

# Breathing Crack이 있는 회전하는 복합재료 보의 동적 특성에 관한 연구

김성수\* · 김지환\*\*

## Dynamic Characteristics of Rotating Composite Cantilever Beam with a Breathing Crack

Kim, Sung-Soo\* · Kim, Ji-Hwan\*\*

### ABSTRACT

It is investigated that the characteristics of rotating cantilevered composite beam with a breathing crack. In the present study, the crack is modeled as a breathing crack which opens and closes with the motion of the unidirectional graphite-fiber reinforced polyimide beam. For the finite element analysis, the cracked element is modelled by the local flexibility matrix calculated on the basis of fracture mechanics using Castiligano theorem. Rotating beam is considered only transverse bending motion so that the element includes two degrees of freedom per node such as the transverse deflection and slope. The time history and frequency response function of the beam with a breathing crack are studied by Newmark direct time integration method and FFT(Fast Fourier Transform)simulation. Effects of various parameters such as the crack depths, crack locations, ply angles, volume fraction ratios, and rotating speeds of the beam are also studied. Numerical results indicate that it is more reliable to be modelled as a breathing crack than an open crack.

### 1. 서론

크랙에 대한 연구는 구조물의 실시간 손상 탐지와 비파괴 검사의 측면에서 유용하며, 구조물의 파손을 사전에 예방할 수 있어 공학적인 면 뿐만 아니라 경제적인 면에서도 아주 중요하다. 크랙이 구조물에 존재할 경우 응력 집중이 생겨 크랙의 진전을 통한 구조물의 파손에 이어질 수 있고, 구조물의 강성을 저하시킴으로써 동적 특성 및 안정성을 변화시킨다. 따라서 구조물에 크랙이 미치는 정적·동적 특성은 여러 연구에서 중요한 주제로 다루어 진 바 있다.

즉, Waur[1]과 Dimorogonas[2]는 크랙에 대한 다양한 접근 방법을 비교, 검토하였다. 일반적으로, 크랙은 단순히 열림 효과만을 고려하는 개구형 크랙(open crack)과 열리고 닫히는 효과를 고려한 크랙(opening and closing crack or breathing crack)으로 모델링 된다. 여러 논문[1-3]에서는 주로 개구형 크랙(open crack)으로 가정하였으나 실제 구조물의 시간 응답에 관한 연구에는 닫힘 효과까지 고려한 모델이 적절한 것으로 사료되어 왔다. 예로서, 압축형의 가진력이나, 반복 하중이 작용할 때 및 회전하는 축에 크랙이 있는 경우에는 크랙의 열리고 닫힘 효과를 고려해야 하는 것으로 알려져 왔다[4-9]. 이러한 크랙은 열리고 닫히는 정도에 따라 강성 행렬이 달라지게 되어 비선형 운동 방정식이 된다.

아울러, 강성이 경량 고강도이며 큰 감쇠 특성이

\* 서울대학교 항공우주공학과 대학원

\*\* 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

로 항공기나 고속 회전 기계류에 복합 재료의 사용이 증가하고 있다. 따라서, 크랙에 의한 복합 재료 구조물의 동적 특성이 중요한 문제로 대두되었다. 이에 대한 연구 결과로서 복합 재료의 섬유각과 체적비로써 크랙의 효과를 크게 감소시킬 수 있음을 보여주고 있다[10-13]. 이러한 크랙의 동적 특성에 관한 연구에 있어서도 앞서 언급한 등방성 모델에 대한 연구에서와 같이 대부분 개구형 크랙으로 모델링 한 것이다.

본 연구에서는 크랙이 있는 복합 재료 외팔 보에 대하여 개구형 크랙으로 가정한 경우와 열리고 닫히는 크랙으로 모델링한 경우에 대하여 크랙의 위치와 깊이에 따른 동적 특성의 변화를 비교, 검토하였다. 아울러 회전 구조물에 대한 크랙의 영향을 살펴보기 위해 크랙이 있는 복합 재료 보에 있어서 회전의 효과를 살펴보았다.

## 2.이론적 배경

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 탄소 섬유 강화 복합 재료에 대하여 한 방향(unidirectional)으로 적층된 형태를 갖는 크랙이 있는 회전하는 외팔 보에 대하여 축방향 커플링과 단면의 워핑(warping) 효과는 배제하고 플랩 방향에 대하여 운동 방정식을 구하였다.

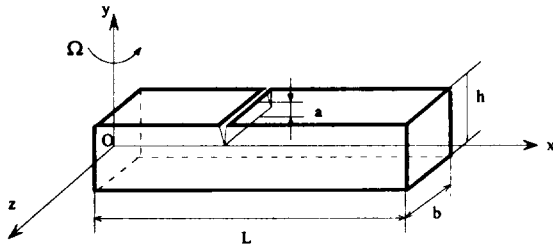


Fig.1. The configuration of rotating cantilevered beam with a crack

### 2.1 크랙의 수학적 모델링

복합 재료 보에서 크랙에 의한 추가적인 탄성 에너지는 다음과 같다[10,11].

$$U = \int_A \left( D_1 \sum_{i=1}^2 K_i^2 + D_{12} \sum_{i=1}^2 K_i \sum_{j=1}^2 K_j + D_2 \sum_{i=1}^2 K_i^2 \right) dA \quad (1)$$

여기서 A는 크랙의 단면적,  $K_I, K_{II}$  은 크랙의 모드와 관련된 응력 확대 계수(stress intensity factor), i는 절점에 작용하는 독립 하중의 수,  $D_1, D_{12}, D_2$  는 복합재료의 물성치에 관한 계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$D_1 = -0.5 \overline{b_{22}} \text{Im} \left( \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right)$$

$$D_{12} = \overline{b_{11}} \text{Im}(s_1 s_2)$$

$$D_2 = 0.5 \overline{b_{11}} \text{Im}(s_1 + s_2)$$

여기서,  $\overline{b_{ij}}$ 는 복합 재료의 유연 행렬(compliance)이며  $s_1, s_2$  는  $\overline{b_{ij}}$ 를 계수로 갖는 특성 방정식의 양의 복소근으로 정의된다[10]. 따라서 크랙에 의한 추가적인 유연 행렬(local flexibility)성분은 Castigliano 정리에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_{ij}^{cr} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} \quad (2)$$

위 식에서  $P_i, P_j$  는 요소의 절점에 작용하는 독립적인 하중이며(Fig. 2), 응력 확대계수는 아래와 같다.

$$K_I = \frac{3PI}{bh^2} \sqrt{\Pi a} F_1(\bar{a})$$

$$K_{II} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\Pi a} F_1(\bar{a}) \quad (3)$$

$$K_{IB} = \frac{P}{bh} \sqrt{\Pi a} F_2(\bar{a})$$

여기서,  $\bar{a}$  는 무차원화된 크랙의 깊이인  $a/h$ 이며  $F_1, F_2$  는 보의 크기에 대한 비대칭성과 변형에 따른 보정 계수로서 다음과 같이 표현된다.

$$F_1 = \sqrt{\tan \lambda / \lambda} [0.923 + 0.199(1 - \sin \lambda)^4 C_1(\zeta) / \cos \lambda]$$

$$F_2 = (1.122 - 0.561 \bar{a} + 0.085 \bar{a}^2 + 0.18 \bar{a}^3) / \sqrt{1 - \bar{a}}$$

그리고,

$$C_1(\zeta) = 1.0 + 0.1(\zeta - 1) - 0.016(\zeta - 1)^2 + 0.002(\zeta - 1)^3$$

$$\lambda = \frac{\Pi \bar{a}}{2}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{E_{11} E_{22}}}{2G_{12}} - \nu_{12}$$

위 식에서  $C_1(\zeta)$  는 복합 재료 물성치에 대한 보정 계수이다.

식(1),(2),(3) 을 통해 크랙에 의한 추가적인 연성행렬  $C^{cr}$  을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$C^{cr} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

여기서 각각의 성분은 다음과 같다.

$$c_{11} = \frac{18D_1 l^2 \pi}{bh^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} F_1^2 d\bar{a} + \frac{6D_{12} l \pi}{bh} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} F_1 F_2 d\bar{a}$$

$$c_{12} = \frac{36D_1 l \pi}{bh^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} F_1^2 d\bar{a} + \frac{6D_{12} \pi}{bh} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} F_1 F_2 d\bar{a}$$

$$c_{22} = \frac{72D_1 \pi}{bh^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} F_1^2 d\bar{a}$$

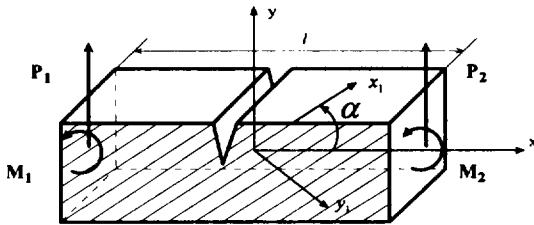


Fig. 2 Element with a crack

## 2.2 운동 방정식

횡방향 변위(transverse displacement)와 기울기를 각각  $w(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$ 라 놓으면  $x, y$  방향의 변위는 다음과 같다.

$$u_1(x, t) = -y\theta(x, t)$$

$$u_2(x, t) = w(x, t)$$

따라서 선형화된 변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_{xx} = u_1(x, t)_{,x} = -y\theta(x, t)_{,x} \quad (5)$$

$$\gamma_{xy} = u_2(x, t)_{,x} + u_1(x, t)_{,y} = w(x, t)_{,x} - \theta(x, t)$$

회전에 의한 축 방향의 원심력  $F_c$ 는 아래와 같다.

$$F_c(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (R_0 + x) dx \quad (6)$$

회전으로 인한 에너지  $U_{rot}$ 는 다음과 같다.

$$U_{rot} = \frac{1}{2} \int_0^L F_c(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \int_x^L \rho A \Omega^2 (R_0 + x) dx \right] \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

등 매개변수 형상함수 (isoparametric shape function)를 이용하여 유한 요소화하면 질량 행렬 ( $M$ ) 과 강성 행렬( $K$ )를 다음과 같이 구할 수 있다[14].

$$M = \rho \int_v N^T N dv \quad (8)$$

$$K = \int_v B^T D B dv \quad (9)$$

위 식에서  $N$ 은 변위장과 절점 변위의 관계를 나타내는 행렬,  $B$ 는 변형률과 변위의 관계를 나타내는 행렬,  $D$ 는 복합 재료의 응력-변형률(stress-strain) 관계를 나타내는 행렬이다[10-11,14].

따라서, 회전 에너지(7)에 의한 추가적인 강성 행렬을  $K_{rot}$  라고 하면, 크랙이 없을 때의 회전하는 요소의 강성 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$K_{nc}^* = K^* + K_{rot}^* \quad (10)$$

Fig. 2처럼 크랙이 있는 요소의 강성 행렬은 크랙에 의한 추가적인 유연 행렬을 구함으로써 얻을 수가 있다. 먼저 크랙이 없는 요소의 강성 행렬의 한쪽 끝을 고정 한 후 구속된 강성 행렬의 역행렬을 구하면 열과 행의 수가 절반인 유연 행렬  $C_0$ 을 구할 수 있다. 따라서 크랙이 있는 요소의 전체 유연 행렬은 다음과 같이 된다.

$$C = C_0 + C_{cr} \quad (11)$$

위 식은 한쪽 자유도가 고정된 크랙이 있는 요소의 유연 행렬이다. 두 절점 사이에 작용하는 하중의 평형 조건에 의하여 변환 행렬  $T_{tr}$  을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{P_i \ M_i \ P_{i+1} \ M_{i+1}\}^T = T_{tr} \{P_{i+1} \ M_{i+1}\} \quad (12)$$

$$\text{여기서, } T_{tr} = \begin{bmatrix} -1 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

그러므로 크랙이 있는 요소의 강성 행렬은 아래와 같다.

$$K_{cr}^* = T_{tr}^T(C)^{-1} T_{tr} \quad (13)$$

따라서 크랙이 있는 회전하는 보에 대한 운동 방정식은 전체 시스템 자유도를  $u$ 라 하면 아래와 같다.

$$M(\ddot{u}) + (K_{nc} - \nabla K(f))\{u\} = R(t) \quad (14)$$

위 식에서  $K_{nc}$ 는 크랙이 없을 때의 전역 강성 행렬이며, 이는 크랙이 닫히는 경우로서  $f(t)=0$ 이 될 때이다. 크랙이 닫힐 때의 접촉면 사이의 마찰력의 영향은 고려하지 않았기 때문에 크랙이 없는 상태 (intact state)의 강성 행렬과 같다고 가정하였다 [7]. 또한 크랙이 열리면  $f(t)=1$ 이 되어 강성 저하가 발생하고 전체 강성 행렬은 다음과 같이 된다.

$$K_{cr} = K_{nc} - \nabla K \quad (15)$$

이때 크랙의 열리고 닫힘은 크랙이 있는 요소의 slope의 부호로 판별할 수 있다. 즉,  $i$ 번째 요소에 크랙이 있다고 하면  $\theta_{i+1} - \theta_i > 0$ 이 되면 크랙은 닫히게 되고  $\theta_{i+1} - \theta_i < 0$ 이 되면 크랙은 열리게 된다.

### 3. 수치해석 및 결과

수치해석에 쓰인 탄소 섬유 강화 복합 재료의 물성치와 보 모델에 대한 재원은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{matrix} &= 2.756 \text{ GPA}, E_{fiber} = 275.6 \text{ GPA}, \\ \nu_{matrix} &= 0.33, \nu_{fiber} = 0.2, \\ G_{matrix} &= 1.036 \text{ GPA}, G_{fiber} = 114.8 \text{ GPA}, \\ \rho_{matrix} &= 1600 \text{ kg/m}^3, \rho_{fiber} = 1900 \text{ kg/m}^3, \\ L &= 600\text{mm}, b = 50\text{mm}, h = 25\text{mm} \end{aligned}$$

위의 (14)식을 Newmark 시간 적분법을 이용하여 시간 응답을 구한다. 매 시간 스텝에서 크랙이 있는 요소의 기울기를 통해 크랙의 닫히는 순간을 조사하여 강성 행렬을 변화 시켜준다.

그리고 얻어진 시간 응답에 대하여 FFT (Fast Fourier Transform) 변환 알고리즘을 이용하여 주파수 성분을 구하였다. Fig.3을 보면 한 방향으로 된 탄소 섬유 강화 복합 재료 보에 대하여 matrix와 fiber의 체적비(vol)와 각도( $\alpha$ )에 대하여

고유 진동수의 변화 정도를 보여주고 있다. 여기서 각도가  $45^\circ$  이상이면 고유 진동수 값이 크게 작아지면서 체적비에 크게 영향을 받는다. 또한 이때 크랙에 의한 고유 진동수 저하도 작아지게 된다 [10-11]. Fig.4 에서 체적비를 0.1로 두고 크랙이 외팔 보의 중간 지점에 위치했을 때 크랙에 의한 고유 진동수 저하를 각도에 대하여 살펴보면 각도가 클수록 크랙의 영향이 감소함을 알 수 있다. 이는 크랙에 의한 연성 행렬의 값이  $D_1, D_{12}, D_2$  값에 의해 달라지는데 이 값이 섬유 각도에 따라 크게 영향을 받기 때문이다. 그러나 각도가 커질수록 고유 진동수 값 자체가 작아지므로 원하는 강성과 시스템 특성을 얻기 위해서는 체적비와 섬유 각도의 값을 최적화할 필요가 있다. Fig.5 에서는 각도를  $30^\circ$ , 체적비를 0.1로 하였을 때 크랙에 대한 1차, 2차 모드 형상을 보여주고 있다. 크랙의 깊이가 커지면 모드 형상의 값이 커지게 되어 실제 시간 응답 변위도 커지게 된다. Fig.6 에서는 크랙의 깊이를 0.4로 하였을 때, 외력  $R(t)=\sin 20t$ 에 대한 시간 응답을 나타낸다. 여기서 열리고 닫히는 크랙으로 모델링한 경우의 시간 응답을 보면 개구형 크랙 모델링의 시간 응답과 크랙이 없는 보의 시간 응답 사이에 있게 됨을 알 수 있다. Fig.7 은 FFT 스펙트럼으로 첫 번째 굽힘 모드의 고유 진동수를 보여주고 있다. 열리고 닫히는 크랙의 고유 진동수는 개구형 크랙의 고유 진동수와 크랙이 없는 보의 고유 진동수 사이 값이 되며 그 밖의 다른 하모닉(harmonic) 성분들이 나타남을 Fig.7을 통해 알 수 있다. 따라서 개구형 크랙 모델링으로 고유 진동수 저하를 측정하는 경우에는 열리고 닫힘에 현상에 의하여 크랙의 깊이를 저평가 할 수 있는 위험성이 있다는 것을 알 수 있다. 일반적으로 회전은 원심력의 영향으로 인하여 강성 증대 효과가 있다. 따라서 회전의 속도가 증가함에 따라 크랙의 닫힘 효과가 커져서 크랙에 의한 강성 저하가 작아지게 된다. Fig. 8은 회전 속도에 대한 고유 진동수 저하가 회전에 따라 1차 모드에서 크게 감소됨을 알 수 있다. 또한 Fig. 9에서 처럼 회전의 효과는 크랙에 의한 변위의 크기를 감소시켜 준다. 여기에서 회전이 있을 때가 없을 때 보다 그리고, 열리고 닫히는 크랙일 경우 단순한 개구형 크랙일 경우보다 변위가 작은 값을 갖게 됨을 알

수 있다. 또한 주파수 스펙트럼의 형태는 회전의 강성 증대 효과로 고유 진동수 값이 증가하게 되지만 Fig. 7과 비슷한 형태의 분포를 갖게 된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 복합 재료 보에 대하여 개구형 크랙과 열리고 닫히는 크랙에 의한 고유 진동수 저하 특성을 비교 분석하였다. 그 결과로서, 섬유각도(ply angle)와 체적비에 따라 고유 진동수 값과 크랙의 효과가 변하므로 섬유 각도와 체적비를 선택함에 있어 최적화 과정이 필요함을 알 수 있었다. 또한 단순한 개구형 크랙 모델링에 의한 고유 진동수 감소는 열리고 닫히는 크랙 모델링에 비해 크랙의 깊이를 저 평가할 가능성이 있으므로 정확한 해석을 위해서는 열리고 닫히는 크랙의 모델링이 필요함을 알 수 있다. 회전에 의한 원심력의 영향은 크랙의 닫힘 효과를 크게 하여 크랙에 의한 변위의 크기를 작게 함을 알 수 있었다.

#### 5. 참고 문헌

1. J.Wauer 1991 *Applied Mechanics Reviews* 17, 1-7. Dynamics of cracked rotors: a literature survey
2. A.D Dimarogonas 1996 *Engineering Fracture Mechanics* 55(5), 831-857. Vibration of cracked structures: A state of the art view
3. C. A. Papadopoulos and A. D. Dimarogonas 1987 *Journal of Sound and Vibration* 117(1), 81-93. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack.
4. G. L. Qian, S. N. Gu and J. S. Jiang 1990 *Journal of Sound and Vibration* 138(2), 233-243. The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack
5. M.H.H. Shen and Y.C. Chu 1992 *Computers & Structures* 45(1), 79-93. Vibrations of beams with a fatigue crack
6. O. N. L Abraham and J. A. Brandon 1995 *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 117, 370-377. The modelling of the opening and

closure of a crack

7. R. Ruotolo, C. Surace, P. Crespo and D. Storer. 1996 *Computers & Structures* 61(6), 79-93. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack.
8. M. Chati, R. Rand and S. Mukherjee 1997 *Journal of Sound and Vibration* 207(2), 249-270. Modal analysis of a cracked beam
9. S. M. Cheng, X. J. Wu and W. Wallace 1999 *Journal of Sound and Vibration* 255(1), 201-208. Vibrational response of a beam with a breathing crack
10. M. Krawczuk 1994 *Computers & Structures* 52, 3551-561. A new finite element for the static and dynamic analysis of cracked composite beams.
11. M. Krawczuk and W. M. Ostachowicz 1995 *Journal of Sound and Vibration* 183(1), 69-89. Modelling and Vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack.
12. S. M. Ghoneam 1995 *Computers & Structures* 32, 3-11. Dynamic analysis of open cracked laminated composite beams
13. A. Abd El-Hamid Hamada 1997 *Composite Structures* 38(1), 45-55. An investigation into the eigen-nature of cracked composite beams
14. Bathe, K.J., "Finite Element Procedure", Prentice Hall, 1996.

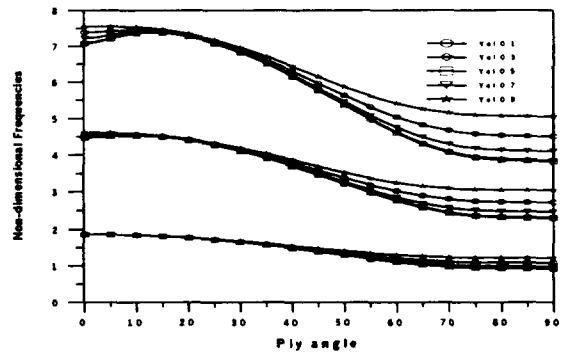
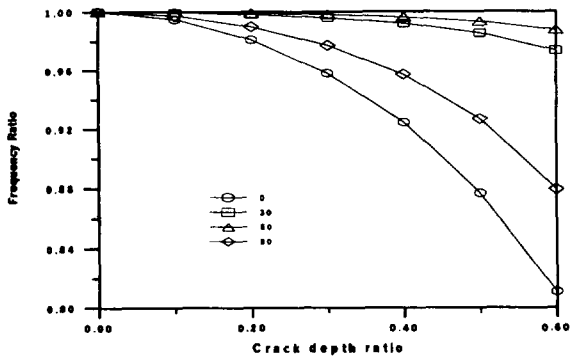
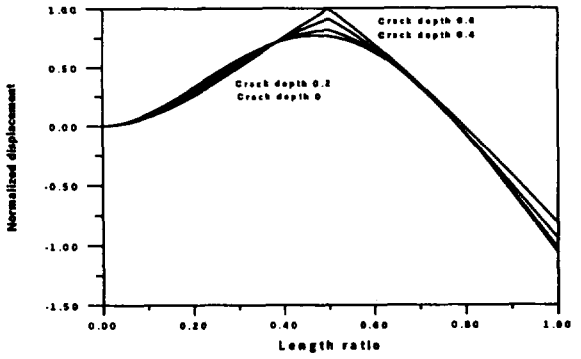


Fig.3. Frequency variations as the ply angles and volume fraction ratios

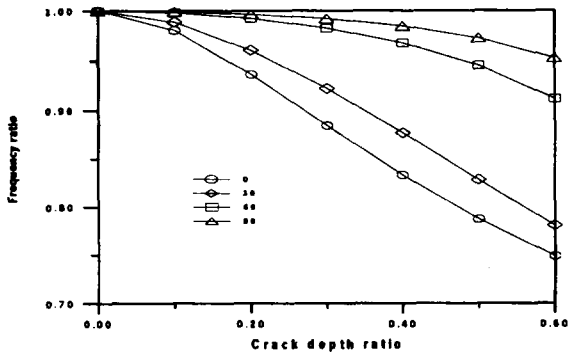


(a) First mode



(b) Second mode shape

Fig.5. Mode shapes as crack depth ( $\alpha=30^\circ$ , vol=0.1, crack at the mid)



(b) Second mode

Fig.4. Frequency reduction ratio as the ply angle  $\alpha$

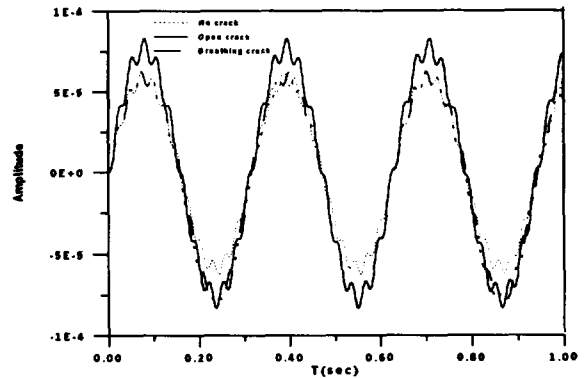
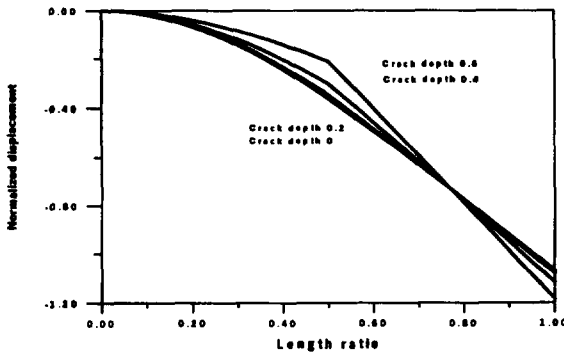


Fig.6. Time history of cracked beam ( $\alpha=30^\circ$ , vol=0.1, crack depth=0.4 at the mid)



(a) First mode shape

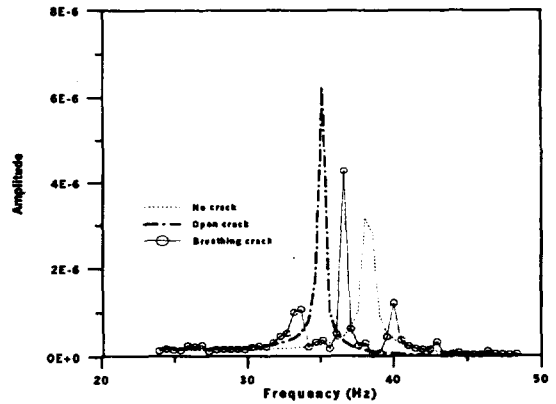


Fig.7. Spectrum for the first mode bending frequency

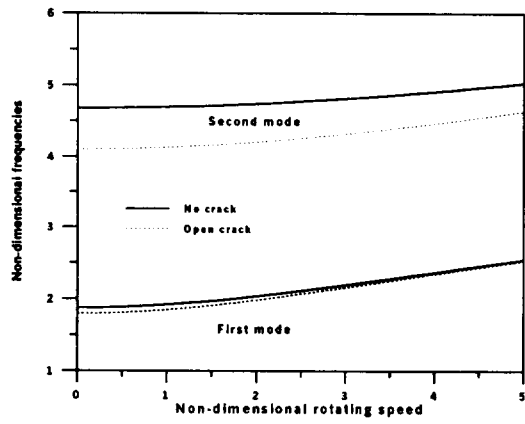


Fig.8. Frequency variations of rotating cracked beam

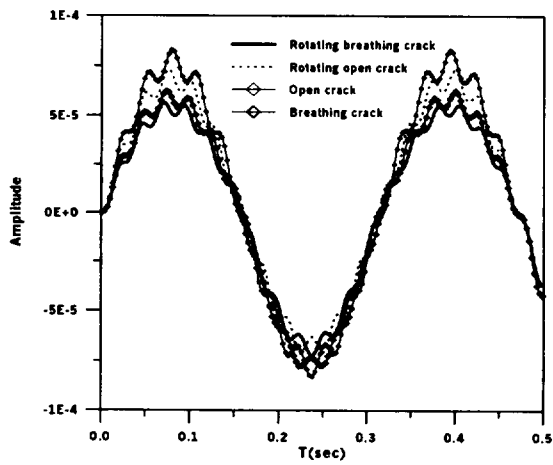


Fig.9. Time response rotating cracked beam with non-dimensional speed