

인체진동 실험용 6자유도 가진기 개발에 관한 연구

우춘규*, 김수현*, 박윤근*, 정완섭**

A Study on the Development of 6DOF Vibration Simulator for Human Vibration Experiment

Chun-Kyu Woo*, Soo Hyun Kim*, Yoon Keun Kwak*, Wan-Sup Cheung**

ABSTRACT

In this paper, we introduce a modified six-degrees-of-freedom parallel-link manipulator, which will be applied to the human vibration experiments. We analyze the inverse kinematics and workspace of this manipulator and comprehend the characteristics of kinematics analyzed. Additionally, solutions of forward kinematics are obtained through the iterative Newton-Raphson method known as one of the most used numerical analysis. Finally, dynamic equation of the manipulator is derived in closed form through the Newton-Euler approach, which will be used for the development of control software.

1. 서론

항공기의 모의실험 용으로 처음 개발된 스튜어트 플랫폼은 6개의 선형 운동이 가능한 링크를 병렬로 연결하여 6자유도 운동을 구현한다. 이러한 스튜어트 플랫폼 구조는 공간상에서 플랫폼을 6개의 링크가 지지하고 있는 형상이므로 자체의 강한 강성을 지니며 이러한 특성으로 인해 자동차나 항공기의 부품과 같은 무거운 실험 대상물의 실험이나 동적 특성분석에 많이 이용되고 있다. 그러나, 스튜어트 플랫폼 형태의 시뮬레이터는 기구학적으로 각 링크들간의 간섭(Interference)으로 인해 플랫폼의 운동 영역이 제한되고, 기구학과 동역학을 나타내는 관계식의 강한 비선형성으로 인해 이를 제

어하는데 상당한 어려움이 있다. 이러한 링크들간의 간섭을 줄이기 위해 3자유도 운동이 가능한 병렬링크 구조(Parallel Link Mechanism)를 가지는 2개의 메커니즘을 이용하여 6자유도 운동을 구현하는 방안이 많이 연구되고 있다¹⁻³⁾.

본 연구에서는 일반적인 스튜어트 플랫폼 구조와는 다소 변형된 형태의 인체 진동 실험용 6자유도 가진기의 기구학 및 동역학적 식을 해석적인 방법을 통해 폐 형식(Closed Form)으로 유도하였으며 유도된 기구학 및 동역학적 식을 이용한 제어 소프트웨어의 개발에 관련된 내용을 다루고자 한다.

2. 6자유도 가진기의 구조 및 사양

* 한국과학기술원
** 한국표준과학연구원

본 연구에서 다루고자 하는 병렬링크 구조를 가지는 가진기의 구조와 사양은 각각 그림 1과 표 1에 나타난 바와 같으며 공간상에서 6자유도 운동을 구현할 수 있으며 구동원으로는 유압을 사용하였다.^[4]

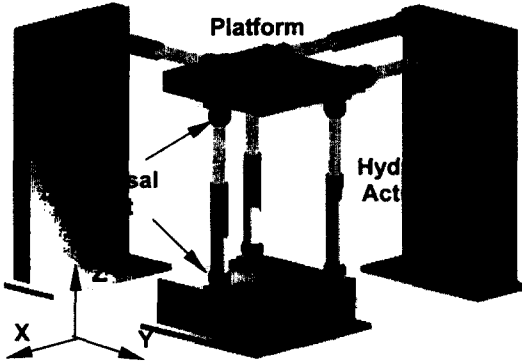


Fig. 1. Structure of the 6DOF Vibration Simulator.

Fig. 1에 나타나 있는 6자유도 가진기는 수직 방향 및 수평 방향의 각각 3개의 유압 액추에이터로 구성되어 있으며 각각의 액추에이터는 상부 플랫폼 및 하부 베이스와 유니버설 조인트(Universal Joint)로 연결되어 있다.

Table 1. Requirements and Specifications of the 6DOF Vibration Simulator.

Description		Specification
Moving Platform Size		1200 mm × 1200 mm
Excitation Frequency		0.1–60 Hz
Actuator	Maximum Stroke	±135 mm
	Neutral Length	1453/1473 mm
	Maximum Velocity	1000 mm/s (r.m.s.)
	Dynamic Force	20/40 kN
Maximum Dynamic Displacement	X Motion	±100 mm
	Y Motion	±100 mm
	Z Motion	±100 mm
	Roll Motion	±15°
	Pitch Motion	±15°
	Yaw Motion	±15°
Maximum Dynamic Acceleration	X Motion	5.0 g ($g=9.8 \text{ m/s}^2$)
	Y Motion	3.5 g
	Z Motion	8.0 g
	Roll Motion	131 rad/s^2 (peak)
	Pitch Motion	125 rad/s^2 (peak)
	Yaw Motion	73 rad/s^2 (peak)

3. 가진기의 기구학

Fig. 2는 Fig. 1에 나타난 가진 시뮬레이터의 기구학적 식을 해석적으로 구하기 위해 단순화한 그림이다.

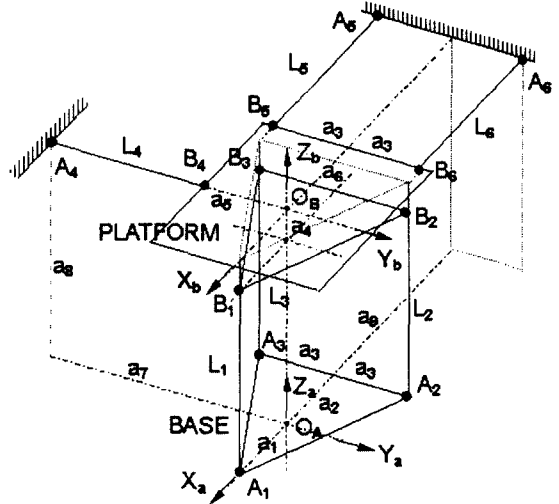


Fig. 2. 6DOF Vibration Simulator and Its Coordinates. (• : Universal Joint)

Fig. 2에 나타나 바와 같이 좌표계 $\{X_a, Y_a, Z_a\}$ 는 O_A 를 원점으로 하고 기초 프레임(Base Frame)에 고정된 좌표계를 나타내며, 좌표계 $\{X_b, Y_b, Z_b\}$ 는 O_B 를 원점으로 움직이는 플랫폼에 고정된 좌표계를 나타낸다.

Table 2. Dimensions of the 6DOF Vibration Simulator.

Symbols	Values	Symbols	Values
a_1	600 mm	a_6	670 mm
a_2	300 mm	a_7	2193 mm
a_3	500 mm	a_8	1663 mm
a_4	210 mm	a_9	2123 mm
a_5	720 mm		

Fig. 2의 $A_i(i=1,2,\dots,6)$ 는 기초 프레임과 각각의 액추에이터의 연결점을 표시하며 $B_i(i=1,2,\dots,6)$ 는 움직이는 플랫폼과 각각의 액추에이터의 연결점을 나타낸다. $L_i(i=1,2,\dots,6)$ 은 각각의 액추에이터의 길이를

나타내며, $a_i(i=1,2...9)$ 는 O_A 와 O_B 그리고 연결점인 A_i 와 B_i 사이의 거리를 나타내며 Table 2에 나타낸 바와 같다.

6자유도 가진기의 역 기구학(Inverse Kinematics)은 간단한 벡터 관계식으로부터 유도될 수 있다. 6자유도 플랫폼의 운동 변수를 $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ 라고 하고 조인트 변수를 $l_i(i=1,2...6)$ 라 하면, 액츄에이터의 길이 벡터 $L_i=[L_{ix} \ L_{iy} \ L_{iz}]^T$ 는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} L_i &= O_A B_i - O_A A_i \\ O_A B_i &= O_A O_B + \mathcal{R}^B O_B B_i \quad (i=1,2...6) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $O_A O_B=[x, y, z+1663]^T$ 는 좌표계 $\{X_a, Y_a, Z_a\}$ 의 원점으로부터 좌표계 $\{X_b, Y_b, Z_b\}$ 로의 위치벡터를 나타내며 \mathcal{R} 는 고정각 $X-Y-Z(\alpha-\beta-\gamma)$ 를 사용한 좌표계 $\{X_b, Y_b, Z_b\}$ 에서 좌표계 $\{X_a, Y_a, Z_a\}$ 로의 회전변환행렬(Rotational Transformation Matrix)^[6]을 나타낸다.

식 (1)을 이용하면 각각의 액츄에이터의 길이는 아래와 같이 구해질 수 있다.

$$l_i = |L_i| \quad (i=1,2...6) \quad (2)$$

6자유도 가진기의 역 기구학(Inverse Kinematics)을 나타내는 식 (2)는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$l = f(X) \quad (3)$$

여기서, $l=[l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6]^T$ 는 각각의 액츄에이터의 길이를 나타내는 조인트 변수(Joint Variables)를 나타내며, $X=[x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$ 는 공간상의 위치와 자세를 표시하는 운동 변수(Working Variables)를 나타낸다. 식 (3)을 시간에 대한 미분을 취하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{\partial f(X)}{\partial X} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial f(X)}{\partial X} \dot{X} \\ &= J(X)\dot{X} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $J(X)$ 는 6자유도 가진기의 조인트 변수의 속도와 운동 변수의 속도와와의 관계를 표현하는 자코비안(Jacobian)을 나타낸다. 이러한 자코비안을

이용하면 입력 힘과 출력 힘 사이의 관계를 결정할 수 있다. $\tau=[\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6]^T$ 를 각각의 액츄에이터에 의해 플랫폼에 작용하는 힘이라 하고 $F_x=[F^T \ M^T]^T$ 를 구동 좌표계상의 플랫폼의 힘(F^T)과 모우멘트(M^T)라고 하자. 식 (4)를 이용하면 각각의 액츄에이터의 미소 변위 Δl 과 플랫폼의 미소 변위 ΔX 와의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta l = J(X)\Delta X \text{ or } J(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta X} \quad (5)$$

가상일의 정리(Principle of Virtual Work)와 식 (5)를 사용하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau^T \Delta l &= F_x^T \Delta X \\ [\tau^T J(X) - F_x^T] \Delta X &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

따라서, 액츄에이터의 입력 힘과 플랫폼의 출력 힘/모우멘트 사이의 관계는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$F_x = J^T \tau \quad (7)$$

식 (4)와 (7)로부터 운동영역(Workspace) 상에 특이점(Singular Point)이 존재하면 가진기의 속도 및 힘과 모우멘트의 전달 특성은 나빠진다는 사실을 알 수 있다.

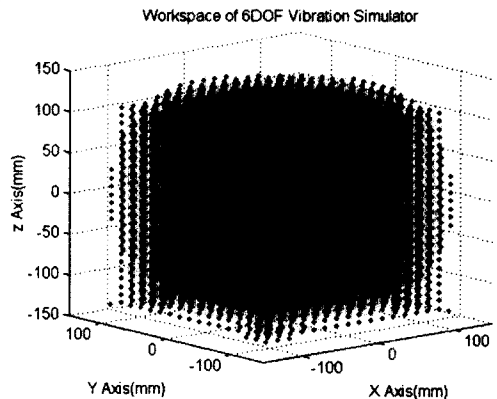


Fig. 3. Workspace of the 6DOF Vibration Simulator.

Fig. 3은 6개의 운동변수 중 회전 운동 변수인 α, β, γ 가 영°일 경우의 6자유도 가진기의 운동영역을 나타낸 것으로 운동영역 상에 특이점이 존재하지

않는 우수한 특성을 지닌다는 사실을 알 수 있다.

일반적인 직렬링크 구조의 매니플레이터의 정 기구학과 역 기구학의 해는 폐 형식의 해를 구할 수 있는 반면에, 일반적인 병렬링크 구조의 매니플레이터의 정 기구학은 폐 형식의 해를 구할 수 없다^[6,7]. 이러한 병렬링크 구조의 매니플레이터의 정 기구학의 해를 구하기 위해 반복 수치 계산법 (Iterative Numeric Method)^[8], 고차 다항식법(High Order Polynomial Method) 및 여유 센서 사용법 (Redundant Sensor Method)^[9] 등 단지 몇 가지는 리적인 방법만이 소개되어왔다. 그러나, 고차 다항식법은 많은 계산량을 필요로 하고 고차 다항식항들에 기인한 오차가 커지는 단점이 있으며, 여유 센서 사용법은 정기구학의 해를 구하기 위해 부가적인 센서를 필요로 한다는 단점이 있다. 또한, 대부분의 반복 수치 계산법은 정 기구학의 실제 해를 구하는데 많은 계산량을 필요로 하여 실시간 제어에 적용하기 어려운 단점이 있다. 그러나 만약, 반복 수치 계산법을 사용하여 정지구학의 해를 제한된 시간 안에 안정적으로 구할 수 있다면 수치 계산법은 실시간 제어에 적용할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 6자유도 가진기의 정 기구학의 해를 구하기 위해 반복 수치 계산법 중에서 가장 효과적인 방법으로 알려진 반복 뉴턴-랩슨법 (Iterative Newton-Raphson Method)^[10]을 사용하였다. 반복 뉴턴-랩슨법을 사용하기 위해 각각의 액츄에이터의 실제 값의 곱과 추정된 값의 곱과의 차로써 정의되며 변수에 대해 미분가능하고 실제 해에서의 함수 값은 영이 되는 오차 함수를 아래와 같이 정의하였다.

$$\Xi_i(\vec{X}) = \mathbf{L}_i^T(\vec{X})\mathbf{L}_i(\vec{X}) - |l_{o,i}|^2 \quad (i=1,2...6) \quad (8)$$

여기서, $|l_{o,i}|$ 는 액츄에이터의 측정된 길이를 나타내며 \vec{X} 는 플랫폼의 변위/회전각을 나타내는 변수의 추정된 값이다. 위의 오차함수를 한 점 근처에서 테일러 급수 전개하면 아래와 같이 표현할

수 있다.

$$\Xi_i(\vec{X} + \delta\vec{X}) = \Xi_i(\vec{X}) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \Xi_i(\vec{X})}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\vec{X}^2) \quad (9)$$

$$\text{where } \vec{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \quad (i=1,2...6)$$

만약, $\delta\vec{X}$ 이 매우 작다면 $O(\delta\vec{X}^2)$ 는 무시할 만 하며, $\Xi_i(\vec{X} + \delta\vec{X}) = 0$ 은 다음과 같음을 의미한다.

$$\delta\vec{X} \approx -\frac{\Xi_i(\vec{X})}{\Xi_i'(\vec{X})} \quad (10)$$

$$\text{where } \Xi_i'(\vec{X}) = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \Xi_i(\vec{X})}{\partial x_j}$$

만약, \vec{X} 이 실제 해와 같다면 $\delta\vec{X}$ 과 $\Xi_i(\vec{X})$ 는 영이 될 것이며 반복 뉴턴-랩슨법은 아래와 같이 표현될 것이다.

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n - [\Xi'(\vec{X}_n)]^{-1} \Xi(\vec{X}_n) \quad (11)$$

식 (11)에서 $\Xi'(\vec{X}_n)$ 는 자코비안(Jacobian)을 이용하면 아래와 같이 표현될 수 있다^[11].

$$\Xi'(\vec{X}_n) = 2\text{diag}(\mathbf{I})\mathbf{J}(\vec{X}_n) \quad (12)$$

여기서, $\text{diag}(\mathbf{I})$ 은 액츄에이터 길이를 주 대각 항으로 가지는 대각행렬을 나타낸다.

따라서, 정 기구학의 해는 $\Xi'(\vec{X}_n)$ 의 역행렬이 특이치(Singularity)를 가지지 않아야 안정적으로 실제 해로 수렴하게 됨을 알 수 있다. 또한, 식 (11)와 (12)로부터 각각의 액츄에이터의 길이는 영(Zero)이 될 수 없기 때문에 6자유도 가진기의 정 기구학의 해는 자코비안 행렬이 특이점(Singular Point)을 가지지 않으면 안정적으로 실제 해로 수렴함을 알 수 있다. 본 연구에서 개발, 제어하고자 하는 6자유도 병렬링크 구조의 가진기는 운동영역 상에 특이점이 없다는 특성을 가지고 있어 반복 뉴턴-랩슨법(Iterative Newton-Raphson Method)은 정기구학의 해를 구하는 안정적인 방법이라 할 수 있다.

4. 가진기의 동역학

본 절에서는 6자유도 병렬링크 구조 매니플레이터의 동역학적 식을 유도하고자 한다. 일반적으로, 병렬링크 구조 매니플레이터의 동역학적 식 및 식의 유도는 그들의 페 루프 구조와 기구학적 구속 때문에 직렬링크 구조 매니플레이터의 동역학적 식에 비해 상당히 복잡하다^[12].

일반적인 경우, 라그랑지 매개변수(Lagrange Multiplier)를 통해 기구학적 구속을 부여하는 오일러-라그랑지(Euler-Lagrange) 방법은 미분 방정식 형태의 동역학적 식을 표현한다^[13]. 하지만, 이 방법에 의한 동역학적 식을 풀기란 상당히 복잡하며 라그랑지안(Lagrangian)의 편미분을 구하기 위한 많은 심벌의 계산 및 수치 연산을 필요로 한다. 반면에, 뉴턴-오일러(Newton-Euler) 방법은 라그랑지안과 같은 함수의 미분을 필요로 하지 않아 수치 계산이 많지 않다는 장점이 있다.

직렬링크 구조의 매니플레이터의 동역학 식의 유도에 있어서 역 동역학 계산에 많은 제한을 받게 되고 동역학 식이 폐 형식으로 유도되지 않지만, 병렬링크 구조의 매니플레이터의 동역학 식의 유도에 있어서는 뉴턴-오일러 방법은 동역학 식을 폐 형식으로 유도할 수 있다는 장점을 지닌다^[13].

Kane Equation^[14]은 병렬링크 구조 매니플레이터의 동역학적 식의 유도에 직접적으로 이용될 수는 없으나 재귀 뉴턴-오일러(Recursive Newton-Euler) 및 가상 오픈 체인(Virtual Multiple Open Chain) 개념을 이용하여 동역학적 식을 유도할 수 있다^[15].

본 연구에서는 뉴턴-오일러(Newton-Euler) 방법^[12]을 통해 6자유도 가진기의 폐 형식의 역학적 식을 유도하고자 한다. 동역학적 식의 유도에 있어서 각각의 액츄에이터의 축 방향으로의 회전운동은 존재하지 않는다고 가정하였다. 먼저, 각각의 액츄에이터의 기구학, 동역학을 계산하여 플랫폼과 각각의 액츄에이터의 연결점인 유니버설 조인트에 작용하는 힘을 계산하였다. 다음으로, 앞에서 구한 힘과 플랫폼의 기구학 및 동역학을 이용하여 6자유도 병렬링크 구조의 매니플레이터의 동역학

적 식을 폐 형식으로 아래와 같이 유도하였다.

$$\mathbf{J} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \Psi = \mathbf{H}\mathbf{F} + \begin{bmatrix} \mathfrak{R}\mathbf{F}_{ext} \\ \mathfrak{R}\mathbf{M}_{ext} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, $\mathbf{p}=[x, y, z]^T$, $\mathbf{q}=[\alpha, \beta, \gamma]^T$ 는 각각 병진 운동 변수와 회전 운동변수로 이루어진 벡터를, \mathbf{F}_{ext} 과 \mathbf{M}_{ext} 는 각각 외부에서 작용되는 힘과 모우멘트를, \mathbf{F} 는 각각의 액츄에이터에 의해 플랫폼에 가해지는 힘을 나타내고 \mathbf{J} 는 6자유도 가진기의 질량 관성 모우멘트 행렬이며, \mathbf{H} 는 입력 힘과 출력 힘 사이의 변환을 나타내는 행렬로써 자코비안의 역행렬의 전치 행렬과 같으며, Ψ 는 연성된 항을 의미하며 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{plat} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{J}_i; \quad \Psi = \Psi_{plat} + \sum_{i=1}^6 \Psi_i \\ \mathbf{J}_{plat} &= \begin{bmatrix} M\mathbf{E}_3 & -M\tilde{\mathbf{R}} \\ M\tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{I} + M(\mathbf{R}^T\mathbf{E}_3 - \mathbf{R}\mathbf{R}^T) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & -\mathbf{Q}_i\tilde{\mathbf{r}}_i \\ \tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{Q}_i & -\tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{Q}_i\tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix} \\ \Psi_{plat} &= \begin{bmatrix} M\{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - \mathbf{g}\} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + M\mathbf{R} \times \{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{g}\} \end{bmatrix} \\ \Psi_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i - \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 & \mathbf{s}_5 & \mathbf{s}_6 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_4 \times \mathbf{s}_4 & \mathbf{r}_5 \times \mathbf{s}_5 & \mathbf{r}_6 \times \mathbf{s}_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \mathbf{F}_3 \ \mathbf{F}_4 \ \mathbf{F}_5 \ \mathbf{F}_6]^T \end{aligned}$$

여기서 나타난 각각의 항은 Appendix A에 나타내었다.

최종적으로, 식 (13)은 6자유도 병렬 링크 구조의 가진 시뮬레이터의 실제 제어 기법에 적용하기 적합한 폐 형식의 동역학적 식이 된다. 이렇게 유도된 병렬링크구조를 가지는 6자유도 가진기의 폐 형식의 동역학적 식은 제어 알고리즘 개발에 활용하기 적합하다고 할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 인체진동 실험용으로 사용할 목적으로 항공기나 자동차의 진동 실험 시 이용되는 일반적인 스텔트 플랫폼과는 구조가 다소 변형

된 6자유도 병렬 가진기의 구조를 제시하였다. 또한, 제시된 가진기의 기구학적 식을 해석적으로 유도 하였으며 유도된 식을 바탕으로 가진기의 기구학적 특성을 분석하였다. 그리고 작업영역 해석 으로부터 제시된 가진기의 우수한 기구학적 특성을 가진다는 사실을 알 수 있었다.

마지막으로, 뉴튼-오일러 방법을 이용하여 제안 된 가진기의 동역학적 식을 폐 형식으로 유도하였다. 이렇게 유도된 폐 형식의 동역학적 식을 이용하여 향후 제어 소프트웨어의 개발에 적극 활용하고자 한다.

참고문헌

- [1] K. C. Kim, S. H. Kim, K. H. Park, Y. K. Kwak, "A 6 Degree-of-Freedom Micro Positioning Manipulator using Piezoelectric Element", CSME FORUM SCGM 1996, 13th Symposium on Engineering Applications of Mechanism.
- [2] K. J. Waldron, M. Raghavan, and B. Roth, "Kinematics of a Hybrid Series-Parallel Manipulation System", ASME Transactions, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, Vol. 111, pp. 211-221, 1989
- [3] R. C. Stroud and G. A. Hamma, "Multiexciter and Multiaxis Vibration Control Systems," Sound and Vibration, Vol. 22, No. 4, pp. 18-28, 1988
- [4] 우춘규, 김경찬, 김수현, 광윤근, 정완섭, "6자유도 가진 시뮬레이터 개발을 위한 시뮬레이션." 한국자동차공학회 `98춘계학술대회.
- [5] John J. Craig, "Introduction to robotics: Mechanics and Control", 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company.
- [6] H.Y. Lee and B. Roth, "A closed-form solution of he forward displacements analysis of a class of in-parallel mechanism", Proceeding of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.720-724, 1993.
- [7] R. Nair and J.H. Maddocks, "On the forward kinematics of parallel manipulators", The International Journal of Robotic Research, Vol.13, No.2, pp.171-188, 1994.
- [8] R.V. Parrish, J.E. Dieudenne and D.J. Martin, Jr., "Motion software for a synergistic six-degree-of-freedom motion base", NASA TN D-7350, 1973.
- [9] K.C. Cheok, J.L. Overholt and R.R. Beck, "Exact method fo determining the kinematics of a Stewart platform using additional displacement sensors, Journal of Robotic System, Vol.10, No.5, pp.689-707, 1993.
- [10] J.E. Dieudenne, R.V. Parrish and R.E. Bardusch, "An actuator extension transformation for a motion simulator and an inverse transformation applying Newton-Raphson's method, NASA Technical Report TN D-7067, 1972.
- [11] C.D. Zhang and S.M. Song, "Forward kinematics of a class of parallel platform with closed-form solutions", Journal of Robotic Systems, Vol.9, No. 1, pp.93-112, 1992.
- [12] B. Dasgupta and T.S. Mruthyunjaya, "Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton-Euler approach", Mechanical Machine Theory, Vol.33, No.7, pp.993-1012, 1998.
- [13] L. Meirovitch, "Methods of analytical dynamics", McGraw-Hill, New York, 1970.
- [14] T.R. Kane, "Dynamics", Stanford University Press, 2nd Edition, 1972.
- [15] Nag-In Kim, "Robust motion control of Stewart platform manipulator and its application to the vibration control of slender structure, Ph.D Thesis, KAIST, 1998.

Appendix A

$$\mathbf{R} = \mathfrak{R}\mathbf{R}_0$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \left[m_u \left(1 + \frac{2\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_u}{L} \right) - \frac{m_d r_d^2 + m_u r_u^2}{L^2} \right] \mathbf{s} \mathbf{s}^T \\ + \frac{m_d r_d^2 + m_u r_u^2}{L^2} \mathbf{E}_3 - \frac{m_u}{L} (\mathbf{s} \mathbf{r}_u^T + \mathbf{r}_u \mathbf{s}^T) \\ - \frac{1}{L^2} [m_d (\mathbf{s} \times \mathbf{r}_d)(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_d)^T + m_u (\mathbf{s} \times \mathbf{r}_u)(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_u)^T \\ - \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_u)\tilde{\mathbf{s}}]$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_s(\mathbf{W} - \boldsymbol{\omega})$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{s} \times \dot{\mathbf{S}} / L$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$$

$$\mathbf{T} = [\tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{y}} \quad \tilde{\mathbf{z}}]$$

where $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{s}$; $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{k} \times \mathbf{s}) / \|\mathbf{k} \times \mathbf{s}\|$; $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{y}}$

\mathbf{s} : Axial unit vector of each actuator.

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{p}}$$

$$\text{where, } \boldsymbol{\omega} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$$

$$\dot{\mathbf{p}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$$

$$u = \mathbf{s} \cdot \mathbf{U}_1 + \frac{1}{L} (\dot{\mathbf{S}} - \dot{L}\mathbf{s})^2$$

$$\mathbf{U}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{L} (\mathbf{s} \times \mathbf{U}_1 - 2\dot{L}\boldsymbol{\omega})$$

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{r}_d + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_d)$$

$$\mathbf{U}_4 = u\mathbf{s} + \mathbf{U}_2 \times \mathbf{r}_u + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_u) + 2\dot{L}\boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{T} \mathbf{I}_{d_0} \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{I}_u = \mathbf{T} [\mathbf{I}_{u_0} + m_u L^2 \mathbf{diag}(0, 1, 1)] \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{V} = (m_u \mathbf{s} \cdot \mathbf{U}_4 + C_p \dot{L} - m_u \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{s} - \frac{1}{L} \mathbf{s} \times \mathbf{U}_5$$

$$\text{where, } \mathbf{U}_5 = m_d \mathbf{r}_d \times \mathbf{U}_3 + m_u \mathbf{r}_u \times \mathbf{U}_4 + (\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_u) \mathbf{U}_2 \\ + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_u) \boldsymbol{\omega} - (m_d \mathbf{r}_d + m_u \mathbf{r}_u) \times \mathbf{g} \\ + C_u \mathbf{W} + \mathbf{f}$$