

전달함수합성법을 이용한 스티어링 시스템의 부분구조 해석

홍성규* · 김도연* · 이두호* · 김찬묵*

Substructure Analysis of Steering System using Transfer Function Synthesis Method

Sung-Kye Hong, Do-Youn Kim, Doo-Ho Lee, Chan-Mook Kim

Key Words : FRF-based substructuring method(전달함수 합성법, FBS), Singular value decomposition (특이값 분해), Steering system(스티어링 시스템).

Abstract

In this work transfer function synthesis method based on FRF data of each substructure is investigated for a complex structure composed of many substructures. Though the transfer function synthesis method has superiority to analyze the characteristics of interfaces among substructures effectively, many problems arise in the computation process, especially matrix inversion process. Due to computational problems, the error between the data obtained by test and the predictions through computations is inevitable. So in this paper, computational aspects in the transfer function synthesis method are examined through a steering system problem of passenger car. For the FBS method, frequency response functions of 3 substructures are measured experimentally. Effects of several parameters such as matrix inversion method, connection conditions between substructures and off-diagonal terms on system response are studied numerically.

기호설명

H : Frequency response function
F : Force
R : Reaction force
x : Response
K : Stiffness
U : Left unitary matrix of singular value
Decomposition
V : Right unitary matrix of singular value
Decomposition
 Λ : Singular value matrix
i : Interface coupling number
H : Hermitian transpose
+ : Moore-Penrose pseudo-inverse

1. 서론

자동차에 대한 고객의 욕구 충족이 증가되어 감에 따라 자동차의 승차감과 직결되는 소음진동은 차량개발 초기단계에서의 연구가 필연적이다. 컴퓨터의 발전과 프로그래밍 해석의 발달로 완성차 이전 단계 시 유한요소해석이 많이 사용되고는 있지만, 자동차와 같이 복잡한 구조로 이루어진 구조물에 대하여 적용이 곤란한 부분이 많다. 복잡한 구조물을 효율적으로 해석하기 위한 방법으로 소음진동실험을 기초로 하여 구조물의 동적 응답 해석 및 설계 방안의 개발이 가능하다. 최근 소음진동을 예측하기 위해 실험 데이터와 유한요소해석 결과를 사용하여 보다 정확하고 빠른 해석을 시도하고 있는데, 그 중에 한 방법이 전달 함수 합성법을 이용한 부분 구조 해석이다. 이 방법은 전체 구조물을 목적에 따라 여러 부분으로 나누고 각 부분의 주파수 응답 함수를 이용하여 전체 구조물의 응답을 예측하는 방법이다. 많은 연구자들

* 국민대학교 자동차공학 전문대학원

에 의해서 해석하기 힘든 복잡한 구조물에 전달함수 합성법의 많은 적용(7)(10)이 이루어지고 있으며 전달 함수 합성법을 토대로 차량의 민감도 해석(11)이나 오차에 관하여 고찰(12)(6)도 이루어지고 있다.

본 연구에서는 실험으로 얻어진 부분구조물의 응답특성과 결합특성으로부터 결합후의 응답특성을 예측할 수 있는 전달함수 합성법 이론을 기초로 승용차의 스티어링 시스템의 진동특성을 예측하였다. 그리고 전달 함수 합성법을 통하여 수치적으로 일어날 수 있는 오차의 원인을 살펴보고 이의 개선을 위한 방법을 검토하였다.

2. 전달함수 합성법

2.1 전달함수를 이용한 부분구조합성법

전달 함수를 이용한 부분구조 합성법은 전체 시스템의 응답을 부분 구조로의 전달 함수만을 이용하여 예측하는 것이다.

Fig.1 에서와 같이 강성 k_i 와 감쇠 c_i ($i=1\sim n+m$)로 결합한 경우를 고려한다. 여기서 F는 가진점이며, S는 응답점이다. 우선 분계 A에서 외력 F에 의해 가진이 작용할 때 부분구조 A에서의 응답은

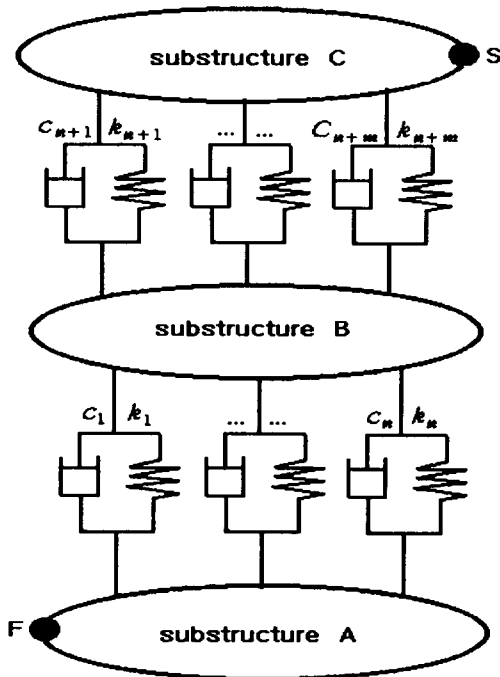


Fig. 1 FRF-based substructuring system.

$$\begin{Bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \\ \vdots \\ x_n^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1F}^A \\ H_{2F}^A \\ \vdots \\ H_{nF}^A \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} H_{11}^A & & & & & & SYM \\ & H_{21}^A & H_{22}^A & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & H_{n1}^A & \dots & \dots & H_{nn}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1^A \\ R_2^A \\ \vdots \\ R_n^A \end{Bmatrix} \quad (1)$$

이며, 분계 B의 결합점에서 응답은

$$\begin{Bmatrix} x_1^B \\ x_2^B \\ \vdots \\ x_{n+m}^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^B & & & & & & SYM \\ & H_{21}^B & H_{22}^B & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & H_{(n+m)1}^B & \dots & \dots & H_{(n+m)(n+m)}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1^B \\ R_2^B \\ \vdots \\ R_{(n+m)}^B \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이다(여기서 $m, n=1, 2, \dots$). 한편, 분계 C의 결합점에서 응답은

$$\begin{Bmatrix} x_{m+1}^C \\ x_{m+2}^C \\ \vdots \\ x_{n+m}^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{(m+1)(m+1)}^C & & & & & & SYM \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & H_{(n+m)(n+m)}^C & \dots & \dots & H_{(n+m)(n+m)}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{(m+1)}^C \\ R_{(m+2)}^C \\ \vdots \\ R_{(n+m)}^C \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이다. C에서의 최종 응답은,

$$[x_S^C] = [H_{S(m+1)}^C \ H_{S(m+2)}^C \ \dots \ H_{S(n+m)}^C] \begin{Bmatrix} R_{(m+1)}^C \\ R_{(m+2)}^C \\ \vdots \\ R_{(n+m)}^C \end{Bmatrix} \quad (4)$$

이다. C에 포함된 결합부의 반력만 알면 응답을 구하는 것이 가능하다. 또, 반력은 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\begin{Bmatrix} R_{1A} \\ \vdots \\ R_{nA} \\ R_{(n+1)C} \\ \vdots \\ R_{(n+m)C} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R_{1B} \\ R_{2B} \\ \vdots \\ R_{(n+m)B} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

그리고, 연결점이 강성 k_i 의 스프링과 댐퍼로 연결되어 있다면,

$$\{R\} = \begin{bmatrix} K_1 + j\omega C_1 & & & & 0 \\ & K_2 + j\omega C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & K_{(n+m)} + j\omega C_{(n+m)} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^A - x_1^B \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^A - x_n^B \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(n+1)}^C - x_{(n+1)}^D \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(n+m)}^C - x_{(n+m)}^D \end{bmatrix} \quad (6)$$

가 되고, 식(1), 식(2)와 식(3)을 식(6)에 대입하면 부분구조의 연결점에서의 반력은 다음과 같이 구해진다.

$$\{R\} = \left[\text{diag}(k_i + j\omega c_i) \right]^{-1} + [H]_{\text{total}}^{-1} \begin{Bmatrix} H_{1s}^A \\ \vdots \\ H_{ns}^A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} F \quad (7)$$

여기서,

$$H_{\text{total}} = \left[H_{\text{substructure A}} + H_{\text{substructure B}} + H_{\text{substructure C}} \right]$$

이 되어 두 연결점에서 구한 전달함수 행렬식의 합이 된다. 그리고 위 식 (7)에서 $k_i \rightarrow \infty, c_i \rightarrow \infty$ 의 극한치로 하면, 강결합이 된다. 그러므로

$$\{R\} = [H]_{\text{total}}^{-1} \begin{Bmatrix} H_{1s}^A \\ \vdots \\ H_{ns}^A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} F \quad (8)$$

이 된다. 식(7) 또는 (8)을 식(4)에 대입하면 최종적으로 응답점 S에서의 응답을 구할 수 있다.

2.2 역행렬의 계산

전달함수 한성분 식(7) 또는 식(8)을 계산하기 위해서는 행렬의 역변환이 필수적이다. 이 역변환 과정은 주의 기울이지 않으면 오차의 증폭으로 이어질 수 있다는 것이 알려져 있다. 위의 식(8)을 일반적인 선형 대수학 방정식의 형태로 다시 써보면 다음과 같은 식이 된다.

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (9)$$

위의 식(9)에서 [A]는 식(8)의 $[H]_{\text{total}}$ 에 해당하는 $p \times p$ 행렬이고 벡터 {B}는 위 식(8)에서 우변의 역행렬을 제외한 부분이 된다. 각 부분구조의 주파수 응답 함수에 의해 결정되어 지는 반력 {X}는 전체계의 응답의 정확도를 좌우하는 중요한 변수로 이의 계산이 대단히 중요하다.

식(9)의 선형대수 방정식은 아래에서 설명되는 가우스 소거법, LS 혹은 TSVD의 알고리즘으로 계산할 수 있다. 가우스 소거법은 수치적 방법으로 일반적인 역행렬을 구하는 방법으로 널리 쓰이고 있지만 시스템 행렬의 대각항의 값이 비대각 항의 값보다 커야 안정적으로 해를 계산할 수 있고 전달함수 합성법의 시스템 행렬과 같이 시스템 행렬의 대각항의 값이 크다는 것을 보장할 수 없는 경우에는 비 대각행렬의 적은 오차가 역행렬의 계산 과정 중 크게 증폭될 수 있다는 것이 알려져 있다 [2].

이러한 오차의 증폭과정을 줄일 수 있는 방법이 특이치 분해(singular value decomposition, SVD) 방법이다. SVD 정리에 의하면 행렬 [A]는 행렬의 랭크(rank) 수만큼의 특이치 대각행렬과 좌우의 일원행렬(unitary matrix)로 $[A] = [U][\Lambda][V]^H$ 와 같이 분해될 수 있다. 대각행렬 $[\Lambda] = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_p)$ 는 일반적으로 p 개의 특이값을 갖고 특이값의 크기는 큰 순으로 정렬되어 있다. 이와 같은 특이값 분해를 이용하여 식(9)의 시스템 행렬 [A]의 역행렬을 구할 수 있는데 이를 이용하면 식(9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{X_{LS}\} = [A]^+ \{B\} \quad (10)$$

여기서 $[A]^+$ 는 Moore-Penrose pseudo-inverse 로 $[V][\Lambda]^+[U]^H$ 와 같으며 $[\Lambda]^+$ 는 특이값 대각행렬의 역수값을 대각 값으로하는 대각 행렬이다. 식(10)에 의한 대수 방정식의 해는 미지수보다 식의 개수가 많은 경우(over-determined)에도 오차를 최소화하는 해를 구해주는 특성이 있어 최소자승(least square, LS)법이라고도 불리운다 [2].

SVD에 의한 시스템 행렬의 분해는 일반적으로 p 개의 특이값을 갖지만 이 특이값에는 주파수 응답 함수 등의 측정시 발생하는 측정오차 등이 포함되어 있다. 그러므로 이러한 노이즈에 의한 특이값을 정확히 알 수 있다면 이러한 특이값을 영

으로 놓고 시스템 방정식을 재구성하면 노이즈가 제거된 완전한 방정식의 해를 얻을 수 있다. 이러한 방법을 TSVD(truncated singular value decomposition)방법이라고 부른다. 측정에 의한 주파수 응답 함수를 사용하는 전달함수 합성법의 일반적인 경우에 노이즈의 크기는 알 수 없으므로 TSVD 방법을 적용하기 위해서는 노이즈의 크기 정도를 예측하는 알고리즘이 대단히 중요하며 다음과 같이 구별할 수 있다.

첫째는 특이값의 전체 크기에 일정부분까지의 기여부분을 제외한 특이값을 모두 0으로 놓는 방법이다. 이 방법은 간편하여 시행이 쉽다는 장점이 있지만 일정 주파수 대역에서 동특성을 제대로 표현하지 못할 위험이 있는 것으로 알려져 있다 [2].

두 번째 방법은 오차의 원인이 되는 부분구조의 전달함수 행렬을 특이값 분해한 다음 크기가 작은 순서대로 영으로 놓으면서 전체 전달함수 행렬의 특이값의 크기가 가장 크게 되는 절단(truncation)의 개수를 정하는 방법이다. 이와 같은 방법은 계산이 복잡하고 각 주파수마다 반복 계산하여야 하는 단점이 있지만 비교적 시스템의 동특성을 잘 재현할 수 있다는 장점이 있다고 알려져 있다[2].

2. 스티어링 시스템의 부분구조해석

본 연구에서는 승용차에 장착되는 스티어링 시스템의 부분구조 해석을 통하여 전달함수 합성법을 이용한 부분구조 해석시 나타나는 동특성의 변화를 살펴본다. Fig. 2는 실험에 사용된 스티어링 시스템의 부품들이며, 이것들은 각각 하나의 분계를 나타내어 분계는 지그, 스티어링 멤버, 스티어링 컬럼의 3분계로 나누었다.

Fig. 3에는 본 연구에서 사용한 실험 장치의 개략적인 구성도를 나타낸다. 스티어링 시스템 고정용 지그는 정반과 완전히 일체가 되도록 고정시켰고, 나머지 요소들은 실차에서와 같이 규정 토크의 볼트로 체결하여 전체 시스템의 응답을 측정하였다. 전달함수 합성법을 이용한 부분구조 해석을 수행하기 위해 각각의 단품들은 최대한 자유상태(free-free) 경계조건을 유지하도록 하여 주파수 응답 함수(frequency response function)를 측정하였다. 각 단품과 전 시스템 응답은 충격 해머(impact hammer) 시험을 통하여 측정하였으며, 충격해머(impact hammer) 가진 평균 5회 이상을 실시하였고, 입출력 신호의 잡음을 최소화하기 위해 기

여도 함수(coherence function)를 참조하였다.

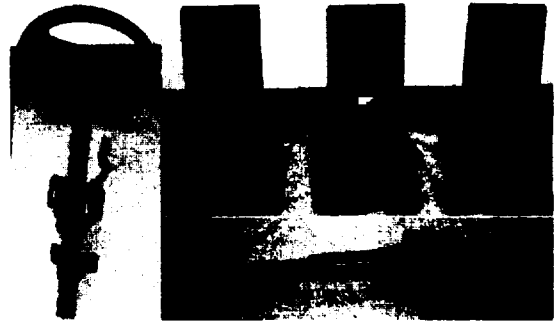


Fig. 2 Substructures of the steering system

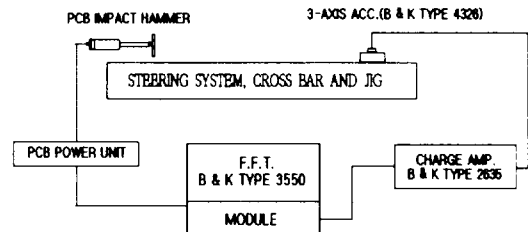


Fig. 3 Schematic diagram of test set-up

관심 주파수 대역은 스티어링 시스템의 고유진동수 분포를 고려하여 0~400Hz 까지의 영역을 선정하였다. 또한 진동 시험 시에 입력과 출력에 잡음이 필연적으로 혼입되어 주파수 응답 함수의 크기(magnitude)와 위상을 왜곡시킨다. 특히 위상의 왜곡은 복소수 연산을 하는 전달함수 합성법의 결과에 중요한 영향을 미치므로 데이터 획득 시 주의 를 기울였다.

시험으로부터 얻은 각 분계의 주파수 응답 함수를 이용하여 스티어링 시스템에 대한 부분구조 해석을 수행하였다. 먼저 각 분계를 잇고 있는 경계조건을 확인하기 위하여 각 분계를 강결합으로 가정한 경우와 결합 볼트가 규정 토크에 상당하는 탄성값을 갖고 있다고 가정한 경우를 Fig. 4에 비교하였다. 이 경우 비교를 위한 스티어링 시스템의 응답은 지그 위의 한 점을 가진 하였을 경우에 스티어링 휠에서 응답이다. 그림의 결과에서 역행렬의 방법은 통상의 가우스 소거법을 사용하였다. 0~250Hz 영역에서 시험 결과를 보면 강결합을 가정한 부분구조 해석의 결과가 전체 시스템을 조립하고 측정한 시험 결과와 일부 영역에서 차이를 보이지만 대체적으로 동특성을 보다 잘 나타내고 있는 것을 볼 수 있다. 그러므로 스티어링 시

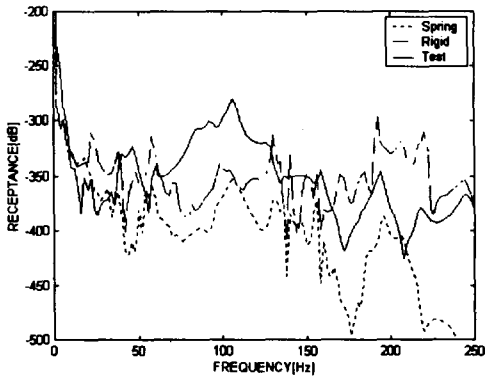


Fig. 4. Comparison of connection conditions between substructures.

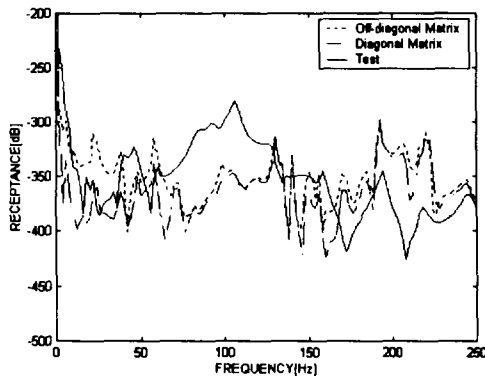


Fig. 5. Effect of off-diagonal terms of the transfer matrix in the transfer function synthesis method.

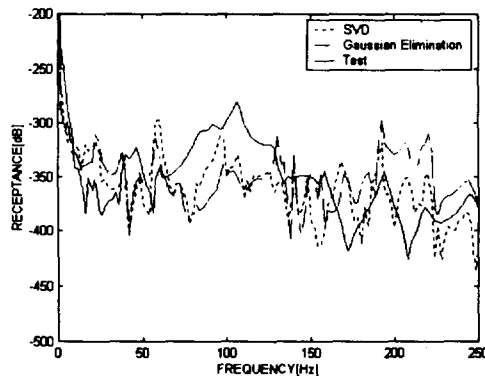


Fig. 6. Effect of inverse method for the system matrix.

시스템의 연결 조건은 탄성을 고려하기 보다는 강결합으로 보는 것이 타당하겠다. 다음으로 전달함수 행렬의 특성을 알아보기 위하여 전달함수 행렬의

역행렬 계산시 비대각 행렬의 값을 영으로 놓고 부분구조 해석을 수행한 결과를 Fig. 5 에 그렸다. 그림을 살펴보면 두 결과는 관심주파수 영역에서 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 이는 스티어링 시스템의 경우 전달함수 행렬의 비대각 행렬의 크기가 대각행렬의 크기에 비하여 현저히 작다는 것을 의미한다.

역행렬의 계산방법이 전달함수 합성법에 의한 시스템의 응답결과에 미치는 영향을 알아보기 위하여 우선 분계간의 반력 계산시 단순 가우스 소거법을 사용한 경우와 특이값 분해 정리를 이용하여 구한 경우(SVD 방법)를 Fig. 6 에 비교하였다. 그림을 보면 특이값 분해 방법이 단순 가우스 소거 방법에 의한 역행렬 방법보다 시스템의 응답을 보다 잘 표현하고 있음을 알 수 있다.

3. 결론

본 연구에서는 스티어링 시스템에 대하여 전달함수 합성법을 이용하여 부분구조 해석을 하였고, 그 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- 1) 스티어링 시스템을 분계로 나누고 각 분계의 전달함수를 토대로 전달함수 합성법을 수행한 결과 전체 구조물의 응답을 효과적으로 예측하기 위해서는 각 분계의 결합조건은 강결합 가정이 효과적임을 보였다.
- 2) 스티어링 시스템 문제의 경우 각 분계의 전달함수는 대각행렬의 값이 비대각 행렬의 값에 비하여 커서 안정적임에도 특이값 분해방법을 통한 역행렬의 계산이 전체 시스템의 응답을 보다 잘 표현할 수 있었다. 스티어링 시스템의 전달함수 합성법을 이용한 부분구조 해석시 TSVD 방법을 적용하여 보다 효율적인 해석을 수행할 수 있는 기준의 마련에 대한 연구가 필요하며 향후 과제로 준비중이다.

참고문헌

- (1) 이두호, 김명업, 2000, "설계민감도 해석을 이용한 승용차의 스티어링 휠 아이들 진동 개선", 자동차공학회논문집, 제 8 권 제 2 호, pp. 129~137, 2000.
- (2) Lim, TC, and LI, J 2000, " A Theoretical and computational Study of the FRF-Based Substructuring Technique Applying Enhanced Least Square and TSVD Approaches" , Journal of Sound & Vibration, V.231 N.4, pp.1135-1157.
- (3) 이두호, 황우석, 2000, "전달 함수를 이용한 차

- 실 소음의 부분구조 해석”, 한국소음진동공학회지, 제 10 권 제 3 호, pp. 480~485.
- (4) D. Otte, J. Leuridan, H. Grangier, and R. Aquilina 1990, “Coupling of structures using measured FRF's by means of SVD-based data reduction techniques”, Proceedings of the 8th international Modal Analysis Conference, pp213~220.
- (5) Jia Li and Teik c. Lim, 1999, “ Application of Enhanced Square to Component Synthesis Using FRF for Analyzing Dynamic Interaction of Coupled Body-Subframe System”, Society of Automotive Engineers.
- (6) 정의봉의 2 인, 1995, “전달함수합성법에 의한 차체-엔진계의 실험적 진동해석” 1995 년도 한국소음진동공학회 추계학술대회논문집, pp. 289 ~ 295.
- (7) 김석관, 김성대, 임기수, 1993, “부분구조합성법을 이용한 냉장고의 진동해석”, 한국소음진동공학회 제 3 권 제 3 호, pp 253 ~ 257.
- (8) 정우진, 이현곤, 1993, “특성행렬을 이용한 부분구조 합성법에 관한 연구”, 한국소음진동공학회지 제 3 권 제 2 호, PP. 145 ~153.
- (9) 정재훈, 지태한, 박영필, 1998, 다중전달함수합성법을 이용한 구조물의 동특성 해석”, 한국소음진동공학회지 제 8 권 제 1 호, PP. 139 ~145.
- (10) 오재용, 이정환, 임동규, 1994, “부분구조합성법을 이용한 대형구조물의 동특성 규명 및 개선에 관한 연구, 한국소음진동공학회 제 4 권.
- (11) 김도연, 김찬목, 1998, “승용차 스티어링 칼럼 시스템의 진동해석에 관한 연구”, 한국소음진동공학회지, 제 8 권 제 3 호 pp.494 ~ 503.
- (12) Toru Matsui and Kenichiro Suzuki, “An Improved Dynamic Impedance Method for Dynamic Analysis of a Vehicle”, SAE 931314.