

부가물을 갖는 국부 판넬의 진동해석 프로그램 개발

한성용, 권 혁

(삼성중공업(주) 조선플랜트연구소)

1. 서 언

선체, 해양구조물 등과 같은 대형 구조물을 구성하고 있는 각종 패널들은 판, 보강재로 이루어지거나 이에 pillar, 집중질량, 스프링-질량 계와 같은 부가물이 추가되는 등 여러 가지 형태가 있을 수 있으며, 그 형상도 직사각형 뿐 아니라 사다리꼴 혹은 삼각형 등으로 다양하다. 이러한 패널들이 공진으로 과도한 진동이 발생하면 불쾌감 뿐 아니라 패널 구조의 손상, 패널에 설치되어 있는 장비의 오작동 등의 문제가 발생한다. 따라서 설계단계에서 기진원과의 공진 여부를 판단할 수 있는 효율적인 방법이 필요하다.

패널의 공진회피 설계를 위한 진동해석 방법으로는 판넬의 형상 및 경계조건이 단순한 경우는 엄밀해 또는 간이식을 적용하여 쉽게 수행할 수 있다. 형상이 임의의 사각형이고 경계조건도 자유부터 고정지지까지 임의이며 구멍과 각종 부가물이 놓이는 경우는 통상 유한요소법을 적용하여야 한다. 그러나 선체와 같이 대형 구조물을 구성하고 있는 패널들의 수가 대단히 많기 때문에 모두를 유한요소법으로 수행하기는 어렵다. 따라서 상기와 같이 복잡한 패널들의 진동해석을 효율적으로 수행하기 위한 방법이 절실히 요구된다.

본 연구에서는 해석적 방법으로서 Lagrange 운동방정식을 이용하는 assumed-modes method[1]를 적용하여 상기의 복잡한 패널의 진동해석을 위한 정식화를 하고 이를 바탕으로 전산프로그램을 작성하고 진동의 비전문가인 일반 설계자들도 도면 상의 치수만 입력하여 쉽게 효율적으로 수행할 수 있도록 pre-post processor를 Windows98 환경의 GUI를 개발하였다.

개발된 정식화 및 전산프로그램의 유용성을 보이기 위해 부가물을 갖는 직사각형 보강판과 사다리꼴 보강판을 대상으로 수치계산을 수행하여 유한요소법에 의한 결과와 비교하였다.

2. 정식화

2.1 직사각형 패널

2.1.1 전체계의 운동 및 변형 에너지

Fig.1에 보인 바와 같이 판과 보강재로 이루어진 직사각형 패널에 구멍이 있고 pillar, 집중질량, 질량-스프링 계 등의 부가물이 추가된 전체계의 진동해석을 효율적으로 수행하기 위해 assumed-modes method(AMM)[1]을 적용하기 위한 정식화를 보인다.

상기와 같은 전체계의 운동에너지는 판과 보강재로 이루어진 직사각형 패널의 운동에너지에 구멍, 각 부가물의 운동에너지 기여분을 가감하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(t) = T_p(t) - T_h(t) + T_g(t) + T_c(t) + T_{sm}(t) \quad (1)$$

여기서 t 는 시간을 나타내는 변수이며, 하첨자 p, h, g, c, sm 은 각각 직사각형 패널, 구멍, 보강재, 집중질량, 질량-스프링 계의 운동에너지 기여분을 나타낸다.

구멍은 직사각형 형상이 n_{h1} 개, 타원형 형상이 n_{h2} 개 있고, 보강재는 x축 방향으로 n_x 개,

y축 방향으로 n_y 개 있으며, 집중질량과 질량-스프링 계는 각각 n_c 및 n_{sm} 개가 부가되는

경우 이들의 운동에너지 기여분은 Fig.1의 좌표계에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T_p(t) &= \frac{1}{2} \rho h_e \int_0^a \int_0^b \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy \\
 T_h(t) &= \frac{1}{2} \rho h_e \sum_{i=1}^{n_h} \int_{x_{h,i}-a_{h,i}}^{x_{h,i}+a_{h,i}} \int_{y_{h,i}-b_{h,i}}^{y_{h,i}+b_{h,i}} \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho h_e \sum_{i=1}^{n_h} \int_{x_{h,i}-a_{h,i}}^{x_{h,i}+a_{h,i}} \int_{y_{h,i}-b_{h,i}\sqrt{1-(x/a_{h,i})^2}}^{y_{h,i}+b_{h,i}\sqrt{1-(x/a_{h,i})^2}} \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy \\
 T_g(t) &= \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{n_g} \left[A_{x,i} \int_0^a \dot{w}(x, y_{g,i}, t)^2 dx + I_{px,i} \int_0^a \left(\frac{\dot{w}(x, y_{g,i}, t)}{\partial y} \right)^2 dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{n_g} \left[A_{y,i} \int_0^b \dot{w}(x_{g,i}, y, t)^2 dy + I_{py,i} \int_0^b \left(\frac{\dot{w}(x_{g,i}, y, t)}{\partial x} \right)^2 dy \right] \right] \\
 T_c(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_c} \left[M_{c,i} \left(\frac{\partial w(x_{c,i}, y_{c,i}, t)}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 T_{sm}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{sm}} \left[M_{sm,i} \left(\frac{d w(x_{sm,i}, y_{sm,i}, t)}{dt} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 ρ 와 h_e 는 패널의 질량밀도 및 유효두께이고 A_x , A_y 및 I_{px} , I_{py} 는 각각 x축 및 y축 방향 보강재의 단면적 및 단면 극관성 모멘트이며, M_c 및 M_{sm} 은 각각 집중질량 및 질량스프링 계의 질량크기이다.

또한 전체계의 변형에너지는 판과 보강재로 이루어진 직사각형 패널의 변형에너지에 구멍, 각 부가물의 변형에너지 기여분을 가감하여 다음과 같이 나타낸다.

$$V(t) = V_p(t) - V_h(t) + V_g(t) + V_b(t) + V_s(t) + V_{sm}(t) \tag{3}$$

여기서 t 는 시간을 나타내는 변수이며, 하첨자 b 는 기둥과 같은 스프링지지 요소에 대한 변형에너지 기여분을 나타내고 나머지 하첨자는 식(1)에서와 같다.

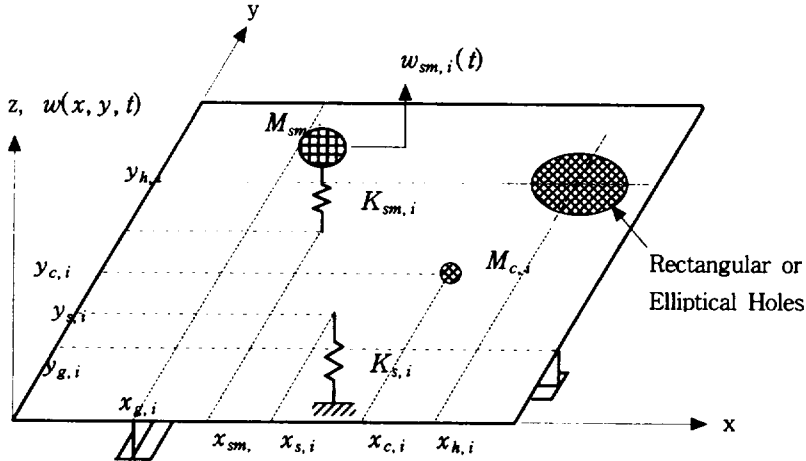


Fig.1 A rectangular stiffened plate having holes, concentrated masses, concentrated spring supports and spring-mass systems.

식(2)에서 각 구성요소의 변형에너지는 직사각형 평판을 일반성을 고려하기 위해 직교이방성 평판으로 간주하고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 V_p(t) &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2D_1 = D_x \nu_y + D_y \nu_x) \\
 V_h(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_h} \left[\int_{x_{h,i}-a_{h,i}}^{x_{h,i}+a_{h,i}} \int_{y_{h,i}-b_{h,i}}^{y_{h,i}+b_{h,i}} \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_h} \left[\int_{x_{h,i}-a_{h,i}}^{x_{h,i}+a_{h,i}} \int_{y_{h,i}-b_{h,i} \sqrt{1-(x/a_{h,i})^2}}^{y_{h,i}+b_{h,i} \sqrt{1-(x/a_{h,i})^2}} \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_g(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_g} \left[EI_{x,i} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x, y_{g,i}, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + GJ_{x,i} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w(x, y_{g,i}, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 dx \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_g} \left[EI_{y,i} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w(x_{g,i}, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 dy + GJ_{y,i} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w(x_{g,i}, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 dy \right]
 \end{aligned}$$

$$V_b(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_b} [K_{s,i} w(x_{s,i}, y_{s,i}, t)^2]$$

$$V_{sm}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{sm}} [K_{sm,i} \{w(x_{sm,i}, y_{sm,i}, t) - w_{sm,i}\}^2]$$

여기서 D_x , D_y 및 D_{xy} 는 직교이방성평판의 x축 및 y축 굽힘강성과 비틀강성, EI_x , EI_y 및 GJ_x , GJ_y 는 x축 및 y축 방향 보강재의 굽힘강성 및 비틀강성, K_s 및 K_{sm} 은 각각 집중 스프링 및 질량-스프링 계의 스프링상수이며 w_{sm} 은 질량-스프링 계의 질점의 변위를 나타내고, 나머지 기호는 식(2)에서와 동일하다.

2.1.2 진동 파형의 가정

Fig.1에서와 같은 패널의 진동파형은 구멍과 각 종 부가물이 놓여 있고 고차진동형까지 고려할 때 매우 복잡하게 나타난다. 이를 효과적으로 가정하는 방법으로는 x축 및 y축 방향으로 경계조건이 동일한 단순보의 고유함수, $X_m(x)$, $Y_n(y)$, 의 선형조합으로 가정하는 방법이 보편적으로 적용되고 있다. 즉,

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (5)$$

여기서 p , q 는 x축 및 y축 방향의 단순보 고유함수의 항수이고, $A_{mn}(t)$ 은 각 항에 대한 미지 계수이다.

경계조건으로는 Fig.2에 보인 바와 같이 횡 및 회전 방향으로 탄성지지된 것으로 간주하여 자유부터 고정지지까지 스프링 상수를 조절하여 구현할 수 있다.

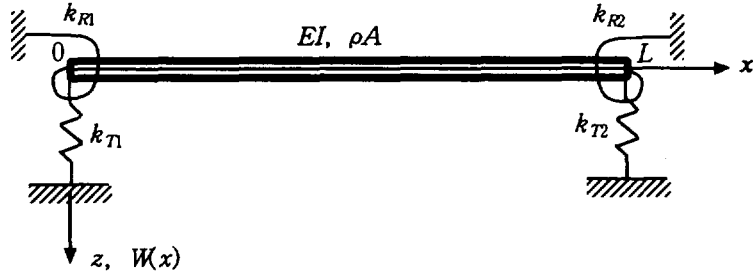


Fig. 2 Rectangular coordinate system of an uniform Euler beam restrained against translation and rotation at both ends.

2.1.3 전체계의 고유진동 방정식

Fig.1에서와 같은 전체계의 고유진동 방정식은 식(1) 및 식(3)에 식(5)를 대입하여 얻어진 전체계 에너지를 보존계에 대한 Lagrange 운동방정식

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

에 적용하여 얻을 수 있다. 여기서 $q_j(t)$ 는 일반좌표로서 식(5)와 같이 진동과형을 가정할 때 다음과 같이 취할 수 있다.

$$\{q\} = [A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1q}, A_{21}, \dots, A_{2q}, \dots, A_{p1}, \dots, A_{pq}, w_{sm,1}, \dots, w_{sm, n_m}]^T \quad (7)$$

따라서 $N(=p \times q + n_{sm})$ 자유도의 고유진동 방정식을 다음과 같이 매트릭스 형태로 구할 수 있다.

$$[M]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (8)$$

식(8)은 고유진동은 조화운동임을 고려하면 다음과 같이 고유치 문제로 나타낼 수 있다.

$$[K]\{q\} = \lambda[M]\{q\}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (9)$$

이로부터 얻어지는 고유치, λ_r ($r=1, 2, \dots, n$),로부터 전체계의 고유진동수를 구하고, 이에 해당하는 고유벡터, $\{q\}_r$ ($r=1, 2, \dots, n$),를 식(5)에 대입하면 전체계의 진동형을 구할 수 있다.

2.2 사다리꼴 패널

전체계의 운동 및 변형에너지는 직사각형 패널에 대한 식(1), (3)과 같은 개념으로 각 구성요소들의 기여분들을 합하여 나타낼 수 있다. 단, 구멍을 없는 것으로 하고 보강재는 임의의 방향에 대한 것으로 고려한다. 따라서 전체계의 운동 및 변형에너지는 다음과 같다.

$$T(t) = T_p(t) + T_g(t) + T_c(t) + T_{sm}(t) \quad (10)$$

$$V(t) = V_p(t) + V_g(t) + V_b(t) + V_s(t) + V_{sm}(t)$$

각 구성요소의 에너지 기여분에 대해서는 식(2),(4)에서와 동일하기 때문에 차이가 나는 사다리꼴 평판에 대해서만 나타내기로 한다.

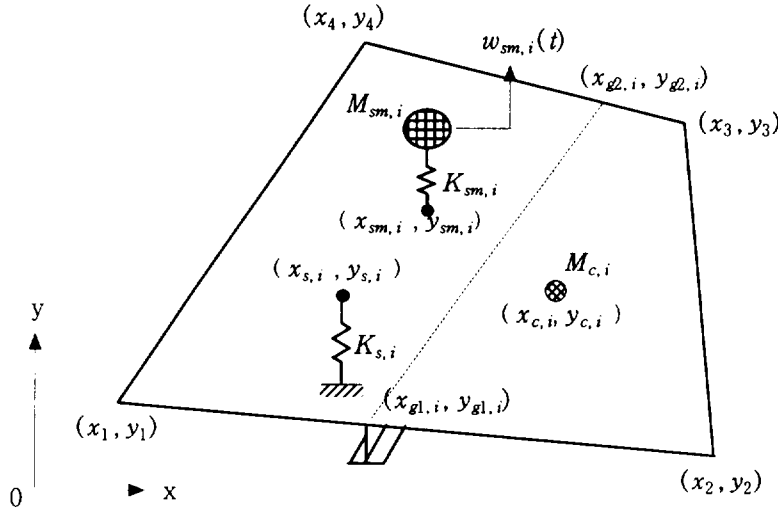


Fig.3 A trapezoidal stiffened plate having concentrated masses, concentrated spring supports and spring-mass systems.

사다리꼴 평판을 등방성 평판으로 제한하여 운동 및 변형에너지 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_p(t) = \frac{1}{2} \rho h_p \int_A \dot{w}(x, y, t)^2 dA$$

$$V_p(t) = \frac{1}{2} \int_A \left[D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{xy} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dA$$

여기서 직사각형과 차이나는 점은 에너지 적분이 사다리꼴 면적에 대해 이루어지는 점이며, D 및 D_{xy} 등방성 평판의 굽힘 및 비틀 강성이다.

식(11)의 면적 적분은 직교좌표계를 Fig.4에서 보인 바와 같은 natural coordinate system[17]으로 변환하면 보다 효율적으로 이루어질 수 있다. 두 좌표계 간의 변환 관계식과 면적 적분 변환은 다음과 같다.

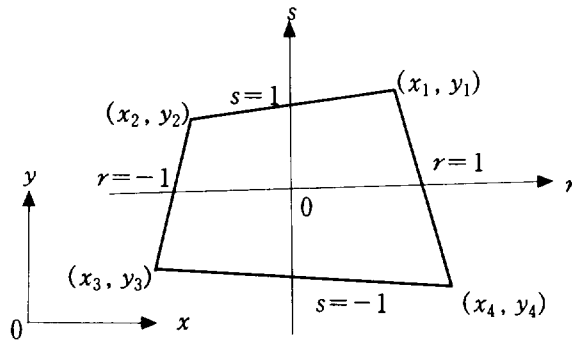


Fig.4. Natural coordinate system of a trapezoidal plate.

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) y_i \\
h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), \quad h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\
h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
\int_A f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{f}(r, s) Z dr ds \\
Z &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s}
\end{aligned} \tag{12}$$

또한 진동파형 가정도 natural coordinate system에서 다음과 같이 나타내는 것이 필요하다.

$$w(x, y, t) = w(r, s, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn}(t) R_m(r) S_n(s) \tag{4.17}$$

여기서 $R_m(r)$, $S_n(s)$ ($-1 \leq r, s \leq 1$)는 r 및 s축 방향으로 경계조건이 동일한 단순보 함수이다.

따라서 사다리꼴 형상의 패널의 고유치 문제도 2.1절에서와 유사한 과정으로 풀 수 있다.

3. 전산프로그램 개발

3.1 개요

각종 부가물 및 구멍이 있는 직사각형 및 사다리꼴 형상의 진동해석을 위해 2장에서 기술한 정식화 과정을 전산프로그램으로 개발하였다. 본 프로그램은 solver 뿐만 아니라 진동에 대한 전문지식 전문지식이 부족한 일반 설계자들도 설계도면의 치수 정도만 입력하면 해석을 수행할 수 있도록 Pre- 및 Post processor로서 windows 98 환경의 GUI도 함께 개발하였다.

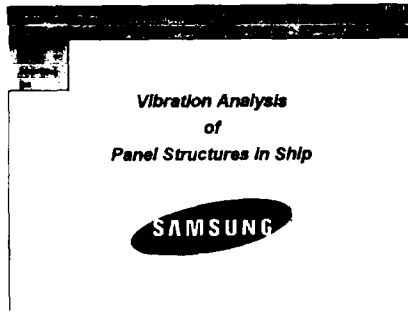
전산 프로그램 개발 언어는 solver의 경우는 Lahey Fortran 90, GUI는 Visual Basic Ver.6.0을 이용하였다.

본 프로그램으로 진동해석을 수행할 수 있는 대상 패널의 종류는 다음 표와 같다.

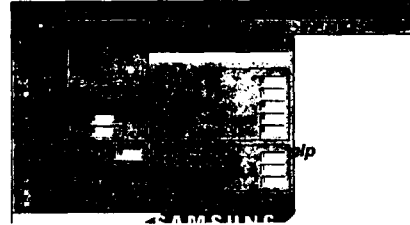
형상	평판 특성	부가 구성 요소
직사각형	등방성 평판	보강재, 구멍, 집중질량, 분포질량, 집중스프링, 질량-스프링계
	재료적 직교이방성평판	보강재, 구멍, 집중질량, 분포질량, 집중스프링, 질량-스프링계
	구조적 직교이방성평판 (등가 직교이방성평판 치환)	보강재, 구멍, 집중질량, 분포질량, 집중스프링, 질량-스프링계
사다리꼴	등방성 평판	보강재, 집중질량, 분포질량, 집중스프링, 질량-스프링계

3.2 전산프로그램 화면

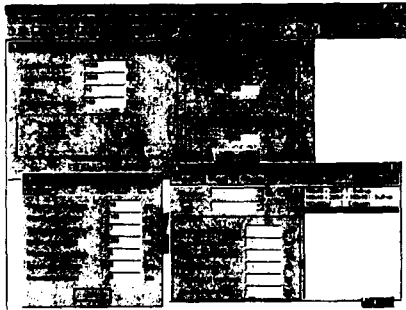
(1) 주 화면



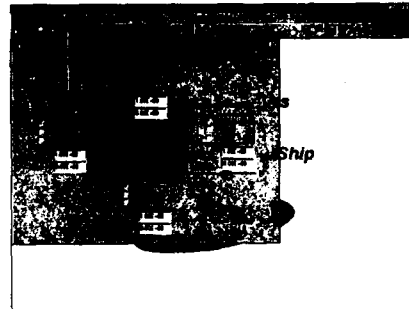
(2) 해석 패널 종류 선택



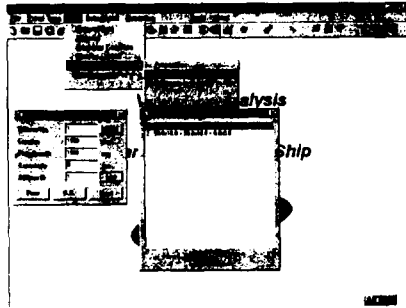
(3) 경계조건 입력 화면



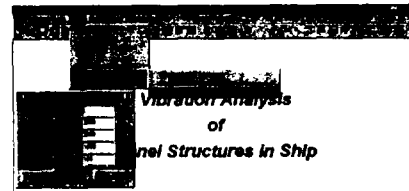
(4) 평판 자료 입력 화면



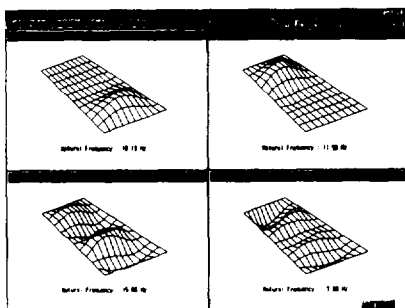
(5) 보강재 자료 입력 화면



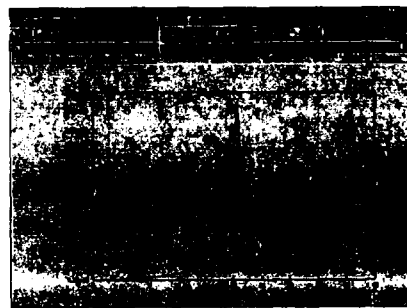
(6) 질량-스프링계 자료 입력 화면



(7) 고유진동 해석 결과 출력



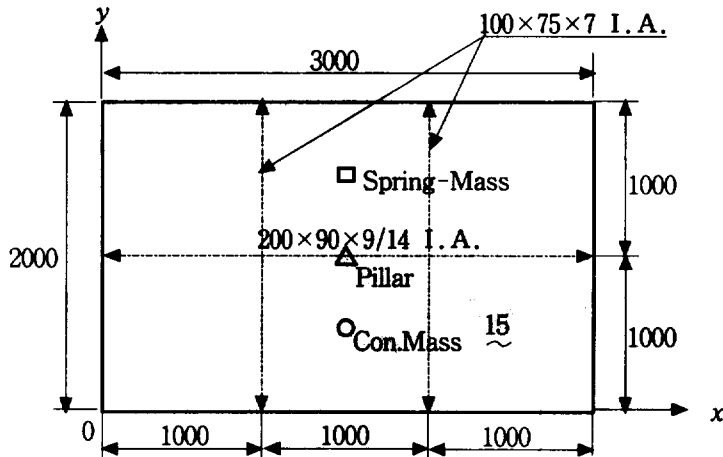
(8) 응답계산 결과



4. 수치계산

4.1 직사각형 보강판

(1) Geometry (Unit : mm)



(2) Material Properties : Mild Steel

- Young's modulus : $2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, Mass density : $7,850 \text{ kg/m}^3$

- Poisson's ratio : 0.3

(3) Sectional Properties of Stiffeners(including effective width of plate)

Size	$I (m^4)$	$J (m^4)$	$A (m^2)$	$L_p (m^4)$
200×90×9/14 I. A.	0.623E-04	0.128E-06	0.293E-02	0.208E-05
100×75×7 I. A.	0.743E-05	0.192E-07	0.118E-02	0.210E-06

(4) Data of Attachments

Item	Mass(kg)	Spring Const(kN/m)
Con. Mass	500	-
Pillar	-	100000
Spring-Mass Sys.	500	121000

(5) Boundary Conditions

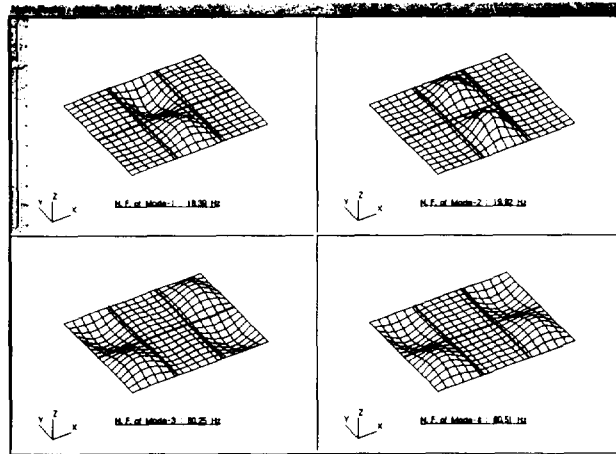
- Simply supported at four edges

(6) Calculated Results of Natural Frequencies($p \times q = 7 \times 7$; Hz)

Mode No.	1	2	3	4
AMM	18.39	19.92	80.25	80.51
FEM	18.33	19.03	82.74	82.81

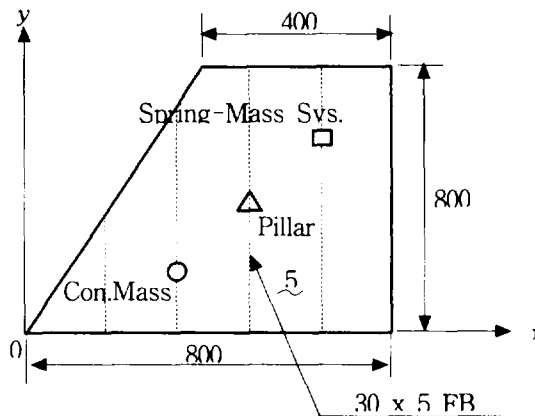
* AMM : Assumed-modes Method, FEM : Finite Element Method

(7) Calculated Results of Modeshapes



4.2 사다리꼴 보강판

(1) Geometry (Unit : mm)



(2) Material Properties : Acrylicresin

- Young's modulus : $4.606 \times 10^9 N/m^2$, Mass density : $1,190 kg/m^3$
- Poisson's ratio : 0.35

(3) Sectional Properties of Stiffeners(including effective width of plate)

Size	$I (m^4)$	$J (m^4)$	$A (m^2)$	$I_p (m^4)$
30 x 5 FB	0.508D-07	0	0.150E-03	0

(4) Data of Attachments

Item	Mass(kg)	Spring Const(kN/m)
Con. Mass	3	-
Pillar	-	200
Spring-Mass Sys.	3	230

(5) Boundary Conditions

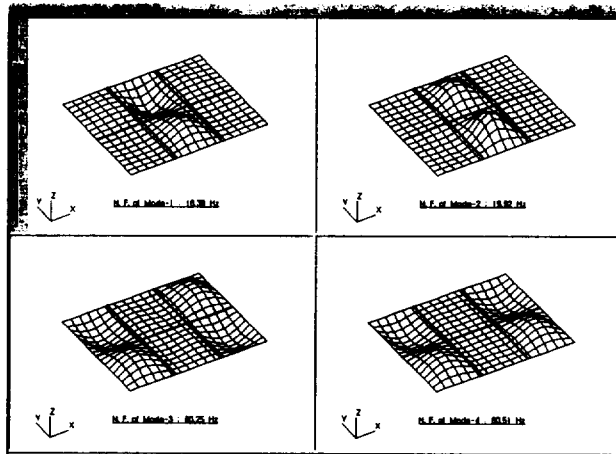
- Simply supported at all edges

(6) Calculated Results of Natural Frequencies($p \times q = 7 \times 7$; Hz)

Mode No.	1	2	3	4
AMM	24.0	34.0	88.1	129.9
FEM	23.5	32.4	88.3	129.5

*AMM : Assumed-modes Method , FEM : Finite Element Method

(7) Calculated Results of Modeshapes



5. 결 언

선체 혹은 해양구조물을 구성하고 각종 패널들은 보강재와 여러 가지 부가물을 갖고 있으며 그 형상들도 직사각형 또는 임의의 사각형으로서 매우 다양하다. 이러한 패널들의 진동 해석을 효율적으로 수행하기 위해 assumed mode method를 적용하는 정식화를 하였으며 이를 바탕으로 전산프로그램을 개발하였다. 또한 일반 설계자들도 편리하게 사용할 수 있도록 Pre-Post processor도 함께 추가하였다.

본 연구에서 개발한 정식화 및 전산프로그램의 효율성 및 정도를 확인하기 위해 유한요소 해석의 결과와 비교 검토하여 그 유용성을 입증하였다.

참고문헌

1. L. Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, The Macmillian Company, 1967.
2. D. Young, Vibration of rectangular plates by the Ritz Method, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol.72, 1950.
3. K.C. Kim, T.Y.Chung, Vibration analysis of rectangular plate, Journal of Society of Naval Architects of Korea, Vol.14, No.1, 1977(in korean).
4. P.W. Whaley, Prediction of the change in natural frequency of a cantilevered flat plate with added lumped mass, Journal of Sound and Vibration, Vol.69, No.4, 1980.

5. Y. Chen, On the vibration of beams or rods carrying a concentrated mass, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.30, 1980.
6. H.H. Pan, Some applications of symbolic functions on beam problems, *Journal of the Franklin Institute*, Vol.303., 1963.
7. H.H. Pan, Transverse vibration of an Euler-Bernoulli beam carrying a system of heavy bodies, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.32, 1965.
8. M. Gurgoze, A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.96., No.4, 1984.
9. C.L. Amba-Rao, On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.31, 1964.
10. E.B. Magrab, Vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.35, 1968.
11. A.H. Shah and S.K. Datta, Normal vibrations of a rectangular plate with attached masses, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.36, 1969.
12. P.A. Laura and G.A. Smith, Vibration of rib-stiffened thin elastic plates carrying concentrated masses, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol.43, No.2, 1968.
13. M.M. Staniscic and J.G. Payne, A rapidly converging technique for vibration analysis of plate with a discrete mass distribution, *Ingenieur-Archive*, Vol.37, No.2, 1968.
14. P.L. Verniere de Irassar, G.M. Ficcadenti and P.A. Laura, Dynamic analysis of a beam with intermediate elastic supports, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.96., No.3, 1984.
15. R.B. Bhar, Transverse vibration of rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.105., No.2, 1986.
16. S.Y. Han and K.C. Kim, Vibration analysis of a stiffened plate with attached subsystems by the receptance method, *Proc. of PRADS'89*, Vol.2, Varna Bulgaria, 1989.
17. K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1982.
18. J.I. Michimoto and A. Zubaydi, On the vibration of trapezoidal stiffened plate, *International Shipbuilding Progress*, Vol.37, No.409, 1990.