

## 회전하는 링의 비선형 진동해석

○ 김 선 경\* 이 수 일\*\* 정 진 태\*\*

### Nonlinear Vibration Analysis of Rotating Ring

S. K. Kim\* S. I. Lee\*\* J. Chung\*\*

#### **ABSTRACT**

Nonlinear Vibrations of a flexible circular ring is studied in this paper. Based upon the von Karman strain theory, the nonlinear governing equations are derived, in which the in-plane bending and extension displacements as well as the out-of-plane bending displacement are fully coupled. After discretizing the governing equations by the Galerkin approximation method, we obtain the linearized equation by using the perturbation method. The analysis results from the linearized equations show that the in-plane displacement has effects on the natural frequencies of the out-of-plane displacement.

#### 1. 서론

링(Ring)은 축대칭 구조물의 가장 간단한 모델이 될 수 있으며 셸, 디스크, 플라이휠 등 훨씬 복잡한 구조물의 기본적인 특성을 잘 표현해 줄 수 있기 때문에 많은 연구가 진행되어왔다. 따라서 이러한 원형 링의 동특성에 관한 이해는 공학분야의 많은 분야에서 매우 중요하다.

정지상태의 얇은 링이 Hoppe[1]에 의해 처음으로 연구되었으며 Rao[2]와 Kirkhope[3]는 회전관성, 전단변형등을 고려하여 고유진동수 및 고유형상을 구해내었고 Evensen[4]은 비선형성을 고려한 연구를 수행하였다. Carrier[5]와 Huang[6]등은 회전하는 링에관해 연구하였고, Natsiavas[7]는 회전하는 링의 비선형 문제에 관한 안정성분석 및 응답을 구해내었다. 지금까지의 연구들은 대부분 링의 운동을 면내에 국한시켜 생각하였고 면외변

위만을 고려한 정지상태의 링에 관해 Kirkhope[8]가 연구를 수행하였을 뿐이다. 면내변위와 면외변위가 연성된 링에 관한 비선형 문제에 관해 Maganty[9]의 연구가 있었지만 회전이 없는 정지상태의 링에 관한 연구였다.

본 논문에서는 회전하는 얇은 링에 대하여 von Karman 변형률이론으로부터 면내 및 면외 변위가 비선형으로 연성된 지배방정식을 구하였다. Galerkin 방법으로 지배방정식을 이산화하고 섭동법을 이용하여 선형화된 방정식으로부터 진동 해석을 수행하였다.

#### 2. 지배방정식 유도

기하학적 비선형성(geometric nonlinearity)을 고려한 각속도를 갖는 링에 관한 지배방정식을 얻기 위해 von Karman 변형률 이론

\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과(air2002@vibra.hanyang.ac.kr)

\*\* 정희원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

을 바탕으로 하여 Hamilton 원리를 이용하였다. 본 연구에서는 링의 면내방향(in-plane) 변위와 동시에 기하학적 비선형성을 통해 연성된 면외방향(out-of-plane) 변위를 동시에 고려하였다.

### 2.1 기본 관계식

각속도  $\Omega$  를 갖는 회전하는 링을 Fig.1 에 도시하였다. 이 링의 기하학적 형상은 반경이  $R$  이고 두께와 높이가 각각  $b, h$  를 갖는 사각 단면을 갖고있다. 링의 재질은 균일한 탄성체로 가정하며 영율(Young's modulus)  $E$ , 밀도(density)  $\rho$  를 갖는 축대칭 회전체이다. 링의 운동을 효과적으로 표현하기 위하여 원통 좌표계(cylindrical coordinates)를 사용했으며 원점은 링의 도심에 위치한다. 점  $P$  는 링의 임의의 점이 변형하기 전의 위치를 나타내고  $P'$  는 변형 후의 위치를 나타낸다.  $e_r, e_\theta, e_z$  는 링에 고정되어 함께 회전하는 좌표계이다.

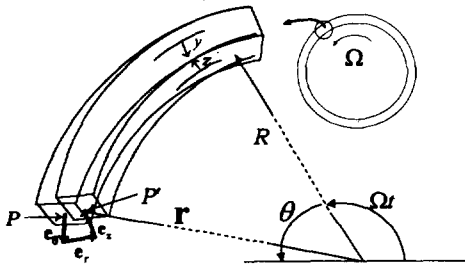


Fig. 1 Geometry of a rotating ring

반지름  $R$  에 비해 링의 두께 및 높이  $b, h$  가 매우 작으므로 링의 변위는  $\theta$  와  $t$  의 함수라고 가정하고, 평행한 부분은 변형 후에도 평행하다고 가정하면 링의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\theta, t) \\ v(\theta, t) - y\phi_1 - z\phi_2 \\ w(\theta, t) \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

여기서  $u, v, w$  는 중앙면상의 변위이며,

$$\phi_1 = \left( \frac{\partial u(\theta, t)}{r \partial \theta} + \frac{v(\theta, t)}{r} \right), \phi_2 = \frac{\partial w(\theta, t)}{r \partial \theta}. \quad (2)$$

이다.  $\phi_1$  과  $\phi_2$  는 각각 면내 방향과 면외 방향의 변형 기울기이다.

평면내 변위가 평면 외 변위에 미치는 영향을 고찰하기 위해 회전 링의 기하학적 비선형성을 고려한 von Karman 변위-변형률 관계식을 사용하였다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right)^2 \\ -\frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} \right) \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

링의 두께와 높이가 반지름에 비해 매우 작으므로  $\epsilon_r, \epsilon_{r\theta}$  는 무시할 수 있다고 가정하면 결국  $\theta$  방향의 변형률만을 고려하게 된다. 또한 식의 전개를 간단하게 하기 위하여  $y, z$  가 곱해지는 항과 그렇지 않은 항을 분리해주면 아래의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_\theta = \bar{\epsilon}_\theta - y\alpha_\theta - z\beta_\theta. \quad (4)$$

### 2.2 변형 에너지

변형에너지는 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i \epsilon_i dV. \quad (5)$$

2.1 절에서의 가정과 Hook 의 법칙을 적용한다면 링의 변형에너지는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$U = \int_V E \epsilon_\theta^2 dV. \quad (6)$$

위 식에서  $V$  는 링의 체적이다.

### 2.3 운동 에너지

운동에너지를 계산하기 위해 변형 후 링 내 각 질점의 위치벡터를 결정하고 이를 시간에 대해 전미분을 취한다.

Fig.1 에서 링이 변형된 후 임의의 점  $P'$  의 위치벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r} = (-r + U_r)\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta + U_z\mathbf{e}_z. \quad (7)$$

식 (7)을 시간  $t$  에 관해 전미분을 취하면 점  $P'$  의 속도벡터를 구할 수 있다.

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}, \quad (8)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\Psi}. \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= (\dot{u} + \boldsymbol{\Omega}u' + \boldsymbol{\Omega}v)\mathbf{e}_r \\ &+ (\dot{v} + \boldsymbol{\Omega}v' - \boldsymbol{\Omega}u + \boldsymbol{\Omega}r)\mathbf{e}_\theta + (\dot{w} + \boldsymbol{\Omega}w')\mathbf{e}_z, \\ \boldsymbol{\Psi} &= y(\dots) + z(\dots) \end{aligned}$$

링의 두께와 높이가 매우 얇다는 가정과 Euler 빔 이론을 바탕으로 하여 회전관성을 생략하면 회전하는 링의 운동에너지는 다음과 같이 근사화 되어 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dV \\ &\approx \frac{1}{2} \rho b h \int_0^{2\pi} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, r d\theta. \quad (10) \end{aligned}$$

### 2.4 지배방정식 도출

2.2 절과 2.3 절에서 구한 변형에너지와 운동에너지에 변분을 취하고 Hamilton 원리를 적용하여 지배방정식을 얻었다. Hamilton 원리는 아래와 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) \, dt = 0 \quad (11)$$

해밀턴 원리에 위에서 구한 운동에너지와 변형에너지를 적용하면 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} m\{\ddot{u} + \boldsymbol{\Omega}^2 r - \boldsymbol{\Omega}^2 u + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{v} + 2\boldsymbol{\Omega}^2 v' \\ + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{u}' + \boldsymbol{\Omega}^2 u'' + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(v + u')\} \end{aligned}$$

$$+ EA \left( \frac{u - v'}{r^2} - \frac{w'^2}{2r^3} \right) + D_B \left( \frac{v'' + u''}{r^4} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} m\{\ddot{v} - \boldsymbol{\Omega}^2 v - 2\boldsymbol{\Omega}\dot{u} - 2\boldsymbol{\Omega}^2 u' \\ + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{v}' + \boldsymbol{\Omega}^2 v'' + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(r - u + v')\} \\ + EA \left( \frac{u' - v''}{r^2} - \frac{w'w''}{r^3} \right) + D_B \left( \frac{-v'' - u''}{r^4} \right) = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\{\ddot{w} + \boldsymbol{\Omega}(2\dot{w}' + \boldsymbol{\Omega}w'') + \dot{\boldsymbol{\Omega}}w'\} + \\ EA \left( \frac{u'w' - w'v'' + uw'' - v'w''}{r^3} - \frac{3w'^2 w''}{2r^4} \right) \\ + D_N \frac{w'''}{r^4} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

### 3. 지배방정식의 이산화

회전링의 동적 거동을 분석하기 위하여 2 장에서 유도한 지배방정식에 Galerkin 근사해법을 적용하여 이산화하고 행렬-벡터 방정식으로 나타내었다.

회전링의 주기적인 특성을 고려하여 본 연구에서는 sin 과 cos 의 급수로 이루어진 근사함수를 아래와 같이 가정하였다.

$$u = C_0^u(t) + \sum_{i=2}^N C_i^u(t) \cos(i\theta) + S_i^u(t) \sin(i\theta), \quad (15)$$

$$v = \sum_{j=1}^N C_j^v(t) \cos(j\theta) + S_j^v(t) \sin(j\theta), \quad (16)$$

$$w = \sum_{k=1}^N C_k^w(t) \cos(k\theta) + S_k^w(t) \sin(k\theta). \quad (17)$$

Galerkin 방법에서 가중함수는 시도함수와 같은 함수를 사용한다. 식(15)와 식(18)에서  $i$  가 1 일 경우에는 강제운동을 하는 진동수이므로 진동모드만을 고려하기 위해 제외하였다. 식(15)-(17)을 이용하여 지배방정식에 Galerkin 방법을 적용하면 아래와 같은 행렬 벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{X}}(t) \\ + (\mathbf{K} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{M}_k + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{M}_c) \mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F}(t). \quad (18) \end{aligned}$$

여기서,

$$\mathbf{X} = \{(\mathbf{X}_u)^T, (\mathbf{X}_v)^T, (\mathbf{X}_w)^T\}^T,$$

$$\begin{aligned} X_u &= \{C_0^u, C_1^u, \dots, C_N^u, S_1^u, S_2^u, \dots, S_N^u\}^T, \\ X_v &= \{C_1^v, C_2^v, \dots, C_N^v, S_1^v, S_2^v, \dots, S_N^v\}^T, \\ X_w &= \{C_1^w, C_2^w, \dots, C_N^w, S_1^w, S_2^w, \dots, S_N^w\}^T. \end{aligned}$$

또한,  $N(X(t))$ 는 비선형 벡터를 나타낸다.

#### 4. 진동해석

진동 해석을 위해 사용된 물성치는 밀도  $\rho = 7.85 \times 10^9 N \cdot s^2 / mm^4$ , 영률  $E = 206 \times 10^9 N / mm^2$ , 링의 반지름  $r = 100 mm$ , 그리고 링 단면의 너비와 높이를 각각  $b = 2 mm, h = 2 mm$ 로 하였다.

일반적으로 Galerkin 방법에서는 비교함수의 개수가 늘어남에 따라서 해가 수렴하는 특성을 보인다. 하지만 본 연구에서는 링의 고유함수인  $\sin$  과  $\cos$  으로 이루어진 함수를 이산화에 사용하였기 때문에 함수의 수를 증가시키면 함수의 수 만큼의 상위 고유치를 얻을 수 있다.

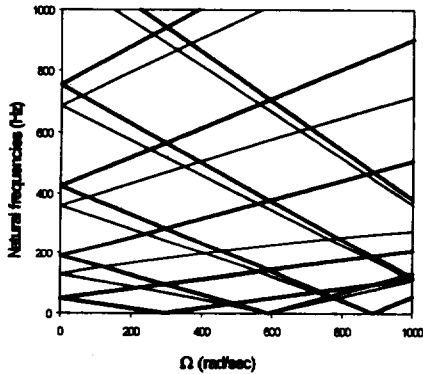


Fig. 2 Variation of the the natural frequencies for spinning speed  $\Omega$  about in-plane and out-of-plane bending (linear case)

우선 이산화된 방정식의 선형부분만을 고려하여 복소 고유치 해석을 수행하였다. 링의 회전속도에 따른 고유진동수 선도를 구하였는데 이는 Soedel[10]이 구한 인장효과를 고려하지 않은 기존 연구결과와 일치하는 것을 알 수 있다. Fig.2 에서 굵은 실선은 면외 굽힘방향의 고유진동수 선도이며

얇은 실선은 면내 굽힘방향의 고유진동수 선도이다. Fig.3 은 인장방향의 고유진동수 선도를 나타낸다. 결과를 살펴보면 면외방향의 고유진동수가 면내방향의 고유진동수에 비해 낮다는 것을 알 수 있으며 인장방향의 고유진동수는 면내 및 면외에 관한 고유진동수에 비해 매우 높다는 것을 알 수 있다. 따라서 인장효과는 면내 굽힘 및 면외 변위에 큰 영향을 미치지 않는다는 것을 보여준다.

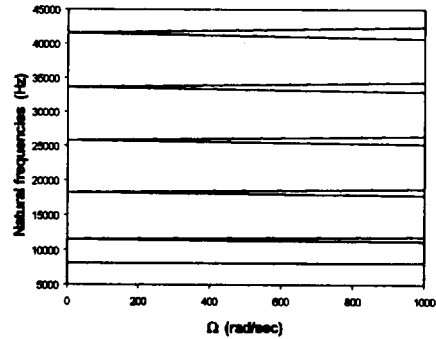


Fig. 3 Variation of the the natural frequencies for spinning speed  $\Omega$  about extension

이산화된 방정식에서 비선형성을 고려하지 않을 경우 면내변위와 면외변위가 서로 연성되어있지 않아 면내변위가 면외변위에 영향을 줄 수 없다. 따라서 비선형을 포함한 이산화 방정식으로부터 면내변위가 면외변위에 미치는 영향에 대해 알아보았다. 이를 위해 섭동법을 사용하여 평형방정식을 도출하고 평형위치에서의 고유진동수를 구하였다. 평형위치는 다음과 같은 식으로부터 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}_k) \mathbf{X}^* + \mathbf{N}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{F}(t). \quad (22)$$

구해진 평형위치 근방에서 선형화된 방정식은 다음과같이 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\Omega \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}_k + \mathbf{K}_T) \mathbf{X}(t) = 0. \quad (23)$$

여기서  $\mathbf{K}_T$  는  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$  에서 비선형항  $\mathbf{N}(\mathbf{X})$

의 접선 행렬이다.

식(23)에서 구한 고유진동수 선도를 Fig. 4에 나타내었다. 굵은 실선과 얇은 실선은 각각 면외 굽힘방향과 면내 굽힘방향의 고유진동수 선도이다. 이 결과를 앞서 구한 선형의 경우와 비교해 볼 때 우선 면외 굽힘 방향의 고유진동수가 각속도  $\Omega$ 가 증가함에 따라 선형의 경우에 비해 매우 높게 상승한다. 면내방향의 변위가 면외방향의 변위에 영향을 주어 강성을 증가시키며 속도가 증가할수록 이 영향이 매우 커진다는 것을 볼 수 있다. 따라서 링에서 면외 변위를 고려할 경우에는 면내변위가 면외변위에 미치는 영향에 대해 반드시 고려해야한다는 것을 알 수 있다.

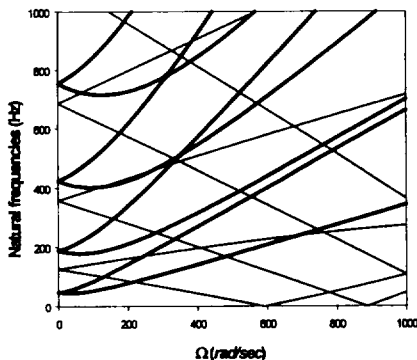


Fig. 4 Variation of the the natural frequencies for spinning speed  $\Omega$  about in-plane and out-of-plane bending (nonlinear case)

Fig.4에서 특징적인 것은 면내 굽힘에 관한 고유진동수가 선형의 경우와 같다는 것이다. 이는 면외변위가 면내변위의 고유진동수에 거의 영향을 미치지 않는다는 것을 의미한다.

### 5. 결론

본 연구에서는 면내방향 및 면외방향 이 기하학적 비선형으로 연성된 각속도를 갖는 회전하는 링에 대한 진동해석을 수행하였다. Von-Karman 변위-변형률 관계식을 사용하여 면내와 면외변위가 비선형으로 연성된 지배방정식을 구하였고 Galerkin 방법을 적용하여 구해진 지배방정식에 대한 이산화된 방정식을 얻어내었다. 복소고유치해석을 통하

여 선형방정식과 면내 및 면외변위가 연성된 비선형방정식에 관해 각속도에 따른 고유진동수 선도를 구하였다. 면내와 면외 변위가 비선형으로 연성된 경우에는 면외방향의 변위가 면내 굽힘방향의 변위에 크게 영향을 받아 각속도가 증가할수록 고유진동수가 크게 상승한다는 것을 보였다.

### 참고문헌

- (1) Hoppe, R, 1871, "The Bending Vibration of a Circular Ring," Crelle Journal of Mathematics, Vol. 73, pp.158
- (2) S.S.Rao, 1969, "In-Plane Flexural Vibration of Circular Rings," Journal of Applied Mechanics, 91, pp.620-625
- (3) J.Kirkhope, 1976, "Simple Frequency Expression for the In-plane Vibration of Thick Circular Rings," Journal of Acoustic Society, Vol. 59, No.1, pp.86-89
- (4) D.A.Evensen, 1966, "Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Circular Rings," Journal of Applied Mechanics, 33, pp.553-560
- (5) G.F.Carrier, 1945, "On the Vibration of the Rotating Ring," Quart. Appl. Math. 3, pp.235-245
- (6) S.C.Huang and W.Soedel, 1987, "Effects of Coriolis Acceleration on the Free and Forced Inplane Vibration of Rotating Rings on Elastic Foundations," Journal of Sound and Vibrations, 115, pp.253-274
- (7) S.Natsiavas, 1994, "Dynamics and Stability of Non-Linear Free Vibration of Thin Rotating Rings" Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 29, No.1, pp. 31-48
- (8) J.Kirkhope, 1976, "Out-of-Plane Vibration of Thick Circular Ring," Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 102, No. EM2
- (9) S.P.Maganty and W.B.Bickford, 1987, "Large Amplitude Oscillations of Thin Circular Rings," ASME Journal of Applied Mechanics, 54, pp.315-322
- (10) W.Soedel, 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker