

Difference field 개념의 경계적분방정식을 이용한 3차원 정자장 해석

박민철, 김동훈*, 박일한
성균관대학교, LG전자*

3-D Magnetostatic Field Calculation by a Boundary Integral Equation Method using a Difference Field Concept

Min-Cheol Park, Dong-Hun Kim*, and Il-Han Park
Sungkyunkwan Univ., LG Electronics Co.*

Abstract - For an accurate analysis of three dimensional linear magnetostatic problems, a new boundary integral equation formulation is presented. This formulation adopts difference magnetic field concept and uses single layer magnetic surface charge as unknown. The proposed method is capable of eliminating numerical cancellation errors insid ferromagnetic materials. In additions, computing time and storage memory are reduced by 75% in comparison with the reduced and total scalar potential formulation. Two examples are given to show its efficiency and accuracy.

을 이용한 방법에 기초를 두었다.

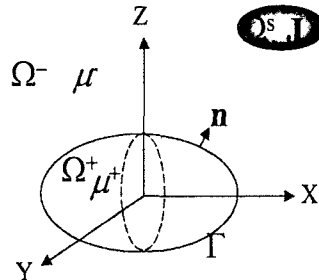


그림 1. 자성체와 비자성체의 경계

1. 서 론

3차원 정자장 문제의 해석에 있어서 자유도가 2인 두가지의 자기 스칼라 포텐셜 방법이 주로 사용되어 왔다[1]-[3]. 하나는 철의 자화에 의해 유도되는 자기필드에 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜을 사용하는 것이고, 다른 하나는 자성물질 내부는 토탈 스칼라 포텐셜을 외부는 리듀스드 스칼라 포텐셜을 사용하는 방법이다. 리듀스드 스칼라 포텐셜을 이용하여 자계의 세기를 구한 경우에는 자성체 내부에서 심각한 수치에러가 발생하고, 토탈 스칼라 포텐셜을 이용한 방법은 전류원에 있는 경우에는 해석이 힘들다.

전공간에서 총 자계의 세기 \vec{H} 는 소스에 의한 자계의 세기 \vec{H}^s 와 자성체의 자화에 의한 \vec{H}^i 의 합으로 표현할 수 있다. 자계의 세기 \vec{H}^i 는 경계 γ 에 분포한 단층 표면등가자하 σ_m 으로 정의되다.

최근에 컴퓨터 수치해석 기법으로 단층의 경계적분법이 개발되고 있다[4][5]. 이 경우에는 경계상에서 자유도가 일인 표면등가자하가 미지수로 설정되는데, 이 방법은 리듀스드 스칼라 포텐셜을 이용한 방법에 바탕을 두었기 때문에 자성체 외부를 해석하는 경우에는 자유도가 일이기 때문에 메모리와 계산시간이 훨씬 효과적이지만 자성체 내부에서는 리듀스드 자기 스칼라 포텐셜 방법과 마찬가지로 심각한 수치에러가 발생한다.

$$\vec{H} = \vec{H}^s + \vec{H}^i = \vec{H}^s - \int_{\gamma} \sigma_m \nabla G d\Gamma \quad (1)$$

여기서 G는 3차원 정자장문제에서의 그린 함수이다. 식(1)을 자속밀도의 경계조건에 적용하면 다음과 같이 경계적분법은 단층 등가표면자하 σ_m 에 관한 식으로 나타내어진다.

이러한 어려움들을 피하기 위해서, 새로운 단층 경계적분방정식법을 이 논문에서 제시하였다. 이 방법은 자계 차이 개념을(6,7) 이용하고, 미지수로서 표면등가자하를 사용하였다. 이 제시된 방법을 이용하여 자성체 내부에서 심각한 수치에러를 제거할 수 있고, 자성체 외부에서 스칼라 포텐셜의 연속성과 유일성을 보일수 있다. 그리고 리듀스드 스칼라 포텐셜과 토탈 스칼라 포텐셜 방법에 비해 계산시간과 사용 메모리를 75%정도 줄일 수 있다[7]. 해석해가 존재하는 모델과 일반적인 3차원 정자장 모델을 통하여 이 방법의 효율성과 정확성을 검증하였다.

$$\frac{1}{2} \sigma_m + \lambda \int_{\gamma} \sigma_m \nabla G \cdot \vec{n} d\Gamma = \lambda \vec{H}^s \cdot \vec{n} \quad (2)$$

$$\lambda \equiv \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$$

μ_r 은 비투자율을 의미하고, \vec{n} 은 경계에서 바깥방향으로 나가는 외향 단위 법선벡터이다.

2. 경계 적분 방정식법

2.1 기존 단층 경계적분방정식법
그림 1과 같이 소스로서 전류원이나 영구자석이 있고 자성체와 비자성체가 존재하는 경우에 기존에 사용되고 있는 단층 경계적분방정식법은 리듀스드 스칼라 포텐셜

표면 자기 자하를 이용하면 자유도가 일이기 때문에 리듀스드 스칼라 포텐셜이나 토탈 스칼라 포텐셜을 이용한 방법에 비해 계산시간이 훨씬 감소되고, 메모리가 더 적게 사용된다. 그러나 자성체 내부에서의 해석은 심각한 수치에러가 발생한다.

2.2 새로운 단층 경계적분법

기존의 방법에서 자성체 내부에서 발생하는 수치에러의 문제를 피하기 위하여, 본 논문에서는 새로운 단층 경계적분방정식법을 제시하였고 이 방법은 유한요소법

(FEM)에서 Mayergozy[6]에 의해 사용되었던 자체 세기의 차이 \vec{h} 를 사용하였으며 이는 다음과 같다.

$$\vec{h} = \vec{H} - \vec{H}^0 \quad (3)$$

여기서 \vec{H} 는 실제 자체의 세기이고, \vec{H}^0 는 자성체의 투자율을 무한대로 가정했을 경우에 얻어지는 자체의 세기이다.

이러한 접근방법으로, 먼저 자성체의 투자율 μ_r 을 무한대로 가정한 경우를 식(2)에 적용하여 자체의 세기 \vec{H}^0 을 먼저 계산한다.

$$\frac{1}{2} \sigma_m + \int_{\gamma} \vec{\sigma}_m \nabla G \cdot \vec{n} d\Gamma = \vec{H}^s \cdot \vec{n} \quad (4)$$

식(4)에서 σ_m 을 계산한 후에, 식(1)을 통해 자성체 외부의 자체 세기 \vec{H}^0 을 구한다. 이 때 자성체 내부의 자체의 세기는 0이 된다. 그 후에 고려할 것은 자체 차이 \vec{h} 를 정의하는 것으로, 식(3)에 의해 \vec{h} 는 단층의 표면자하에 관한 식으로 표현할 수 있다.

$$\vec{h} = - \int_{\gamma} \vec{\sigma}_m \nabla G d\Gamma \quad (5)$$

여기서 $\vec{\sigma}_m$ 는 자성체의 투자율이 무한대에서 유한한 값으로 변화하는 때에 자성체를 통과하는 자체와 관련이 있다. 식(5)에서 이 방법이 스칼라 포텐셜의 연속성과 유일성을 항상 만족시킴을 볼 수 있다. 자체차이 시스템의 경계조건은 자체 차이 \vec{h} 와 실제 자체 \vec{H} 와의 관계에서 유출할 수 있다.

$$\mu^+ \vec{h}^+ \cdot \vec{n} = \mu^- (\vec{h}^- + \vec{H}^0) \cdot \vec{n} \quad (6)$$

여기서 +, - 기호는 그림 1에서의 자성체 영역과 비자성체 영역을 나타낸다. \vec{h} 에 대한 단층 경계 적분법은 식(5)와 식(6)으로부터 얻어진다.

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma}_m + \lambda \int_{\gamma} \vec{\sigma}_m \nabla G \cdot \vec{n} d\Gamma = - \frac{1}{\mu_r + 1} \vec{H}^0 \cdot \vec{n} \quad (7)$$

식(4)와 식(7)을 연속적으로 계산한 다음에, 경계에 분포된 표면자하를 이용하여 자성체 외부의 자체 \vec{H}^- 와 자성체에서의 자체 \vec{H}^+ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{H}^- &= \vec{H}^s - \int_{\gamma} [\sigma_m + \vec{\sigma}_m] \nabla G d\Gamma, \\ \vec{H}^+ &= - \int_{\gamma} \vec{\sigma}_m \nabla G d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 제시된 방법은 자성체 내부에서 수치에러 없이 자체를 구할 수 있고, 스칼라 포텐셜의 연속성과 유일성을 보일 수 있고 식(4)와 식(7)에서 시스템 행렬은 거의 같기 때문에 한번만 조립하여 사용할 수 있다. 그러므로 이 방법은 기존의 경계적분방정식법에 비해 더 효율적임을 볼 수 있다.

3. 예제 해석

제시된 방법을 증명하기 위하여 두가지의 선형 정자장 문제의 예를 보인다. 영차 요소를 사용하여 식(2), 식(4), 식(7)의 경계적분방정식의 시스템 방정식을 이산

화하였다. 해석해가 있는 구의 경우 수치해와 해석해 그리고 기존의 경계적분방정식법 수치해와 비교를 하였고, 영구자석 및 전류원이 있는 일반적인 3차원 정자장 해석의 예를 보였다.

3.1 일정한 자체속에 있는 자성체 구

자체의 정확한 해가 있는 자성체구를 그림 1에 보였다. 경계는 삼각형 요소로 608개로 나누었다.

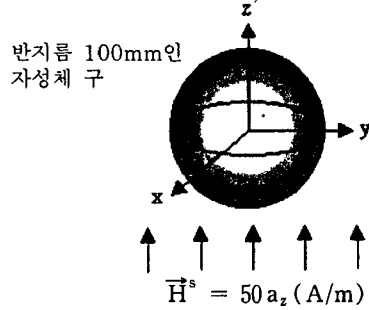


그림 2. 일정한 자체속에서의 자성체 구

여기서 비투자율은 100으로 하였을 때 해석해와 수치해의 비교를 그림 2에 보였다. 제시된 방법이 기존의 단층 경계적분법보다 보다 나은 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

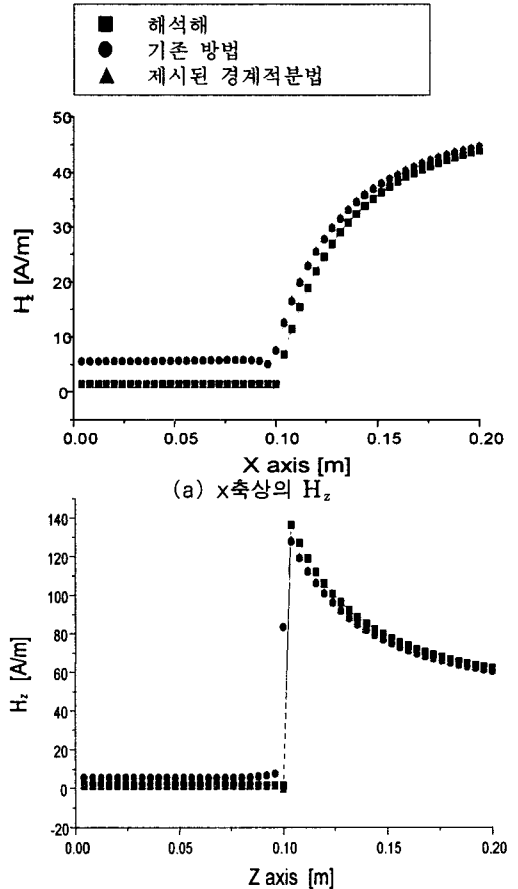


그림 3. 자성체 구에서 자체 세기의 비교

표 1은 비투자율은 100과 1000으로 간주한 경우 표면 요수를 같게 하였을 때 수치에러를 표시한 것으로, 새로 제시된 방법이 비투자율에 무관하게 보다 정확한 해를 구할 수 있음을 보여주고 있다. 제시된 방법으로 계산한 해가 정확한 값과 작은 오차가 나는 것은 표면요수의 수와 0차 요소를 사용한 것 때문으로 볼 수 있다.

표 1 해석해와의 비교

	$\mu_r = 100$	$\mu_r = 1000$
기존 경계적분법	300%	3070%
제시된 경계적분법	13%	16%

에러의 계산은 $|\vec{H}_n - \vec{H}_a| / \vec{H}_a$. \vec{H}_n, \vec{H}_a 는 자성체 구 내부에서의 수치해와 해석해이다.

3.2 전류원과 영구자석이 있는 경우 자성체 내부 해석

3차원 정자장 문제에 있어서 자계의 소스로는 전류원이 있는 경우, 영구자석이 있는 경우, 전류원과 영구자석이 함께 있는 경우 세가지가 있다. 소스가 있는 경우 자성체에서는 소스에 의한 자계에 의해 자화가 일어나 자성체에 영향을 주게 된다. 그림 3은 자기 헤드 구조와 같이 소스로서 자성체에 전류가 흐르고 영구자석이 있을 때 자성체가 있는 경우로, 자성체 내부에서의 자계 세기의 해석을 보인다.

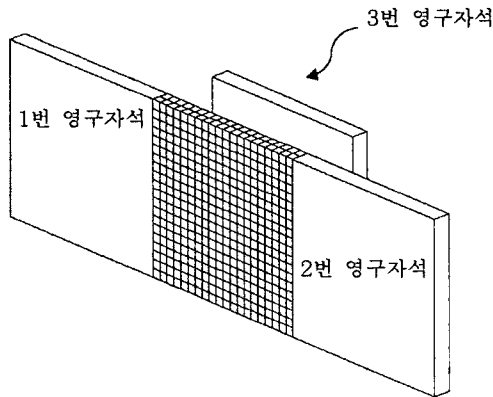


그림 4. 3차원 자장 해석 모델

영구자석의 크기는 이 사각으로 요소 분할된 자성체 좌우의 1,2번 영구자석은 $\vec{M} = -10000 a_y [A/m]$, 그리고 3번 영구자석은 $\vec{M} = 15000 a_z [A/m]$ 이고, 자성체 부분에 전류는 $-y$ 축방향으로 5A가 흐르는 경우의 문제로, 이때 자성체 내부의 자계의 세기를 구하기 위하여 자성체 표면을 사각형 요소로 960개 분할하고, 자성체 부분의 비투자율을 100으로 하였을 때, 전류와 영구자석에 의한 \vec{H}_s 와 자성체의 자화에 의한 \vec{H}' 의 합인 자성체 내부의 자계의 세기 \vec{H} 를 그림 4에 나타내었다.

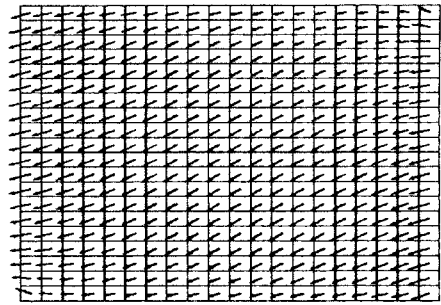


그림 5. 자성체 내부의 자계의 세기

4. 결 론

제시된 단층 경계적분방정식법은 전류 소스에 의한 자기 스칼라 포텐셜을 계산할 필요가 없고, 시스템의 크기가 리듀스드나 토달 스칼라 포텐셜을 사용한 방법에 비해 절반밖에 안되기 때문에 3차원 선형 정자장 해석에 있어서 매우 효과적이다. 위에서 해석된 두 개의 예제를 통해 자성체 내에서 정확하고 안정된 해를 제공함과 다양한 적용이 가능함을 볼 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] Dennis A. Lindholm, "Notes on boundary integral equations for three-dimensional magnetostatics", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol. 16, No. 6, pp. 1409-1413, 1980.
- [2] J. P. Peng, S. Salon and M. V. K. Chari, "A comparison of finite element and boundary element formulations for three-dimensional magnetostatic problems", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol. 20, No. 5, pp. 1950-1952, 1984.
- [3] W. M. Rucker and K. R. Richter, "Three-dimensional magnetostatic field calculation using boundary element method", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol.24, No. 1, pp. 23-26, 1988.
- [4] J. Shen, Z. Andjelic and B. Schaub, "A hybrid single and dual layer boundary integral equation formulation for 3-D eddy currents", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol.34, No. 5, pp. 2636 -2639, 1998.
- [5] B. Krstajic, et al., "Nonlinear 3D magnetostatic field calculation by the integral equation method with surface and volume magnetic charge", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol.28, No. 2, pp. 1088 -1091, 1992.
- [6] I. D. Mayergozy, et al., "A new scalar potential formulation for three-dimensional magnetostatic problems", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol. 23, No. 6, pp. 3889-3894, 1997.
- [7] D. H. Kim, I. H. Park, "Computation of three-dimensional electromagnetic field including moving media by indirect boundary integral equation method", *IEEE transaction on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, pp. 1932-1938, 1997.