해석법에 의한 진동해석

2.1 평판 진동에 대한 에너지지배방정식

평판의 면외진동은 굽힘파의 전파에 의하여 형성되며, 면내진동은 종파와 전단파의 전파에 의하여 형성된다. 각 파동에 대한 진동 에너지지배방정식을 유도하기 위해서는 다음의 가정을 고려한다. 굽힘파의 경우 내부에너지가 작다는 가정 하에서, 종파와 전단파의 경우에는 파동들간의 연성 또한 무시함으로써 다음과 같은 에너지지배방정식을 얻을 수 있다. 단일 주파수 ω의 진동에 대하여

$$-\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\nabla^2\langle\tilde{e}_j\rangle+\eta\omega\langle\tilde{e}_j\rangle=0 \qquad (1)$$

여기서 $\langle\tilde{e}\rangle_m$는 j 파동 [$j=l$ (종파), s (전단파), f (굽힘파)]이 갖는 에너지 밀도의 시간(한 주기) 및 공간(한 파장)에 대한 평균값을 의미한다. 그리고 η 는 구조감쇠에 의한 내부에너지 손실계수, c_{gj}는 해당 파동의 에너지 전파 속도를 나타낸다. 각 파동에 대한 진동 인텐시티 벡터는 다음과 구할 수 있다.

$$\langle\tilde{q}_j\rangle=-\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\nabla\langle\tilde{e}_j\rangle \qquad (2)$$

2.2 연성평판의 파워흐름해석

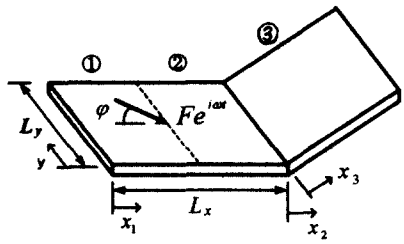


Fig 1. Coupled plate excited by a point force in an arbitrary direction

그림 1과 같이 두 평판이 임의의 각을 이루면서 연결되어 있는 연성평판을 고려하고, 가장자리는 모두 단순 지지되어 있다고 가정한다. 그리고 (x_o, y_o)의 위치에서 ϕ의 각도를 갖고 작용하는 조화 가진력에 의한 진동을 고려한다. 가진력 벡터는 다음과 같이 고려될 수 있으며

$$\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\,\boldsymbol{e}_x+F_z(t)\,\boldsymbol{e}_z \qquad (3)$$

여기서 $F_x=F_{xo}e^{i\omega t}$와 $F_z=F_{zo}e^{i\omega t}$는 가진력 벡터의 면내 및 면외 성분을 각각 나타낸다.

연성 평판의 경우 면내 가진력에 의하여 종파와 전단파가 발생하며, 연결점에서 파동 변환에 의하여 굽힘파 또한 발생한다. 가진력이 작용하는 위치와 연결점을 기준으로 하여 연성평판을 세 영역, 즉 ①, ②, ③으로 표시하면, 각 영역에서는 종파, 전단파, 굽힘파가 동시에 존재한다. 각 파동에 대한 에너지방정식은 식 (1)로 나타낼 수 있다.

에너지밀도 일반해는 식(1)의 에너지지배방정식으로부터 다음의 과정에 의하여 구할 수 있다. x 축에 평행한 경계선 $y=0$와 $y=L_y$을 따라 각 파동에 대한 입력 파워가 없다고 가정하면, 각 영역에서 에너지밀도 일반해는 cosine 급수로 다음과 같이 나타낼 수 있다. m영역 ($m=1,2,3$)에 대하여

$$\langle\tilde{e}_j\rangle_m=\sum_{n=0}^{\infty}E_{njm}(x_m)\cos k_{ny}y \qquad (4)$$

여기서 $k_{ny}=n\pi/L_y$이다. 식(3)을 에너지지배방정식 (1)에 대입하면, 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$-\frac{d^2E_{njm}(x_m)}{dx_m^2}+(k_{ny}^2+\Phi_j^2)E_{njm}(x_m)=0 \quad (5)$$

여기서

$$\Phi=\frac{\eta\omega}{c_{gj}}\ ,\quad \lambda_{nj}=k_{ny}^2+\Phi_j^2 \quad (6)$$

를 고려하면 식(4)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{njm}(x_m)=A_{jm}^{+}e^{-\lambda_{nj}x_m}+A_{jm}^{-}e^{\lambda_{nj}x_m} \quad (7)$$

그러므로 각 파동의 에너지 밀도는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\langle\widetilde{e_j}\rangle_m=\langle\widetilde{e_j}\rangle_m^{+}+\langle\widetilde{e_j}\rangle_m^{-} \quad (8)$$

여기서

$$\langle\widetilde{e_j}\rangle_m^{+}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{+}e^{-\lambda_{nj}x_m}\cos k_{ny}y \quad (9)$$

$$\langle\widetilde{e_j}\rangle_m^{-}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{-}e^{\lambda_{nj}x_j}\cos k_{ny}y \quad (10)$$

첨자 ＋와 －는 ＋x와 －x방향으로의 에너지 전달을 의미한다. 식(8)을 각 영역에 대한 식 (2)에 대입하면, 인텐시티의 일반 해도 다음과 같이 표시된다.

$$\langle\widetilde{q_{jx}}\rangle_m=\langle\widetilde{q_{jx}}\rangle_m^{+}-\langle\widetilde{q_{jx}}\rangle_m^{-} \quad (11)$$

$$\langle q_{jy}\rangle_m=\langle q_{yj}\rangle_m^{+}-\langle q_{jy}\rangle_m^{-} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{q_{jx}}\rangle_m^{+}&=\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{+}\lambda_{nj}e^{-\lambda_{nj}x_m}\cos k_{ny}y\\
\langle\widetilde{q_{jx}}\rangle_m^{-}&=\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{-}\lambda_{mj}e^{\lambda_{nj}x_m}\cos k_{ny}y\\
\langle\widetilde{q_{jy}}\rangle_m^{-}&=-\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{-}k_{ny}e^{-\lambda_{nj}x_m}\sin k_{ny}y\\
\langle\widetilde{q_{jy}}\rangle_m^{+}&=\frac{c_{gj}^2}{\eta\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jm}^{+}k_{ny}e^{-\lambda_{nj}x_m}\sin k_{ny}y
\end{aligned} \quad (13)$$

가진점에서 점가진력의 면외 성분에 의하여 굽힘파에 파워가 전달되며, 면내 성분에 의하여 종파와 전단파에 파워가 전달된다. , 각 파동에 전달되는 파워의 시간 평균값을 고려하고, 크기를 Π_l , Π_s , Π_f 로 각각 표시하면, 입력 파워는 다음과 같이 표현된다. 각 파동에 대하여

$$\Pi_j\delta(x-x_o)\delta(y-y_o)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{nj}(x)\cos k_{ny}y \quad (14)$$

여기서

$$\Pi_{nj}(x)\begin{cases}=\dfrac{\Pi_j}{L_y}\delta(x-x_o) & (n=0)\\ =2\dfrac{\Pi_j}{L_y}\cos k_{ny}y_o\delta(x-x_o) & (n\neq 0)\end{cases} \quad (15)$$

가진력에 의하여 각 파동에 전달되는 입력 파워는 가진력 작용 위치에서의 임피던스를 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다. 면외진동을 발생시키는 굽힘파의 경우,

$$\Pi_f=\frac{1}{2}F_z^2\,Re(\frac{1}{Z_f}) \quad (16)$$

면내진동을 발생시키는 종파와 전단파의 경우

$$\Pi_l=\frac{1}{2}F_x^2\,Re(\frac{1}{Z_l}),\quad \Pi_s=\frac{1}{2}F_x^2\,Re(\frac{1}{Z_s}) \quad (17)$$

그리고 주파수가 증가할수록 유한 평판의 임피던스는 무한 평판의 각 파동에 대한 임피던스 값으로 근사될 수 있다.

$$Re\{Z_f\}=8\left[\frac{E\rho h^4}{12(1-\nu^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$Re\{Z_l\}=\frac{8Eh}{(1-\nu^2)\omega} \quad (19)$$

$$Re\{Z_s\}=\frac{8Gh}{\omega} \quad (20)$$

진동에너지 밀도와 인텐시티의 해를 구하기 위해서는, 각 영역에서 세 종류의 파동(굽힘파, 종파, 전단파)을 고려하여야 한다. 따라서 총 18개의 미지수 A_{jm}^{+}, A_{jm}^{-} ($j=l,s,f$ 그리고 $m=1,2,3$)를 결정하여야 한다. 이들 미지수들은 다음과 같은 경계 조건들을 이용하여 결정할 수 있다. 먼저 y축에 평행한 모서리 $x_1=0$ 와 $x_3=L_x$에서 외부로부터 입력되는 파워가 없다는 조건으로부터 다음의 6개의 관계식들을 얻는다. $j=l,s,f$에 대하여

$$\langle\widetilde{q_j}(0,y)\rangle_1=0,\quad \langle\widetilde{q_j}(L_y,y)\rangle_3=0 \quad (21)$$

또한 파워가 입력되는 위치, 즉 영역 ①과 ②의 경계선에서는 에너지 밀도의 연속성과 파워의 평형 조건을 다음과 같이 만족하여야 한다. 그러므로

$x_1 = x_o$ 혹은 $x_2 = x_o - L_x$에서는 각 파동에 대하여 다음과 같은 6개의 관계식을 얻는다.

$$\langle \widetilde{e_j} \rangle_1 = \langle \widetilde{e_j} \rangle_2, \tag{22}$$

$$\langle \widetilde{q_j} \rangle_2 = \langle \widetilde{q_j} \rangle_1 + \Pi_j \delta(y - y_o) \tag{23}$$

평판요소간의 연결부분에서는 파동들간의 연성이 발생하므로 파동들간의 연성에 의한 에너지 투과와 반사 현상을 나타내기 위한 경계조건을 고려하여야 한다. 이를 위하여 파동을 고려한 방법인 파동전달법([10,11])을 적용할 수 있다. 영역 ②와 ③ 사이의 연결점으로부터 영역②로 전달되는 파동 j가 갖는 파워는, $j = l, s, f$에 대하여,

$$\langle \widetilde{q_j} \rangle_2^- = r_{22fj} \langle \widetilde{q_f} \rangle_2^+ + r_{22lj} \langle \widetilde{q_l} \rangle_2^+ + r_{22sj} \langle \widetilde{q_s} \rangle_2^+ + \tau_{32fj} \langle \widetilde{q_f} \rangle_3^- + \tau_{32lj} \langle \widetilde{q_l} \rangle_3^- + \tau_{32sj} \langle \widetilde{q_s} \rangle_3^- \tag{24}$$

그리고 영역 ③으로 전달되는 j특성 파동이 갖는 파워는

$$\langle \widetilde{q_j} \rangle_3^+ = \tau_{23fj} \langle \widetilde{q_f} \rangle_2^+ + \tau_{23lj} \langle \widetilde{q_l} \rangle_2^+ + \tau_{23sj} \langle \widetilde{q_s} \rangle_3^+ + r_{33fj} \langle \widetilde{q_f} \rangle_3^- + r_{33lj} \langle \widetilde{q_l} \rangle_3^- + r_{33sj} \langle \widetilde{q_s} \rangle_3^- \tag{25}$$

와 같이 표현 할 수 있다. 여기서 r_{mnij}은 영역 m에서 입사하는 i특성 파동이 연결점에서 반사 후 j특성 파동으로 변환됨을 고려한 파워반사계수를 나타낸다. 또한, τ_{mnij}은 영역 m에서 연결점을 향하여 입사하는 i특성 파동이 영역 n로 투과한 후 j특성 파동으로 변환됨을 고려한 파워투과계수를 나타낸다. 따라서 식(24)과 (25)로부터 세 파동을 각각 고려하면 6개의 식들을 얻는다. 결과적으로 식(21)-(25)로부터 18개의 식들을 이용할 수 있으므로 18개의 미지수 A_{jm}^+, A_{jm}^- ($j = l, s, f$, 그리고 $m = 1, 2, 3$에 대해서)를 구할 수 있다.

파워반사계수와 파워투과계수들은 파동전달법을 이용하여 구할 수 있다. 파동전달법을 이용하여 파워반사계수와 파워투과계수를 구하기 위해서는, 연결점에서의 평판들을 (준)무한평판으로 치환한다. 그리고 주어진 크기를 갖는 특정 파동의 입사를 가정한 후, 연결점의 경계조건을 이용하여 반사파와 투과파의 크기를 구한다. 그리고 입사파의 파워에 대한 반사파의 파워 (혹은 투과파의 파워)의 비로써 파워반사계수 (혹은 파워투과계수)를 구한다. 파동전달법의 적용은 문헌 [10,11]을 참고 할 수 있다.

3. 계산 결과 및 분석

연성평판에 대한 진동 에너지밀도와 인텐시티를 예측하기 위하여, 그림 1에서와 같이 원진동수 ω를 갖고 $x_1 = 1.5m$, $y = 2.5m$의 지점에 작용하는 조화 가진력에 의하여 발생되는 연성평판의 면외 및 면내진동을 고려하였다. 조화 가진력의 방향 (그림 1으로서는 $\phi = 45^\circ$를 고려하고 단위 크기를 갖는 가진력 벡터의 면외 성분과 면내 성분을 고려하였다. 또한 각 평판의 크기는 가로 및 세로 각각 $5m$, 두께 0.01m이며 재질은 알리미늄으로 고려하였다.

손실계수 $\eta = 0.05$일 경우에 대하여 90°의 각도를 이루고 연결된 연성평판들이 각각 주파수 $1000Hz$와 $5000Hz$로 진동하는 경우를 고려하였다. 그림 2와 3은 주파수 $1000Hz$에서 면외 가진력 성분과 면내 가진력 성분에 의하여 각각 발생하는 전체 진동장에 대한 에너지 밀도의 공간적 분포를 보여준다. 그림 4와 5는 주파수 $5000Hz$에서 면외 가진력 성분과 면내 가진력 성분에 의하여 각각 발생하는 전체 진동장에 대한 에너지 밀도의 공간적 분포를 보여준다. $5000Hz$의 경우 (그림 4와 5) 면외 및 면내가진력 성분에 의한 진동을 각각 고려할 경우, 두 경우 모두 피워흐름해석법에 의한 결과가 가진원의 위치를 포함한 에너지밀도의 공간 분포를 잘 나타내 주고 있다. $1000Hz$에서 면외 가진력 성분에 의한 진동의 경우 파워흐름해석 결과가 가진원 위치를 나타내 주고 있으나, 면내 가진력 성분에 의한 진동의 경우는 가진점의 위치를 명확히 제공하지 못하고 있다. 이러한 면내 가진력 성분에 의한 진동장은 주로 면내 파동인 종파에 의하여 발생한다. 그러므로 주파수 $1000Hz$에서의 종파의 파장은 약 $1.09L_x$을 고려한다면, 파워흐름해석법에 의한 결과가 그림 3(b)에서 연성평판 각 요소에 걸친 평균값을 제공함을 알 수 있다.

그림 6은 $5000Hz$에서 면외 가진력 성분에 의하여 발생하는 각 파동에 대한 에너지밀도의 공간적 분포를 보여준다. 엄밀해와 비교할 경우 파워흐름해석법에 의한 결과가 각 파동에 대한 에너지밀도의 공간적인 분포를 잘 나타내 주고 있음을

알 수 있다. 그림 6(a1)과 (a2)에서 굽힘파에 의한 에너지밀도는 가진점에서 최대 값을 갖고, 연결 지점에서 불연속적인 분포를 갖음을 알 수 있다. 그림 6(b1)-(c2)로부터는 종파와 전단파의 에너지 밀도는 연결지점에서 최대 값을 갖음을 알 수 있다. 이러한 현상은 종파 및 전단파에 의한 에너지 흐름은 연결지점으로부터 파동 변환에 의하여 발생하기 때문이다. 그림 7은 5000*Hz*에서 면내 가진력 성분에 의한 진동을 구성하는 각 파동에 대한 에너지밀도의 공간적 분포를 보여준다. 엄밀해와 비교할 경우 파워흐름해석법에 의한 결과가 각 파동에 대한 에너지밀도의 공간적인 분포를 잘 나타내주고 있음을 알 수 있다.

그림 8과 9는 주파수 5000*Hz*에서 면외 및 면내 가진력 성분들이 각각 발생시키는 각 파동의 전파에 의한 인텐시티의 공간적 분포를 보여준다. 면외 가진력 성분에 의한 진동의 경우(그림 8) 굽힘파에 의한 에너지 흐름은 가진원으로부터, 그리고 종파 및 전단파에 의한 에너지 흐름은 연결지점으로부터 파동 변환에 의하여 발생함을 확인 할 수 있다. 면내가진력 성분에 의한 진동의 경우(그림 9)는 반대로 종파 및 전단파에 의한 에너지 흐름은 가진원으로부터, 그리고 굽힘파에 의한 에너지 흐름은 연결지점으로부터 파동 변환에 의하여 발생함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 임의 방향을 갖는 점가진력에 의하여 가진 되는 연성 평판의 진동을 해석하기 위하여 파워흐름해석법을 적용하였다. 연성평판이 진동하는 경우 발생하는 종파, 전단파, 굽힘파를 고려하여, 각 파동에 해당하는 에너지지배방정식을 도입하였다. 또한 점가진력에 의하여 각 파동에 전달되는 입력파워를 고려하였다. 이러한 해석 방법을 이용하여, 임의 방향을 갖는 점가진력에 의하여 진동하는 연성 평판의 에너지밀도와 인텐시티의 공간적 분포를 구하였다. 이러한 해석 결과를 엄밀해와 비교함으로써, 파워흐름해석법은 연성평판의 진동 해석을 위해서 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다.

후 기

본 연구는 수중음향특화연구센터 연구과제의 일부분으로서 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method,* 3rd ed. McGraw-Hill, London S.A. Hambric, 1977.

(2) R.H. Lyon, Statistical Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications, MIT Press, 1975.

(3) V.D. Belov, S.A. Rybak, B.D. Tartakovskii, "Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures,"" J. Soviet Physics Acoustics, 23(2), pp. 115-119, 1977.

(4) D.J. Nefske, S.H. Sung, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100, 1989.

(5) P.E. Cho and R.J. Bernhard, "A Simple Method for predicting Energy Flow Distributions in Frame Structures," 4th International Congress on Intensity Techniques, pp.347-354,1993.

(6) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, "Models of Space- Averaged Energetics of Plates," AIAA J., 30((3), pp.616-623, 1992.

(7) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates," J. Sound . Vibration, 182(1), 149-164 1995.

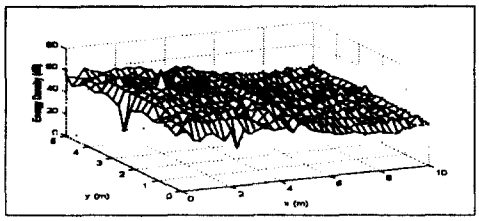
(8) 길현권, 최재성, 홍석윤, "평판 내면진동의 파워흐름해석," 한국소음진동공학회 춘계학술대회논문집, pp. 503-511 1999.

(9) 박도현, "연성된 평판 및 상자형 구조물의 진동 파워흐름해석," 서울대학교 대학원 석사논문, 1999.

(10) L. Cremer, M. Heckl, E.E. Ungar, Structure- Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

(11) 김현실, 강현주, 김재승, 김상렬, "SEA를 이용한 구조물의 소음 진동 해석," 한국소음진동공학회 추계학술대논문집, pp.44-49, 1995.

(a)



(b)

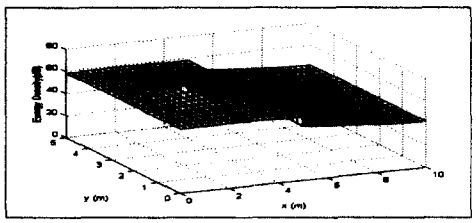
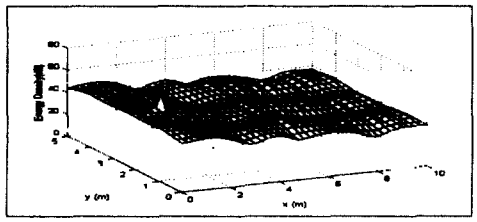


Fig. 2. Total energy density on a coupled plate excited by an out-of-plane point force at 1000 Hz. (a) exact result, (b) result by PFA.

(a)



(b)

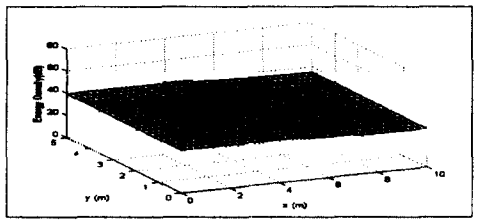
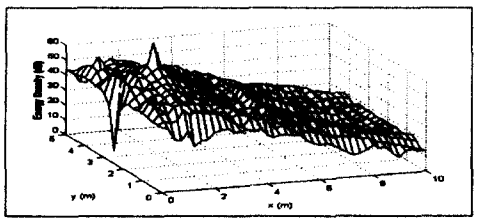


Fig 3. Total energy density on a coupled plate excited by an in-plane point force at 1000 Hz. (a) exact result, (b) result by PFA.

(a)



(b)

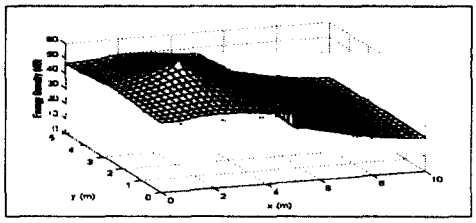
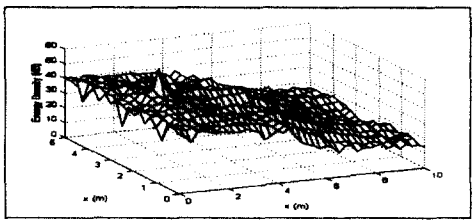


Fig. 4. Total energy density on a coupled plate excited by an out-of-plane point force at 5000 Hz. (a) exact result, (b) result by PFA.

(a)



(b)

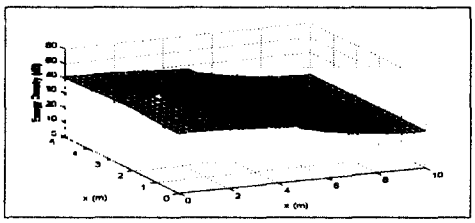
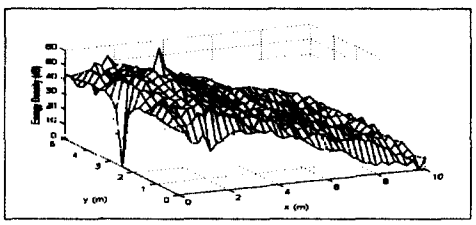
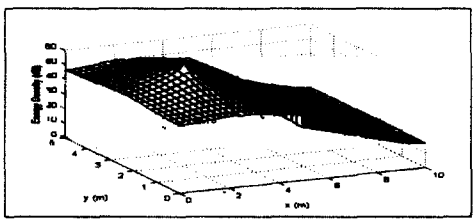


Fig. 5. Total energy density on a coupled plate excited by an in-plane point force at 5000 Hz. (a) exact result, (b) result by PFA.

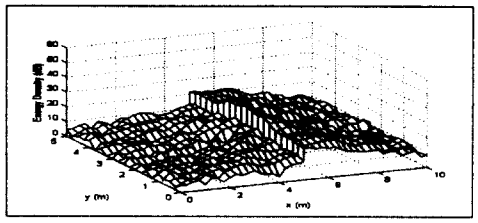
(a1)



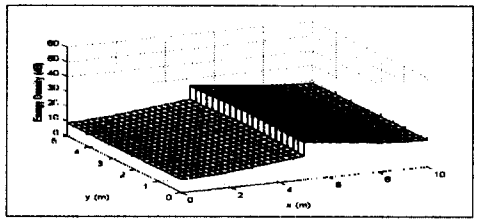
(a2)



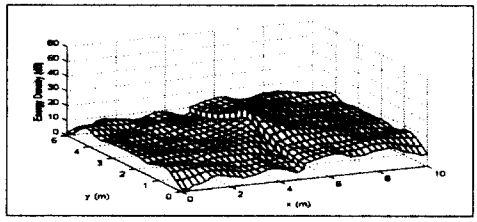
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

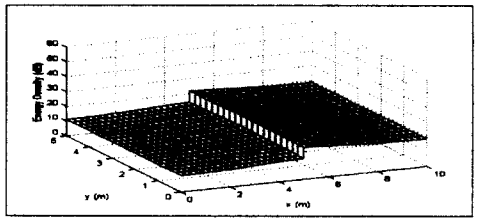
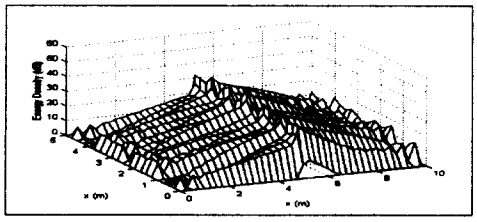
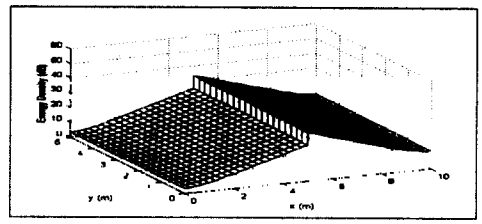


Fig. 6. Energy density on a coupled plate excited by an out-of-plane point force at 5000 Hz. (a1),(a2): flexural waves, (b1),(b2): shear waves,(c1),(c2): longitudinal waves, (a1),(b1),(c1): exact results and (a2),(b2),(c2): results by PFA.

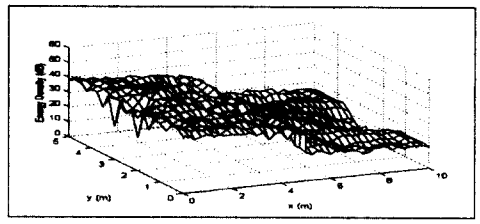
(a1)



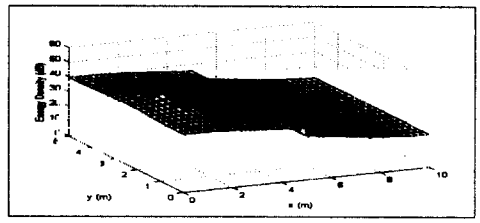
(a2)



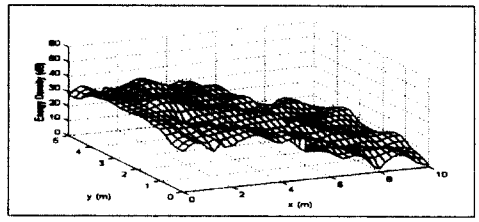
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

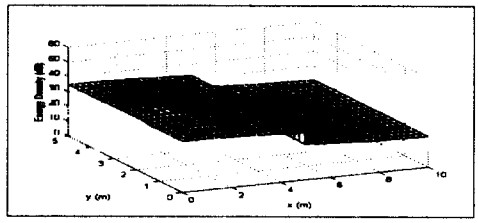


Fig. 7. Energy density on a coupled plate excited by an in-plane point force at 5000 Hz. (a1),(a2): flexural waves, (b1),(b2): shear waves, (c1),(c2): longitudinal waves, (a1),(b1),(c1): exact results and (a2),(b2),(c2): results by PFA.

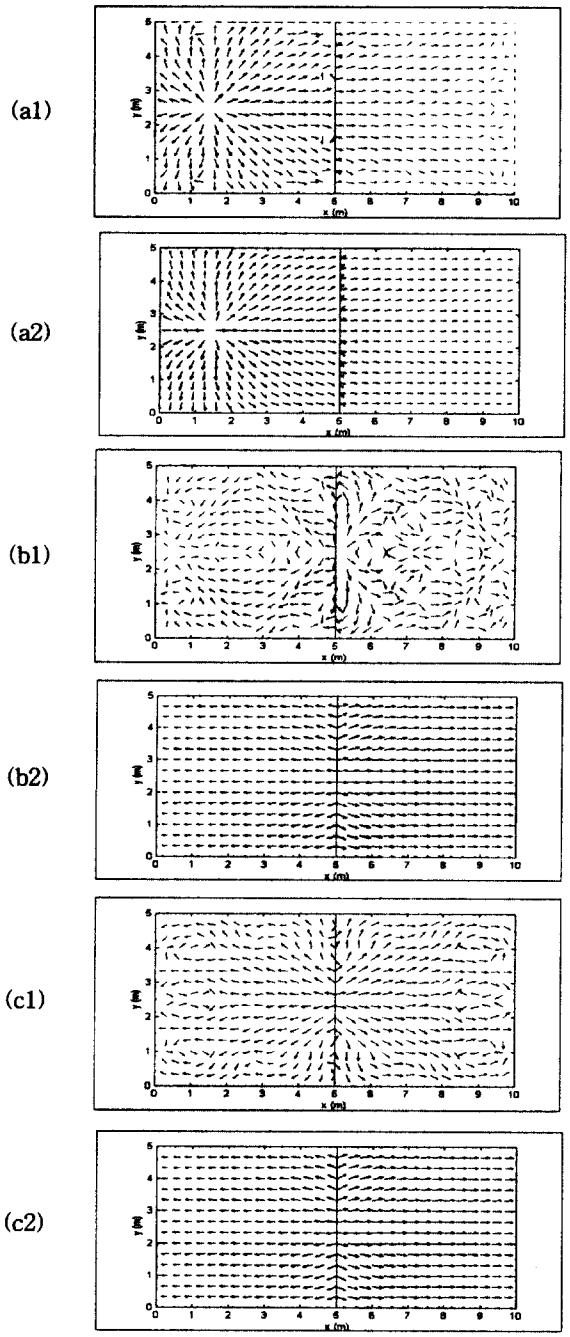


Fig. 8. Intensity on a coupled plate excited by an out-of-plane point force at 5000 Hz. (a1),(a2): flexural waves, (b1),(b2): shear waves, (c1),(c2): longitudinal waves, (a1),(b1),(c1): exact results, (a2),(b2)(c2): results by PFA.

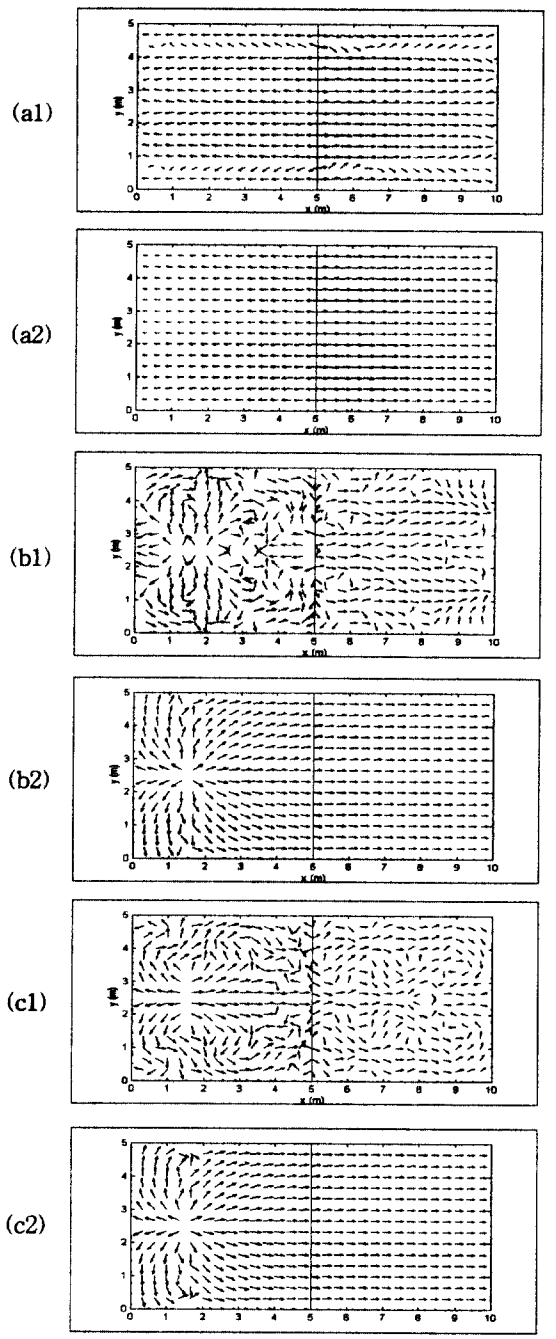


Fig. 9. Intensity on a coupled plate excited by an in-plane point force at 5000 Hz. (a1),(a2): flexural waves, (b1),(b2): shear waves, (c1),(c2): longitudinal waves, (a1),(b1),(c1): exact results, (a2),(b2)(c2): results by PFA.