

# 축대칭 초음속 제트에서의 마하파 방사에 관한 수치적 연구

<sup>0</sup>김용석\*, 이덕주\*\*

## Numerical Analysis of the Mach Wave Radiation in an Axisymmetric Supersonic Jet

Yong Seok Kim and Duck Joo Lee

### ABSTRACT

An axisymmetric supersonic jet is simulated at a Mach number of 1.5 and a Reynolds number of  $10^5$  to identify the mechanism of sound radiation from the jet. The present simulation is performed based on the high-order accuracy and high-resolution ENO(Essentially Non-Oscillatory) schemes to capture the time-dependent flow structure representing the sound source. In this simulation, optimum expansion jet is selected as a target, where the pressure at nozzle exit is equal to that of the ambient pressure, to see pure shear layer growth without effect of change in jet cross section due to expansion or shock wave generated at nozzle exit. Shock waves are generated near vortex rings, and discernible pressure waves called Mach wave are radiated in the downstream direction with an angle from the jet axis, which is characteristic of high speed jet noise. Furthermore, vortex roll-up phenomena are observed through the visualization of vorticity contours.

### 1. 서론

제트소음에 대한 연구는 초음속 여객기의 개발 시 공항 주변의 소음공해, 우주발사체의 초기안정

성 확보를 위한 제트소음이 발사체 구조물에 미치는 영향해석 및 초음속 엔진의 지상 시험 시 시험 동 주변의 소음공해 등과 관련하여 연구가 수행되어 왔다[1-5].

초음속 제트소음은 크게 세가지로 나눌 수 있다. 첫째, 난류 혼합소음(turbulent mixing noise)으

\* 한국과학기술원 대학원 기계공학과 항공우주전공

\*\* 한국과학기술원 기계공학과 항공우주전공

로서 완전 팽창(perfectly expanded)인 경우와 불완전 팽창(imperfectly expanded)의 경우 모두 나타나며, 특징은 마하파(Mach wave)형태로 제트의 아랫방향(downstream)으로 전파된다. 둘째로 불완전 팽창인 경우 screech tone과 shock-associated noise 들로 나뉘어지는데 feedback loop 메카니즘에 의한 screech tone은 discrete frequency를 갖으며 윗방향(upstream)으로 전파되는 특징이 있고, shock-associated noise는 broadband형태로 또한 upstream으로 전파된다. 본 논문에서는 초기 centerline Mach number가 1.5인 cold axisymmetric 제트유동에서의 난류 혼합소음인 강한 마하파(Mach wave) 방사에 대해 해석을 수행하였다.

최근의 난류 혼합소음에 대한 이론적인 연구를 통해 마하파의 발생 메카니즘은 불안정 파(instability waves)의 성장(growth)과 소멸(decay)에 의해 야기된다는 것이 밝혀졌다. 즉 거대 난류(large-scale turbulence) 구조인 와류(vortex)가 주위의 음속에 비해 초음속으로 전파되면서 강한 마하파를 발생시키는 것이다. Tam과 Burton[6]은 선형 안정 이론(linear stability theory)에 근거한 해석을 통해 제트 전단층(shear layer)에서의 불안정 파의 생성과 소멸에 기인한 원거리 소음을 예측하였다. Mankbadi[7]는 평균유동과 랜덤 난류(random turbulence)와의 상호작용에 의한 비선형 불안정 파의 고유구조(coherent structure)에 대한 방사장을 해석하였다. Brian et al.[8]는 직접 수치 모사(direct numerical simulation)를 통해 축대칭 제트에서의 vortex pairing에 의해 발생하는 소음을 해석하고 Lighthill 및 Kirchhoff 방정식으로부터 얻은 해와 비교하였다.

제트 소음원 및 원거리 음압을 정확하게 해석하기 위해서는 Navier-Stokes 방정식을 직접 수치 모사 하는 것이 필요하나 아직까지는 제한적으로 해석이 이루어지고 있으며 그의 대안으로 LES(large eddy simulation) 방법이 이용되고 있다. 제트소음 해석에 있어 난류모델링(turbulent

modelling)의 적용은 몇 가지 문제점을 갖고 있다. 첫째, 제트와 같은 자유 전단층(free shear layer)에 대한 난류모델링은 벽이 있는 경우 개발된 난류모델링과는 특성이 다르고 둘째, jet spreading의 크기는 적용된 난류모델링에 따라 달라지므로 정확한 제트소음원을 해석하는때는 한계가 있다.

본 논문에서는 완전 팽창 제트에 기인한 근거리(near field) 소음해석에 초점을 맞추려고 한다. 즉 마하파 방사의 소음 발생 메카니즘을 규명하는 것을 목표로 한다. 따라서 Navier-Stokes 방정식을 난류모델링을 사용하지 않고 이용하여 제트 전단층에서의 disturbance 성장이 있는 제트의 천이영역(transitional region) 해석에 관심을 갖고 수치해석을 수행하였다.

제트유동에 기인한 소음원 및 그의 전파를 정확하게 계산하기 위해서는 고차 정확도의 스킴이 요구되며, 본 논문에서는 공간에 대해 3차정확도를 갖는 Harten계열의 유한체적법(finite volume method) ENO(essentially nonoscillatory) 스킴[9-10]을 사용하였다.

## 2. 지배방정식 및 수치기법

본 논문의 목표는 실험치와의 정량적인(quantitative) 비교보다는 마하파 방사의 소음 발생 메카니즘을 규명하는 정성적인(qualitative) 해석에 관심을 둘 것이다. 따라서 초음속 제트유동은 실제로 3차원 특성이지만, 축대칭 해석을 수행함으로써 복잡한 3차원 유동해석 시 필요한 물리적 통찰을 얻을 수 있을 것이다.

### 2.1 지배방정식

축대칭 N-S 지배방정식을 일반좌표계에서 강한 보존 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = \frac{1}{Re_\epsilon} \left( \frac{\partial F_v}{\partial \xi} + \frac{\partial G_v}{\partial \eta} + H_v \right) \quad (1)$$

여기에서

$$Re_a = \frac{\rho_\infty a_\infty D}{\mu_\infty},$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \xi_x \\ \rho v U + p \xi_y \\ (\rho e_t + p)U - p \end{bmatrix},$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p \eta_x \\ \rho v V + p \eta_y \\ (\rho e_t + p)V - p \end{bmatrix}, \hat{H} = \frac{H}{J},$$

$$\hat{F}_v = \frac{1}{J} [\xi_x F_v + \xi_y G_v],$$

$$\hat{G}_v = \frac{1}{J} [\eta_x F_v + \eta_y G_v], \hat{H}_v = \frac{H_v}{J}$$

이고  $\hat{F}_v$ ,  $\hat{G}_v$ ,  $\hat{H}_v$ 는 점성항과 관련된 것이다. U, V는  $\xi, \eta$  방향의 contravariant 속도성분으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.2 수치기법

지배방정식 (1)를 비점성항 공간차분을 위한 ENO 수치기법을 적용하기 위해 다음과 같이 차분한다.

$$\hat{Q}_{j+1/2}^{n+1} = \hat{Q}_j^n - \lambda [ \hat{F}_{j+1/2}^n - \hat{F}_{j-1/2}^n ] \quad (4)$$

여기서

$$\hat{F}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [ \hat{F}_j^n + \hat{F}_{j+1}^n + R_{j+1/2}^n \cdot \phi_{j+1/2}^n / J_{j+1/2}^n ] \quad (5)$$

$R_{j+1/2}^n$ 는 우특성 행렬을 나타내고,  $\phi_{j+1/2}^n$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2}^n &= g_{j+1}^n(a_{j+1/2}^n) + g_j^n(a_{j+1/2}^n) - |a_{j+1/2}^n| \cdot \\ &\{ a_{j+1/2}^n \Delta + w_j^n + g_{j+1}^n(a_{j+1/2}^n) - g_j^n(a_{j+1/2}^n) \} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $a_{j+1/2}^n$ 는 특성속도를,  $\Delta + w_j^n$ 는 특성벡터의 1번째 요소를 나타낸다.  $g_j^n$ 은 3차 정확도의 ENO스킴을 구성할 벡터로 다음과 같이 표현된다.

$$g_j^n(a_{j+1/2}^n) = \alpha a_{j+1/2}^n \beta_j^n + \tilde{\alpha} a_{j+1/2}^n \tilde{\beta}_j^n + \hat{\alpha} a_{j+1/2}^n \hat{\beta}_j^n \quad (7)$$

여기서  $\alpha, \tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ 함수들은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= |a|(1-|a|)/2 \\ \tilde{\alpha}(a) &= a^+(2-3|\lambda a|+|\lambda a|^2)/6 + a^-(1-|\lambda a|^2)/6 \\ \hat{\alpha}(a) &= a^+(1-|\lambda a|^2)/6 + a^-(2-3|\lambda a|+|\lambda a|^2)/6 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 +,-는 각각 양의방향과 음의방향으로 전파되는 파를 나타내고 3차정확도의 나눔차분값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_j^n &= m(\Delta - w_j^n, \Delta + w_j^n) \\ \text{if } (\Delta - w_j^n \leq \Delta + w_j^n) \\ \tilde{\beta}_j^n &= m(\Delta - \Delta - w_j^n, \Delta - \Delta + w_j^n), \tilde{\beta}_j^n = 0, \\ \text{otherwise} \\ \hat{\beta}_j^n &= m(\Delta - \Delta + w_j^n, \Delta + \Delta + w_j^n), \hat{\beta}_j^n = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 minmod 함수  $m(a,b)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$m(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & a \times b > 0 \\ 0, & a \times b < 0 \end{cases} \quad (10)$$

유동 변수의 미분값을 포함하는 점성항을 계산하기 위해서는 Cell경계면에서 유동 변수의 미분값이 정의되어야 한다. Cell 경계면에서 미분값을 정의하는 방법에는 여러 가지가 있으나 본 논문에서

는 Cell 꼭지점에서의 유동 변수를 주위의 4개 Cell에 정의된 값들의 평균을 취하여 구하고, Cell 경계면에서의 유동 변수의 미분값은 가우스 정리(Gauss theorem)를 적용하여 구한다.

지배방정식 (1)를 시간적분을 위해 차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{i,j}^{n+1} = & \hat{Q}_{i,j}^n - \Delta t \left[ \hat{F}_{i+1/2,j}^n - \hat{F}_{i-1/2,j}^n \right. \\ & \left. - 1/Re(\hat{F}_{i+1/2,j}^n - \hat{F}_{i-1/2,j}^n) \right] \\ & - \Delta t \left[ \hat{G}_{i,j+1/2}^n - \hat{G}_{i,j-1/2}^n \right. \\ & \left. - 1/Re(\hat{G}_{i,j+1/2}^n - \hat{G}_{i,j-1/2}^n) \right] \\ & - \Delta t \left[ \alpha \hat{H}_{i,j}^n - 1/Re(\alpha \hat{H}_{i,j}^n) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 다차원 upwind스킴에 적절히 적용하려는 연구들이 많이 수행되고 있는데 그 중에서도 행과 열 각각을 스위핑하는 Strang-type dimensional splitting 방법이 널리 사용되고 있다. 현 연구에서도 축대칭 upwind스킴에 Strang-type dimensional splitting 방법[11]을 적용하였고 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{i,j}^{n+1} = & L_r(\Delta t/2)L_r(\Delta t)L_r(\Delta t)L_r(\Delta t) \\ & \cdot L_r(\Delta t)L_r(\Delta t)L_r(\Delta t/2) \end{aligned} \quad (12)$$

일차원  $L_r$  operator는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L_r \hat{Q}_{i,j}^n = & \hat{Q}_{i,j}^n - \Delta t \left[ \hat{F}_{i+1/2,j}^n - \hat{F}_{i-1/2,j}^n \right. \\ & \left. - 1/Re(\hat{F}_{i+1/2,j}^n - \hat{F}_{i-1/2,j}^n) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. 계산영역 및 경계조건

Fig. 1은 수치계산을 위한 계산영역을 보여주는데 그림으로 축 방향(axial direction)으로 20D이

고 반경 방향(radial direction)으로 16D이며 D는 노즐 출구 지름이다. 축 방향 차분을 위해 450개의 셀을, 반경 방향으로는 350개의 셀을 사용하였다. 축 방향으로 최소 격자 간격은 노즐 출구 경계에서  $\Delta x_{\min}/D=1.30 \times 10^{-2}$ 이고, 반경 방향의 최소 격자 간격은 노즐이 있는 위치에서  $\Delta y_{\min}/D=7.24 \times 10^{-3}$ 이다. 그리고  $r=0$ 와  $r=R$ 사이 에 등간격으로 70개의 격자를 사용하였다.

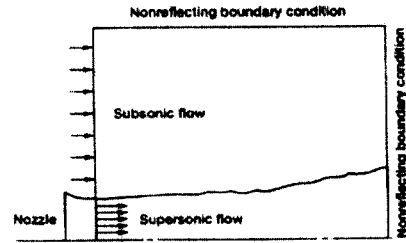


Fig. 1 Schematic diagram of the computational domain

장시간 계산이 요구되는 소음 해석 시에는 경계조건이 매우 중요하다. Fig. 1에서 보듯이 출구(outflow)와 윗(upper) 경계조건은 Thompson의 비 반사(nonreflecting) 특성치 경계조건[12-13]을 부여하였고, 축대칭 경계는 대칭조건을 주었다. 특히 출구에서는 exit 조건을 추가로 주어 와류가 빨리 소산하게 함으로써 출구 경계에서 반사가 일어나지 않도록 하였다. 입구(upstream)경계 조건은 수치계산 시 “노즐” 조건을 정확히 모사할 수 있어야 하나 현재 많은 연구가 수행 중에 있으며 본 논문에서는 제트 계산 시 자주 사용되는 tangent hyperbolic 타입의 축 방향 속도(axial velocity)를 주었고 다음 식으로 표현된다.

$$u = \frac{U_0}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \frac{25}{4} \left( \frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \right] \right\} \quad (14)$$

여기서  $U_0$ 는 제트의 센터 속도이고 R은 제트반경을 나타낸다. 제트출구에서의 반경방향 속도 성분  $v$ 는 0으로 주었다. 초음속 입구 유동에 대해서는 모든 변수가 고정되고, 아음속 입구 유동일 때는 4개의 특성 변수 중 한 개는 경계 밖으로 나가는 것으로 이것은 내부 점들을 이용하여 구한다. 계산 영역 안으로 들어가는 3개의 변수 중 2개는  $u$ 와  $v$ 를 주고 나머지 하나는 총 엔탈피 (total enthalpy) 보존 법칙으로 결정하였다.

#### 4. 계산결과 및 토론

초음속 축대칭 제트유동 및 마하파 방사소음 해석을 위해 압축성 축대칭 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다. N-S 방정식은 소음원 및 음의 전파를 해석할 수 있는 방정식이다. 본 논문에서는 shear layer에서 disturbance가 성장하는 제트의 천이영역에 초점을 맞추었으므로 난류모델은 사용되지 않았다 Fig. 2는 축대칭 제트의 instability를 가시화한 것으로 vortex ring이 생성되고 갑자기 난류로 바뀌는 현상을 보여주고 있다. 위에서 언급하였듯이 본 연구에서의 계산 영역은 거대 난류(large-scale turbulence) 구조인 와류(vortex)가 주위의 음속에 비해 초음속으로 전파되면서 발생하는 마하파 방사 해석에 초점을 맞추었다.



Fig. 2 Visualization of instability for an axisymmetric jet

완전 팽창(perfectly expanded) 제트의 마하파 방사는 Fig. 3에서 보듯이 공기의 viscosity에 의해 와류(vortex)가 생성이 되고, 이로 인해 와류와 와류사이에서는 강한 압력장이 생성이 된다. 강한 압력장은 근처 와류를 아랫(downstream) 방향으로

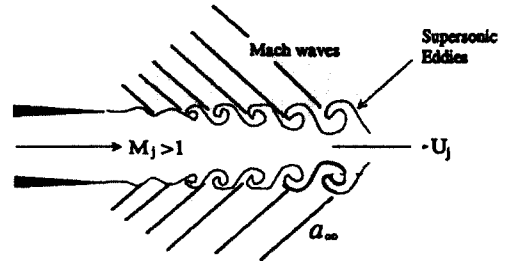


Fig. 3 Mach wave radiation due to a supersonic convection of eddies

밀어내고 이런 와류들의 가속운동에 의해 제트 밖으로 마하파를 발생시킨다. 마하파의 전파각도는 45° 근처에서 우세하다.

본 연구에서는 완전 팽창 축대칭 제트유동을 해석하였으며 마하수는 1.5, Reynolds 수는  $10^5$ 으로 계산하였고, 50000번 반복계산 하여 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.

Fig. 4는 압력장(pressure contours)을 보여주는데 와류가 있는 곳에서는 압력이 낮은 값을 갖고, 와류와 와류사이에서는 높은 값을 갖는다. 와류와 와류사이의 높은 압력장은 근처의 와류를 downstream 방향으로 밀쳐내는데 이 때 와류들의 가속운동에 의해 마하파(Mach wave)가 발생함을 볼 수 있다.  $x/D=7, 10$  그리고 14 근처에서 마하파가 전파됨을 뚜렷하게 볼 수 있다.

Fig. 5는 제트축의 센터를 따라 분포된 압력 및 마하수를 보여준다.  $x/D=6.5$  근처에서 가장 큰 마하수를 보여주고 있고, downstream으로 전파되면서 공기의 viscosity가 증가함으로 인해 그 크기가 감소됨을 알 수 있다.

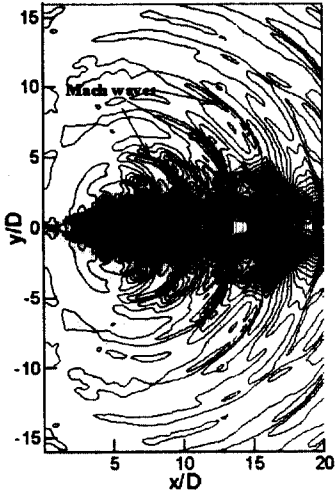
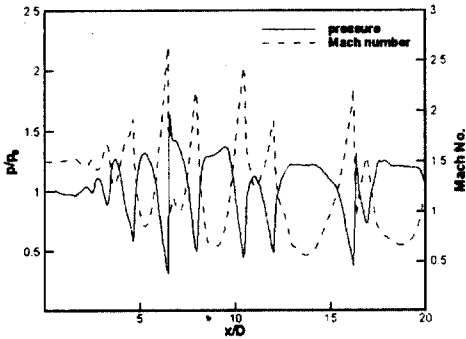


Fig. 4 Pressure contours



또한 제트 축을 따라 압력은 높고 낮음을 반복하는데 이것은 와류의 위치를 나타내 준다.

Fig. 5 Centerline flow variables distribution

Ffowcs Williams에 의하면 마하파 방사에 의한 원거리(far-field) 음향 파워는 다음식으로 표현된다.

$$\text{Acoustic power} \sim \rho \cdot U_j^3 D^2$$

여기서  $\rho$ 는 대기밀도를,  $U_j$ 는 제트의 대류속도를,  $D$ 는 노즐 직경을 나타낸다. 이 식에서 보듯이 음향 파워는 제트 대류속도의 3승에 비례하므로 제트 음향 파워를 효과적으로 줄이기 위해서는 제트 축을 따라 대류속도가 큰 위치에서 속도를 줄여야 함을 알 수 있다.

Fig.6은 50000번 반복계산 후의 vorticity contours를 보여주고 있다.  $x/D=4$  근처에서 rolled-up vortex가 생성되는 것이 보이고 있는데 이것은 제트 전단층(jet shear layer)의 Kelvin-Helmholtz instability에 의해 생기는 것이다. 초음속 제트의 경우는 와류가 flattening해지는 특성이 보이고 있고, 두 개의 vortex ring이 그룹을 이루어 서로 가까이 있는 것이 있는가 하면 어떤 그룹은 떨어져서 존재함을 볼 수 있다.

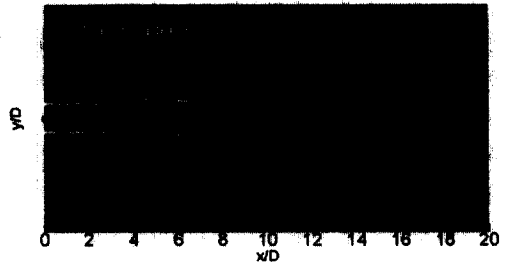


Fig. 6 Vorticity contours

$x/D=4$  바로 직후를 자세히 살펴보면 두 개의 와류가 짝운동(pairing motion)하는 것이 관찰되는데 와류 짝운동 소음에 대해서는 앞으로 연구를 더 수행할 것이다.

## 5. 결론

본 연구에서는 완전 팽창 축대칭 제트유동을

수치적으로 해석하였고, 마하수는 1.5, Reynolds 수는  $10^5$ 으로 계산하였으며 계산된 결과를 통해 소음 발생 메카니즘을 규명하였다. 제트 전단층(jet shear layer)의 Kelvin-Helmholtz instability에 의해 rolled-up vortex가 생성이 되고, 와류와 와류사이의 높은 압력장은 근처의 와류를 downstream방향으로 밀쳐내는데 이 때 와류들이 주위의 음속에 비해 초음속으로 전파되면서 마하파(Mach wave)를 발생시킴을 알 수 있었다. Vorticity contour를 통해 제트 전단층에 의한 거대 난류(large-scale turbulence) 구조인 와류(vortex)가 생성됨을 확인 할 수 있었다. 또한 두 개의 와류가 짝운동(pairing motion)하는 것이 관찰되었는데, 와류 짝운동에 의해 생성되는 소음에 대해서는 앞으로 연구를 더 수행할 것이다.

### 후기

본 연구는 항공우주연구소의 “인공위성 발사체 필수기술 연구” 과제에 의하여 수행된 것으로서 도움을 주신 항공우주연구소에 감사드립니다.

### 참고문헌

- [1] Tam, C. K. W., "Supersonic Jet Noise, Annu. Rev. Fluid Mech.," Vol. 27, 1995, pp. 17-43.
- [2] Zoppellari, E. and Juve, D., "Reduction of Hot Supersonic Jet Noise by Water Injection," AIAA/CEAS Paper 98-2204, 1998.
- [3] Mankbadi, R. P., Hayer, M.E. and Povinelli, L.A., "Structure of Supersonic Jet Flow and Its Radiated Sound," AIAA Journal, Vol. 32, No. 5, 1994, pp. 897-906.
- [4] Tam, C. K. W., and Chen, P., "Turbulent Mixing Noise from Supersonic Jets," AIAA Journal, Vol. 32, No. 9, 1994, pp. 1774-1780.
- [5] Nakamura, Y. and Yamaguchi, H., "Compressible Jet and Its Sound Emission," Computational Fluid Dynamics JOURNAL, Vol. 8, No. 2, 1999, pp. 250-256.
- [6] Tam, C. K. W. and Burton, D. E., "Sound Generated by Instability Waves of Supersonic Flows. Part 2. Axisymmetric jets," J. Fluid Mech., Vol. 138, 1984, pp. 273-295.
- [7] Mankbadi, R. P., "The Self-Noise from Ordered Structures in a Low Mach Number Jet," Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, March 1990, pp. 241-246.
- [8] Mitchell, B. E., Lele, S. K. and Moin, P., "Direct Computation of the Sound Generated by Vortex Pairing in an Axisymmetric Jet," J. Fluid Mech., Vol. 383, 1999, pp. 113-142.
- [9] Harten, A. and Osher, S., "Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes I," SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 24, No. 2, 1987, pp. 279-309.
- [10] Kim, Y. S. and Lee, D. J., Numerical Prediction of I.C. Engine Intake Noise with a Moving Piston and a Valve, AIAA/CEAS Paper 99-1833, 1999.
- [11] Strang, G., "On the Construction and Comparison of Difference Schemes," SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 5, No. 3, 1968, pp. 506-517.
- [12] Thompson, K. W., "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems," Journal of Computational Physics, Vol. 68, 1987, pp.1-24.
- [13] Thompson, K. W., "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems II," Journal of Computational Physics, Vol. 89, 1990, pp. 439-461.