

웨이블릿 변환역 최소평균자승법을 이용한 능동 소음 제어

° 김도형¹ 박영진²

Active Noise Control Using Wavelet Transform Domain Least Mean Square

° Doh-Hyoung Kim Youngjin Park

Abstract : This paper describes Active Noise Control (ANC) using Discrete Wavelet Transform (DWT) Domain Least Mean Square (LMS) Method. DWT-LMS is one of the transform domain input decorrelation LMS and improves the convergence speed of adaptive filter especially when the input signal is highly correlated. Conventional transform domain LMS's use Discrete Cosine Transform (DCT) because it offers linear band signal decomposition and fast transform algorithm. Wavelet transform can project the input signal into the several octave band subspace and offers more efficient sliding fast transform algorithm. In this paper, we propose Wavelet transform domain LMS algorithm and shows its performance is similar to DCT LMS in some cases using ANC simulation.

Keywords : Active Noise Control, Wavelet Transform , Transform Domain LMS

1. 서론

LMS(Least Mean Square) 방법은 능동 소음 제어, 반향 제거기 등의 적응 신호처리에서 널리 쓰이는 가장 간단하고 강인한 방법 중의 하나이나 입력신호에 대한 자기 상관 행렬의 고유치 분포가 큰 경우에는 수렴 성능이 저하된다는 단점을 지니고 있다[5].

이를 해결하기 위해 입력신호에 대한 상관 제거 방법(Input Decorrelation Method)들이 제안되어 왔다.

입력신호에 대한 상관 제거 방법은 크게 시간역방법(Time Domain Method)[3]과 변환역 방법(Transform Domain Method)[1]으로 나뉘어진다. 시간역 방법은 입력신호의 주파수 성분을 알아낸 뒤 입력신호를 백색잡음화 시킬 수 있는 적응 필터를 시스템의 입력부와 출력부에 부가하여 LMS의 수렴 성능을 향상시킬 수 있는 방법이다. 변환역 LMS (Transform Domain LMS) 방법은 이와

는 달리 입력신호를 주파수 영역별로 나누어 각각의 파워를 구한뒤 이를 이용하여 수렴 계수를 주파수 영역별로 조절하는 방법이다. 이에 사용되는 변환으로는 입력 신호의 주파수 내용을 구하기 위한 DFT(Discrete Fourier Transform) 이나 DCT(Discrete Cosine Transform)등이 많이 사용되어 왔다. 시간역 방법의 경우 두 개의 적응 필터가 직렬로 연결되어 동시에 수렴을 하므로 천이 상태에서의 이론적인 해석이 어려워지고 변환역 방법과는 달리 FIR 필터의 경우 원래의 최적 필터값으로 수렴하지 않을 수 있다는 단점이 있다. 또 입력신호를 백색잡음화 하는 적응필터의 설계에도 많은 고려가 있어야 한다. 변환역 방법의 경우에는 비교적 간단한 구조로 수렴성능의 빠른 향상을 보일 수 있으나 매 시간 당 원래의 적응 필터 길이 만큼의 신호에 대해 주파수 내용을 알아내야 하므로 필터 길이가 증가할수록 계산량이 급격히 증가한다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 기존 변환역 LMS 방법에서 많이 사용되던 DCT가 아닌 Wavelet 변환을 이용한 Wavelet

¹한국과학기술원 기계공학과(ventus@daidun.kaist.ac.kr)

²한국과학기술원 기계공학과(yjpark@sorak.kaist.ac.kr)

변환역 LMS 방법을 제안하고 Filtered-X LMS에서의 수렴성에 대해 해석하였다.

2. Wavelet 변환

Wavelet 변환은 신호를 복소지수 기저함수를 이용하여 표현하던 Fourier 변환과는 달리 유한한 길이를 가진(Compactly supported) 기저 함수를 이용하여 표현하는 변환 방법이다[2, 4]. Wavelet 변환은 시간-주파수 영역에서 가장 일반적인 표현 형태를 제공하므로 비정상 신호에 대해 알맞은 주파수 해석 방법이라고 볼 수 있다.

연속시간에서의 Wavelet 변환은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned} \quad (1)$$

위식에서 보듯이 Wavelet 변환은 주파수가 아닌 scale a 과 shift b 를 인자로 가지는 기저함수 $\psi_{a,b}(t)$ 를 가지고 있다. 기저함수는 고주파 성분을 가지는 Wavelet 함수 $\psi(t)$ 와 저주파 성분을 가지는 Scale 함수 $\varphi(t)$ 로 나뉘어진다. 이 기저함수중에서 서로 독립적인 기저함수들을 선택하는 방법이 dyadic sampling 방법으로 다음과 같이 기저함수를 선택하였을 경우,

$$(a, b) \in \{(2^m, 2^m n t_0) | m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

이를 이산시간 Wavelet 변환 (Discrete Wavelet Transform) 혹은 DWT 라고 부른다. DWT를 이용하여 신호를 분석하면 신호 $x(t)$ 를

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{m=-\infty}^M \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\psi_{m,n}, x(t))\psi(t) \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi_{M,n}(t), x(t))\varphi(t) \end{aligned} \quad (3)$$

(($x(t), y(t)$)는 내적)

와 같이 M 까지의 scale을 이용하여 근사화하는 것이 가능하다. 위와 같이 신호를 분해하는 것을 다중 해상도 해석 (Multiresolution Analysis, MRA) 이라고 하며 각 scale의 신호는 서로 직교인 subspace W_1, \dots, W_M, V_M 으로 분리된다. 이때 각 scale에 해당하는 subspace는 주파수 영역에서 그림 1 과 같은 Octave Band를 이룬다.

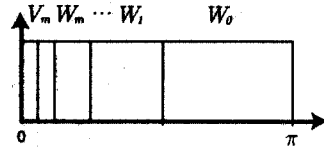


그림 1: Frequency Interpretation of Multiresolution Analysis

이산 Wavelet 변환의 실제 구현은 filter bank를 이용하여 이루어진다. 그러나 변환역 LMS에 사용되기 위한 이산 Wavelet 변환은 매 시간 변환이 이루어지는 이동 변환(sliding transform)이므로 그림 2 처럼 Wavelet 합성 필터 $G(z)$ 를 변형한 sparse 필터를 이용하여 구현되어야 한다. 이때의 계산량은 $\mathcal{O}(\log L)$ 로 DCT의 $\mathcal{O}(L \log L)$ 보다 월등히 감소한다. 대신 구조가 복잡해지고 메모리의 사용이 증가하게 된다.

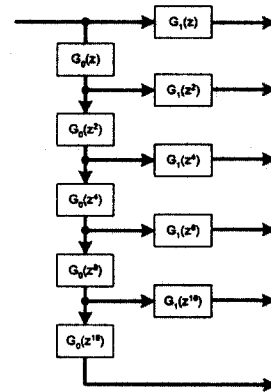


그림 2: Delayless FIR filter realization using sparse synthesis filter bank

3. Wavelet 변환역에서의 filtered-x LMS 방법

실제 능동 소음 제어에서는 제어신호의 발생 위치로부터 제어하고자 하는 위치까지의 전달 경로 즉, 오차계가 존재하므로 이 오차계의 모델을 이용하는 Filtered-X LMS 방법이 많이 사용되고 있다. 본 논문에서는 그림 3.처럼 Filtered-X LMS에서 Wavelet Transform 을 사용하는 제어 구조를 제시하였다.

그림에서 x, d, y, e 는 각각 기준 신호, 외란, 제

어 신호, 오차를 나타내며 P_1 이 소음원으로부터 제어위치까지의 전달함수를 나타내고 P_2 는 오차계 경로, W_1, W_2 는 각각 P_1, P_2 의 FIR 모델을 나타낸다. T 는 변환 행렬을 나타내며 보통의 Filtered-X LMS의 경우 변환행렬은 항등 행렬(identity matrix) I 가 된다.

Wavelet 변환역에서의 filtered-x LMS 방법은 다음과 같다.

$$y[n] = \mathbf{w}^T[n]\mathbf{x}_T[n] \quad (4)$$

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu[n]\mathbf{x}_{Tf}[n]e^*[n] \quad (5)$$

여기에서

$$\mathbf{x}_T[n] = T\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{x}_{Tf}[n] = T\mathbf{x}_f[n]$$

$$\mathbf{x}_f[n] = \mathbf{h}^T\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{x}[n] = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-N+1]]^T$$

$$\mathbf{w}[n] = [w_0[n], w_1[n], \dots, w_{N-1}[n]]^T$$

$$\mu[n] = \frac{\mu_0}{|\mathbf{x}[n]|^2} \text{diag}([\mu_1[n], \dots, \mu_L[n]])$$

$$\mu_i[n] = \beta\mu_i[n-1] + (1-\beta)\mathbf{x}_{Ti}^2[n]$$

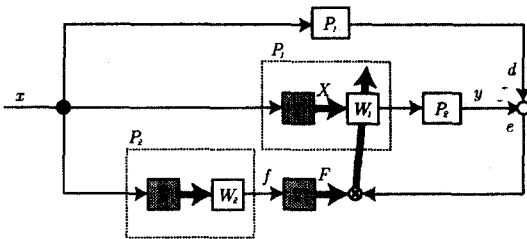


그림 3: Wavelet Transform Domain Filtered-X LMS Structure

윗 식에서 $x[n], x_f[n], y[n], e[n]$ 는 각각 기준신호, 오차계 모델을 통과한 기준신호, 출력신호, 오차 신호 등을 나타내며 h 는 오차계 모델, T 는 변환행렬, 첨자 T 는 Wavelet 변환역으로 변환된 신호를 나타낸다. 수렴 계수 μ 는 변환역 계수들의 값으로 정규화되며 β 는 변환역 계수들의 진력을 추정하기 위한 IIR 필터의 계수값으로 $0 < \beta < 1$ 을 만족하며 보통 1에 가까운 값을 사용한다.

변환역에서의 Filtered-X LMS의 수렴 안정성은 다음과 같은 조건을 가진다.

정리 1 변환행렬 T 를 사용하는 변환역 Filtered-X LMS 구조는 변환행렬이 기준신호의 상관행렬의 고유벡터와 일치하고 오차계가 z^{-m} 의 지연 전달함수를 가진다는 가정하에 다음과 같은 수렴한계를 가진다.

$$0 < \mu_0 < \frac{1}{\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2(2m+1)}\right) \quad (6)$$

여기에서 λ_{\max} 는 기준신호 상관행렬의 최대 고유치이며 λ_{\min} 는 이 값에 대한 추정치이다.

(증명) 부록 1. 참조.

이 결과는 오차계가 같은 경우의 수렴 한계보다 증가된 경우로 LMS와 마찬가지로 Filtered-X LMS에 대해서도 변환역 방법을 사용하여 수렴 속도를 증가시킬 수 있음을 보인다. 위의 결과는 변환행렬이 기준신호를 대각화(diagonalize)시킬 수 있다는 가정을 하고 있으므로 실제 수렴 성능은 변환에 따라 달라진다. 긴 주기를 가지는 주기신호에 대해서는 DFT를 이용하여 기준신호 상관행렬을 완전하게 대각화시킬 수 있으며 1차 Markov 모델로 볼 수 있는 정상 신호에 대해서는 DCT가 높은 대각화 성능을 보인다[1]. Wavelet 변환의 경우 사용된 기저함수의 종류 및 wavelet packet의 분해 방법에 따라 변환행렬이 틀려지므로 일반적인 결과를 보이기 어렵고 모의 실험등을 통하여 결과를 비교하는 방법을 생각할 수 있다.

또한 Wavelet 변환은 흔히 볼 수 있는 음성, 영상 신호에 대해 뛰어난 압축 성능을 보인다. 이를 이용하면 Filtered-X LMS에서 오차계 모델 P_2 대신 Wavelet 변환을 이용하여 근사화된 오차계 모델 P'_2 를 사용함으로써 Filtered-X LMS의 계산량을 감소시키는 것도 가능해진다. 이는 DWT를 이용하여 오차계 모델 $p(t)$ 를

$$\hat{p}(t) = \sum_{m=-\infty}^M \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{m,n}, p(t) \rangle \psi(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \varphi_{M,n}(t), p(t) \rangle \varphi(t) \quad (7)$$

로 표현한 뒤 계수의 크기가 작은 기저함수를 생략하는 방법으로 singularity가 많은 신호의 경우 DCT 등에 비해 높은 압축률을 보인다. 즉 적은 기저함수로 같은 길이의 신호를 근사화 할 수 있다. 특히 Wavelet 변환은 위상이 서로 다른 기저함수를 이용하여 근사시에도 신호의 위상을 비교적 정확하게 표

현하는 특성을 지니고 있으므로 오차계의 위상이 중요시되는 Filtered-X LMS에 적합한 근사화 방법이라고 할 수 있다.

4. 모의 실험 결과

Wavelet 변환역 filtered-x LMS의 성능을 알아보기 위해 정상신호와 비정상 신호에 대해 모의 실험을 수행하였다. 모의 실험에 사용한 기준신호는 그림 4와 같다. 이는 하나의 주파수를 가진 신호에 백색 잡음을 가한 것으로 상관관계가 높고 기준신호 상관행렬의 고유치 분포가 커서 보통의 LMS 방법에서는 수렴이 느린 신호의 하나이다. 모의 실험에 사용한 전달함수는 표1에 나타나 있다.

Wavelet 변환을 위한 기저 Wavelet으로는 Haar Wavelet[2]를 사용하였으며 6개의 scale을 가지는 Octave-band Wavelet 변환을 선택하였다.

Haar wavelet은 주파수역에서 주변 주파수의 범위가 넓어 주파수 선택능력이 다른 Wavelet에 비해 저조하지만 변환시의 곱셈 연산의 수가 적다는 장점이 있다. Octave-band 변환은 고주파 영역에서의 주파수 선택능력이 감소되나 sampling frequency가 높을 경우 계산량을 감소시키면서 비슷한 성능을 낼 수 있다.

그림 5와 그림 6은 모의 실험 결과이다. Filtered-X LMS의 수렴을 빠르게 하면 일반적으로 수렴후의 오차 수준이 증가하므로 모의 실험에 쓰인 수렴계수는 그림 6에서 볼 수 있듯이 수렴후의 오차 수준이 같아지도록 조절하였다. 모의 실험 결과에서 DWT가 DCT에 비해 우수한 수렴 성능을 가짐을 알 수 있다.

표 1: Systems in simulation

System	FIR model
$p(z)$	$10z^{-17} + 5z^{-18} + z^{-19} - 4z^{-20} - z^{-20} + 3z^{-21} - z^{-22} + z^{-23} - 0.5z^{-25} + 0.1z^{-26} - 0.2z^{-27} + 0.2z^{-28}$
$h(z)$	z^{-2}

일반적으로 모의 실험의 성능은 사용한 기준신호 및 시스템 등에 의존하므로 이 결과를 일반적인 결과로 볼 수는 없으나 모의 실험 결과 DWT가 DCT와 비슷한 수렴 성능을 내고 있음을 알 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 소음제어에 널리 사용되는 Filtered-X LMS의 수렴 성능을 향상시키기 위해 Wavelet 변환을 사용하는 Wavelet 변환역 Filtered-X LMS 구조를 제안하고 간단한 경우의 수렴 성능에 관해 해석하였으며 모의 실험을 통해 고유치 분포가 큰 기준 입력 신호에 대한 수렴 성능을 조사하였다.

Wavelet 변환을 사용할 경우 Octave Band 분해를 이용하여 종래에 사용되던 DCT에 비해 계산량을 감소시키면서 변환역 수렴성능을 향상시키는 것이 가능해진다. 또한 모의 실험을 통해 DWT가 DCT와 비슷한 수렴 성능을 내고 있음을 알 수 있었다.

본 연구에서는 Octave Band 분해를 이용하였으나 일반적인 Wavelet Packet 분해[2]를 이용하여 계산량을 감소시키며 같은 성능을 낼 수 있는 연구를 현재 진행중이다.

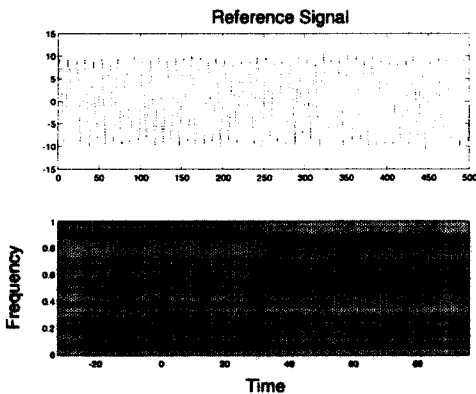


그림 4: Reference Signal and its frequency contents

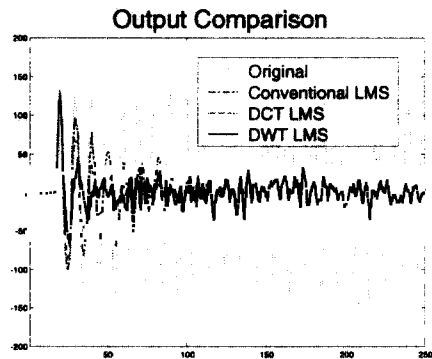


그림 5: Comparison of output signal

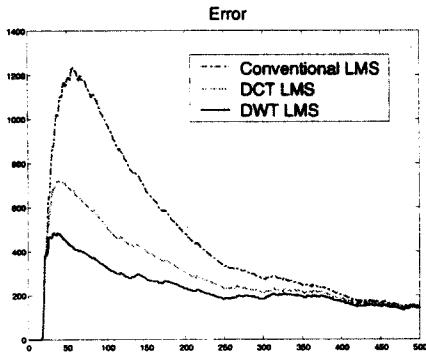


그림 6: Comparison of error signal

참고 문헌

- [1] Françoise Beaufays. Transform-domain adaptive filters: An analytic approach. *IEEE TRANSACTION ON SIGNAL PROCESSING*, 43(2):422-431, FEBRUARY 1993.
- [2] Stéphane Mallat. *a Wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1997.
- [3] Mamadou Mboup, Madeleine Bonnet, and Neil Bershada. LMS coupled adaptive prediction and system identification: A statistical model and transient mean analysis. *IEEE TRANSACTION ON SIGNAL PROCESSING*, 42(10):2607-2615, OCTOBER 1994.
- [4] Martin Vetterli and Jelena Kovačević. *Wavelets and Subband coding*. Prentice Hall, 1995.
- [5] Bernard Widrow and Eugene Walach. *Adaptive Inverse Control*. Prentice Hall, 1995.

부록 A 변환역 Filtered-X LMS의 수렴안정성 증명의 요약

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \mathbf{X}^T[n-m]\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}[n-m]\mathbf{W}[n-m] \\
 e[n] &= d[n] - \mathbf{X}^T[n-m]\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}[n-m]\mathbf{W}[n-m] \\
 f[n] &\triangleq x[n-m]
 \end{aligned}$$

where $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$: spectrum estimation using transformed signal and error path is simple delay case.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}[n]e[n] &= \Lambda^{-\frac{1}{2}}[n-m]\mathbf{T}\mathbf{X}[n-m] \\
 &= \left(d[n] - \mathbf{X}^T[n-m]\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}[n-m]\mathbf{W}[n-m] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{F}[n]e[n]\} &= \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{p}_{xd}[m] - \\
 &\quad \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}[n-m]
 \end{aligned}$$

optimal weight

$$\mathbf{W}^* = \left(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{p}_{xd}[m]$$

update formula

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}[n+1] &= \mathbf{W}[n] + 2\mu E\{\mathbf{F}[n]e[n]\} \\
 &= \mathbf{W}[n] + 2\mu \left(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{p}_{xd}[m] - \right. \\
 &\quad \left. \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}[n-m] \right)
 \end{aligned}$$

excess weight $\mathbf{W} = \mathbf{V} + \mathbf{W}^*$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}[n+1] &= \mathbf{V}[n] + 2\mu (\mathbf{p}_{xd}[m] - \mathbf{R}_{xx}(\mathbf{V}[n-m] + \mathbf{W}^*)) \\
 &= \mathbf{V}[n] - 2\mu \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}[n-m]
 \end{aligned}$$

diagonalize $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q}\Lambda_0\mathbf{Q}^T$, $\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_L)$

$$\mathbf{V}[n+1] = \mathbf{V}[n] - 2\mu \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{Q}\Lambda_0\mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}[n-m]$$

new excess weight $\mathbf{V}' \equiv \mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}[n+1] &= \mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}[n] \\
 - 2\mu \mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{Q}\Lambda_0\mathbf{Q}^T\mathbf{T}^T\Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}[n-m]
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}'[n+1] = \mathbf{V}'[n] - 2\mu \Lambda^{-1}\Lambda_0\mathbf{V}'[n-m]$$

for $(i = 1, \dots, L)$

$$v'_i[n+1] = v'_i[n] - 2\mu \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i} \right) v'_i[n-m]$$

\therefore bound for stable convergence

$$0 < \mu < \frac{1}{\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right)} \sin \left(\frac{\pi}{2(2m+1)} \right)$$