

구조물의 모델링 (박막 혹은 평판) 이 모드 모델 방법에 미치는 영향

°김시문*, 김양한**

The Effect of Structural Models (Membrane or Plate) on the Modal Model Method

°Sea-Moon Kim and Yang-Hann Kim

ABSTRACT

The analysis of structures may be classified into three categories: theoretical, numerical, and experimental approaches. The numerical and experimental methods are very useful when the structures to be analyzed have complicated shapes or geometry because theoretical methods are restricted to simple and special cases. However, the theoretical methods are very important analysis in the viewpoint that they can give basic insight for the structural behavior. Among them the modal model method is widely used because of the powerful property of eigenfunctions (mode shapes), or orthogonality. In this paper, the modal model method was reviewed and studied for various models for structures: string, beam, membrane, and plate. Governing equations and solution methods were compared and a structural-acoustic coupling system was used for an application.

1. 서론

박막이나 평판과 같은 구조물의 거동을 해석하는 경우 주어진 조건에 따라 가장 적합한 방법을 사용하게 된다. 예를 들어 사각형상이나 원형과 같은 간단한 형상을 가진 박막의 경우에는 변위를 모드들의 조합으로 표현하여 이론적인 해를 구하

는 것이 가능하며⁽¹⁾ 복잡한 형상을 가지는 경우에 있어서는 모드 함수 표현의 어려움으로 인하여 유한요소법⁽²⁾과 같은 수치해석 방법이나 실험적인 방법을 이용한다. 여기서 이론적인 해석 방법은 적용 대상이 단순한 형상을 가진 구조물로 국한되어 있는 하나 이와 같은 기초적인 연구는 복잡한 형상에 대한 예측과 통찰력을 증가시켜주는 등 많은

* 한국과학기술원 (KAIST) 기계공학과 대학원

** 한국과학기술원 (KAIST) 기계공학과

장점이 존재한다.

본 연구에서는 이론적인 해석방법의 하나로서 고유모드의 조합으로 해를 표현하는 방법인 모드 모델⁽¹⁾ 방법 (modal model method) 에 대해서 고찰하고자 한다. 이 방법은 고유모드의 대표적인 특성인 직교성 (orthogonality)⁽⁴⁾ 을 이용하여 해를 표현하는 방법으로서 많이 적용되어지고 있는 방법이다. 우선 여러가지 구조물에 대한 모델링의 지배방정식에 대해서 복습하고 이에 따른 해석방법과 결과의 차이점 및 공통점에 대해서 고찰하고 있으며 보다 일반적인 경우에 해당되는 연성계의 경우에 구조물의 모델링 차이에 따른 결과의 차이점을 살펴보고 있다.

2. 구조물의 지배방정식⁽⁵⁾

구조물의 모델로는 일차원의 경우 현 (string) 과 보 (beam) 가, 이차원의 경우 박막 (membrane) 과 평판 (plate) 이 많이 사용되어진다. 모드 모델 방법을 적용하기 위한 고유모드와 고유진동수를 이론적으로 구하기 위해서는 지배방정식과 경계조건을 필요로 하는데 본 장에서는 각 계에서 지배방정식을 비교하여 그들간의 차이점에 대하여 복습하고자 한다.

2.1. 일차원 구조물: 현과 보

구조물이 주파수 ω 로 조화 (harmonic) 가진이 되고 있으며 거동을 시간 t 에 대하여 $e^{j\omega t}$ 로 표현하는 경우 현과 보의 지배방정식은 각각

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)w(x) = -\frac{1}{T}f(x) \quad (1)$$

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - \kappa^4\right)w(x) = \frac{1}{EI}f(x) \quad (2)$$

와 같이 표현된다. 여기서 k 및 κ 는

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{T/\rho_l}} \quad (3)$$

$$\kappa = \left(\frac{\omega^2}{EI/\rho A}\right)^{1/4} \quad (4)$$

와 같이 정의되는 변수로서 물리적으로 파수 (wavenumber) 를 의미한다. 우변항의 $f(x)$ 는 단위 길이당 작용하는 힘을 나타내며 앞의 계수의 분모 값 (T 와 EI) 은 계의 강성을 나타낸다.

두 식 사이의 가장 큰 차이점은 공간상에 대한 미분의 차수로서 이로 인하여 경계조건수의 개수도 달라지고 고유함수의 형상도 달라진다. 또한 파수를 살펴보면 현의 경우는 주파수에 비례하는 반면 보는 주파수의 제곱근에 비례하며 이로 인해 고유진동수의 간격도 달라지게 된다. 즉, 현의 경우는 고유진동수가 등간격으로 존재하는 반면 보의 경우는 주파수가 증가하면서 간격이 넓게 나타난다.

2.2. 이차원 구조물: 박막과 평판

박막과 평판은 현과 보를 이차원으로 확장한 형태를 취한다. 지배방정식은 각각

$$(\nabla^2 + k^2)w(x, y) = -\frac{1}{T_l}p(x, y) \quad (5)$$

$$(\nabla^4 - \kappa^4)w(x, y) = \frac{1}{K}p(x, y) \quad (6)$$

와 같으며 여기서 k, κ, K 는

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{T_l/\rho A}} \quad (7)$$

$$\kappa = \left(\frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{Eh^2}\right)^{1/4} \quad (8)$$

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9)$$

와 같이 정의되어지는 식이다.

식 (5) 및 식 (6)은 현과 보에 대한 방정식을 이차원으로 확장한 형태를 취하고 있으며 방정식의 차수와 경계조건의 개수는 현과 보의 경우와 같다. 다만 우변항의 가진력의 형태가 단위 면적당 작용하는 힘으로 표현되며 이에 따라 강성을 나타내는 계수의 단위도 변화가 생긴다.

2.3. 일반적인 경우

요약하면 일반적인 구조물의 경우에

$$L[w(\bar{x})] = f(\bar{x}) \quad (10)$$

의 형태를 취하며 여기서 \bar{x} 는 구조물에서의 좌표값으로 일차원의 경우는 x , 이차원의 경우는 (x,y) 를 의미하며 L 은 선형미분연산자로서 모델에 따라 식 (1), (2), (5), (6) 등과 같이 공간에 대한 이차 혹은 사차 미분 형태를 취한다. 우변에 있는 가진력항은 계가 일차인 경우 단위 길이당 작용하는 외력, 이차인 경우 단위 면적당 작용하는 외력이 된다.

3. 모드 모델에 의한 해석 방법⁽¹⁾

앞장에서 설명된 지배방정식의 우변항을 0으로 둔 식, 즉

$$L[w(\bar{x})] = 0 \quad (11)$$

의 식과 주어진 경계조건을 적용하면 고유모드 $\psi_n(x)$ 와 고유치 k_n 또는 κ_n 을 구할 수 있다. 이렇게 얻어진 고유모드를 가지고

$$w(\bar{x}) = \sum_n W_n \psi_n(\bar{x}) \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} \{\psi_n(\bar{x})\} d\bar{x} \quad (13)$$

와 같이 구조물의 거동을 고유모드의 조합으로 표현가능하다. 여기서 Ω 는 구조물이 차지하는 공간상의 영역을 나타낸다.

3.1. 그린 함수

그린함수 $g(\bar{x})$ 는 가진함수가

$$L[g(\bar{x})] = \delta(\bar{x} - \bar{x}_s) \quad (14)$$

와 같이 디랙델타 (direct delta) 의 형태를 취할 때의 해로서

$$g(\bar{x}) = \sum_n G_n \psi_n(\bar{x}) = \sum_n G'_n \psi_n(\bar{x}_s) \psi_n(\bar{x}) \quad (15)$$

와 같이 고유모드의 조합으로 표현하여 식 (14)에 대입한 후 정리하면 G_n (또는 G'_n) 을 구할 수 있

Table 1 Linear operator $L[w(\bar{x})]$ and modal coefficients of green functions G'_n for the structural models

	$L[w(\bar{x})]$	G'_n
string	$-T \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) w(x)$	$-\frac{1}{T} \frac{1}{(-k_n^2 + k^2)}$
beam	$EI \left(\frac{d^4}{dx^4} - \kappa^4 \right) w(x)$	$\frac{1}{EI} \frac{1}{(\kappa_n^4 - \kappa^4)}$
membrane	$-T_s (\nabla^2 + k^2) w(x,y)$	$-\frac{1}{T_s} \frac{1}{(-k_n^2 + k^2)}$
plate	$K (\nabla^4 - \kappa^4) w(x,y)$	$\frac{1}{K} \frac{1}{(\kappa_n^4 - \kappa^4)}$

다. Table 1은 각 모델에 대한 지배방정식의 선형미분 연산자 L 과 모드계수 G'_n 을 나타낸다.

3.2. 임의 가진력에 대한 해

그린함수를 이미 알고 있는 경우는 이를 이용하여 임의의 가진력에 대한 해를 이차원 모델과 이차원 모델의 경우 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(\bar{x}) = \int_{\Omega} g(\bar{x})f(\bar{x})d\bar{x} \quad (16)$$

해를 구하는 또 다른 방법은 변위를

$$w(x) = \sum_n W_n \psi_n(x) \quad (17)$$

와 같이 고유모드의 조합으로 표현하는 방법으로 써 이를 지배방정식에 대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$W_n = G'_n F_n \quad (18)$$

$$F_n = \int_{\Omega} f(\bar{x})\psi_n(\bar{x})d\bar{x} \quad (19)$$

여기서 식 (18)은 고유함수의 직교성에 의해 식 (16)으로부터도 유도가 가능함을 알 수 있다. 이를 식 (17)에 대입함으로써 해를 구할 수 있다.

4. 연성계의 적용예

본 장에서는 일반적인 경우의 예로서 Fig. 1과 같은 연성계의 경우에 구조물이 박막인 경우와 평판인 경우 어떠한 해석방법의 차이를 보여주는지 살펴보았다. 유도과정의 간략화를 위해 y 축 방향으로는 성질이 일정하다고 가정하여 이차원 해석을 하였다.

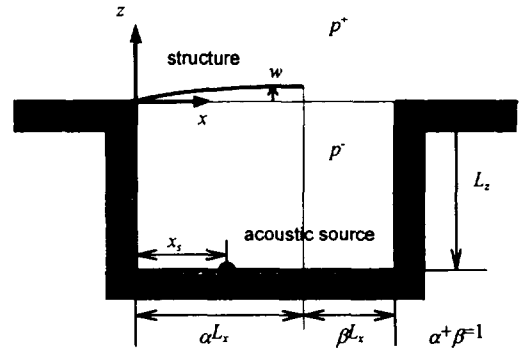


Fig. 1 Two-dimensional partially opened structural-acoustic coupling system

4.1. 구조물이 박막인 경우⁽⁶⁾

먼저 구조물이 박막으로 이루어진 경우에 대해서 살펴보면 공동 (cavity) 내외부 및 구조물의 지배방정식은

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) p^-(x, z) = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) p^+(x, z) = 0 \quad (21)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right) w(x) = -\frac{1}{T} \{ p^-(x, 0) - p^+(x, 0) \} \quad (22)$$

와 같으며 음장내부의 강체벽면의 경계조건은

$$\left. \frac{\partial p^-}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p^-}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0 \quad (23a, b)$$

$$\left. \frac{\partial p^-}{\partial z} \right|_{z=-L_z} = -jk\rho c Q \delta(x - x_i) \quad (24)$$

와 같다. 여기서 Q 는 음원의 체적속도를 나타낸다. 외부음장의 경계조건은 배플 (baffle)의 강체벽 조건에 의해서

$$\left. \frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (x < 0, x > L_x) \quad (25)$$

와 같이 얻는다. 박막의 좌우 경계조건은 각각 고정단과 자유단으로서

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\alpha L_x} = 0 \quad (26a,b)$$

와 같다. 또한 구조물과 인접하는 음장과의 변위에 대한 연속조건과 공동 입구에서의 연속조건에 의해서

$$\left. \frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho \omega^2 w \quad (0 < x < \alpha L_x) \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho \omega^2 w \quad (0 < x < \alpha L_x) \quad (28a,b)$$

$$p^-|_{z=0} = p^+|_{z=0} \quad (\alpha L_x < x < L_x) \quad (29a)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (\alpha L_x < x < L_x) \quad (29b)$$

와 같이 얻을 수 있다. 이때 공동 내부음장 및 박막의 변위를

$$p^-(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) (P_n^+ e^{-jk_m z} + P_n^- e^{jk_m z}) \quad (30)$$

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m \phi_m(x) \quad (31)$$

와 같이 고유모드의 조합으로 표현하고 지배방정식 및 경계조건을 이용하여 정리하면

$$P_n^+ = P_n^- e^{-2jk_m L_x} + \frac{k \rho c Q}{k_{zn} L_x} \psi_n(x_s) e^{-jk_m L_x} \quad (32)$$

$$\alpha T W_m (\kappa_m^2 - \kappa^2) = \sum_{n=0}^N (P_n^+ + P_n^-) \mu_{mn} + \sum_{n=0}^N \frac{k_{zn}}{k} (-P_n^+ + P_n^-) a_{mn} \quad (33)$$

$$\alpha \rho \omega^2 W_m = \sum_{n=0}^N j k_{zn} (-P_n^+ + P_n^-) \mu_{mn} \quad (34)$$

$$0 = \sum_{n=0}^N (P_n^+ + P_n^-) \nu_{mn} + \sum_{n=0}^N \frac{k_{zn}}{k} (-P_n^+ + P_n^-) b_{mn} \quad (35)$$

과 같이 유도된다. 여기서 모드간의 연성계수를 나타내는 $\mu_{mn}, \nu_{mn}, a_{mn}, b_{mn}$ 은

$$\mu_{mn} \equiv \frac{1}{L_x} \int_0^{\alpha L_x} \phi_m(x) \psi_n(x) dx \quad (36)$$

$$\nu_{mn} \equiv \frac{1}{L_x} \int_{\alpha L_x}^{L_x} \phi_m(x) \psi_n(x) dx \quad (37)$$

$$a_{mn} \equiv \frac{1}{\rho c L_x} \int_0^{\alpha L_x} d\xi \int_0^{\alpha L_x} dx \left\{ \phi_m(x) \psi_n(\xi) \times \frac{k \rho c}{2} H_0^{(2)}(k|x-\xi|) \right\} \quad (38)$$

$$b_{mn} \equiv \frac{1}{\rho c L_x} \int_{\alpha L_x}^{L_x} d\xi \int_{\alpha L_x}^{L_x} dx \left\{ \phi_m(x) \psi_n(\xi) \times \frac{k \rho c}{2} H_0^{(2)}(kL_x|x-\xi|) \right\} \quad (39)$$

와 같이 고유함수로 정의되어진다. 위 식 (32)부터 (35)에서 P_n^+ 와 W_m 을 소거하면

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{mn} \end{bmatrix}}_{(M+1) \times (N+1)} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_n^- \end{Bmatrix}}_{(N+1) \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_m^\alpha \end{Bmatrix}}_{(M+1) \times 1} \quad (40)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{mn} \end{bmatrix}}_{(N-M) \times (N+1)} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_n^- \end{Bmatrix}}_{(N+1) \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_m^\beta \end{Bmatrix}}_{(N-M) \times 1} \quad (41)$$

와 같이 P_n^- 에 대한 행렬식으로 표현할 수 있으며 이를 풀면 해를 구할 수 있다.

4.2. 구조물이 평판인 경우

구조물이 평판으로 이루어진 경우에는 식 (22)

의 박막에 대한 식 대신

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - \kappa^4 \right) w(x) = \frac{1}{K} \{ p^-(x, 0) - p^+(x, 0) \} \quad (42)$$

와 같은 평판에 대한 식으로 치환되며 평판의 경계조건에 관한 식도 다른 형태로 변경된다. 그러나 나머지의 식들은 동일하여 그대로 적용이 가능하다. 구조물의 지배방정식의 변화로 인하여 식 (31) 내의 $\phi_m(x)$ 에 관한 표현식도 같이 바뀌나 식 (31)은 그대로 적용될 수 있다. 또한 모드 모델로 표현한 식을 지배방정식에 대입하여 정리하면 식 (32)-(35)와 동일하게 나오며 연성계수에 관한 식 (36)-(39)도 동일하다. 다만 식 (33) 내의 $T(\kappa_m^2 - \kappa^2)$ 가 $K(\kappa_m^4 - \kappa^4)$ 의 형태로 바뀌는 차이점이 있다. 따라서 P_n^+ 와 W_m 의 소거로부터 얻는 식도 식 (40), (41)과 동일함을 알 수 있다. 따라서 이를 풀면 구조물이 평판인 경우에 해를 구할 수 있다.

5. 결론

구조물을 해석하는데 있어서 구조물의 모델에 따라 지배방정식이 달라지게 되는 것은 주지의 사실이다. 그러나 각각의 경우에 고유모드의 성질인 직교성에는 변화가 없으며 모드 모델 방법을 이용하여 해석을 하는 경우 그 과정은 동일함을 알 수 있다. 구조물이 공동 혹은 다른 계와 연성되어 있는 경우에도 과정의 차이점은 변하지 않으며 다만 고유함수와 고유진동수의 차이로 인한 효과가 있을 뿐이다.

후기

본 연구는 한국과학기술평가원 (KISTEP)의 국가 지정연구실 사업과 교육부의 두뇌한국21 (BK21) 프로그램의 지원에 의해서 연구되었음을 밝힙니다.

참고 문헌

- (1) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Chap. 5, Macmillan Publishing Co., New York.
- (2) Burnett, D. S., 1988, *Finite Element Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- (3) Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Chap. 5, Research Studies Press Ltd., Letchworth, England.
- (4) Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd Ed., pp. 105-108, Marcel Dekker Inc., New York.
- (5) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V., 1982, *Fundamentals of Acoustics*, 3rd Ed., pp. 11, 111, 231, John Wiley & Sons, Singapore.
- (6) Kim, S.-M. and Kim, Y.-H., 2000, "Analysis of a Structural-Acoustic System: A Partially Opened Cavity Coupled with a Membrane and a Semi-Infinite Exterior Field," Submitted to J. of Sound and Vibration.