영역분할법(domain decomposition)과 TLM법을 이용한 회전기의 비선형 유한 요소 해석

주현우, 임창환, 이창환, 김홍규, 정현교
서울대학교 전기공학부

A Novel Finite Element Technique for analyzing Saturated Rotating Machines Using the Domain Decomposition and TLM Method

Hyun-Woo Joo, Chang-Hwan Im, Chang-Hwan Lee, Hong-Kyu Kim, and Hyn-Kyo Jung
School of Electirc Eng. Seoul National Univ.

Abstract -For the finite element analysis of highly saturated rotating machines involving rotation of a rotor such as dynamic analysis, cogging torque analysis and etc, so much time is needed because a new system matrix equation should be solved for each iteration and time step. It is proved in this paper that, in linear systems, the computational time can be greatly reduced by using the domain decomposition method (DDM). In nonlinear systems, however, this advantage vanishes because the stiffness matrix changes at each iteration especially when using the Newton-Raphson (NR) method. The transmission line modeling (TLM) method resolves this problem because in TLM method the stiffness matrix does not change throughout the entire analysis . In this paper, a new technique for FEA of rotating machines including rotation of rotor and non-linearity is proposed. This method is applied to a test problem, and compared with the conventional method.

1. 서 론

동특성 해석과 같이 회전자의 회전을 포함하는 회전기의 유한요소해석은 각각의 시간에 대해 시스템 행렬 방정식이 변하기 때문에 많은 계산 시간이 요구된다. 선형 시스템인 경우 이러한 문제는 영역 분할법을 이용하여 계산하면 계산 시 요구되는 시간을 줄일 수 있다. 하지만 비선형 시스템의 해석 시 뉴튼-랍슨(Newton-Raphson)법을 이용하면 자성체의 비선형성에 의해 시스템 계수 행렬이 매 시간마다 변하기 때문에 영역 분할법에 의한 이점을 이용할 수 없다. 본 논문에서는 계수 행렬이 비선형 해석 시에도 변하지 않는 특성을 가진 TLM(Transmission line modeling)법을 영역 분할법에 적용하여 이러한 문제를 해결하였다[1]. 제안된 방법을 SRM에 적용하여 본 방법의 효용성과 타당성을 검증하였다.

2. 영역 분할법을 이용한 회전기 해석

2.1 해석 모델

그림 1은 영역분할법에 의한 유한 요소 해석을 위한 해석 모델을 나타낸 것으로 SRM(Switched Reluctance Motor)이다. 그림 1에서의 영역 1은 회전자, 영역 2는 고정자를 나타내며 경계(boundary)는 고정자와 회전자 사이의 공극을 나타낸다. 그림 1의 상단의 요소가 분할된 형상을 나타내며 삼각형 요소로 구성되었다.

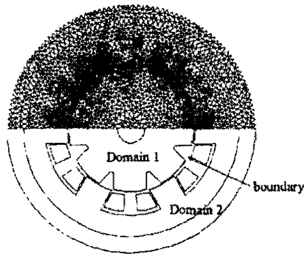

그림 1 해석 모델(SRM)

2.2 회전에 따른 시스템 계수 행렬식

그림 2는 요소를 θ만큼 회전시켰을 때 회전하기 전의 좌표((x,y))와 회전후의 좌표 ((x′,y′))에서의 시스템 계수 행렬식의 값을 비교하기 위한 것으로 회전하기 전의 좌표에서의 시스템 계수 행렬식은 다음과 같다.

$$k_{ij}=\frac{1}{4\mu_0\mu_r\Delta}(c_i c_j+d_i d_j) \tag{1}$$

$$c_i=y_j-y_k \tag{2}$$

$$d_i=x_k-x_j \tag{3}$$

(여기서 i, j, k 는 1, 2, 3의 순환계수이다)

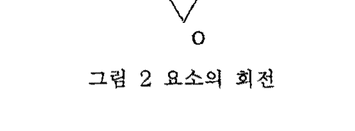

그림 2 요소의 회전

x, y를 θ만큼 회전시켰을 때 새로운 좌표를 x′, y′라고 하면

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
& c_i'\, c_j' + d_i'\, d_j' \\
&= \sin^2\theta[\,(x_j - x_k)(x_k - x_i) \\
&\qquad + (y_j - y_k)(y_k - y_i)] \\
&\quad + \cos^2\theta[\,(x_j - x_k)(x_k - x_i) \\
&\qquad + (y_j - y_k)(y_k - y_i)] \\
&= c_i\, c_j + d_i\, d_j
\end{aligned} \tag{5}
$$

가 된다.

식 (1)-(5)에서 보인 것처럼 임의의 요소를 각 θ 만큼 회전시켰을 때의 요소 계수 행렬은 회전에 관계없이 불변함을 알 수 있다.

2.3 영역분할법

그림 3 은 시스템 계수 행렬을 영역 분할법에 의해 분할한 것이며 이 분할된 행렬식을 식 (6)에 의해 나타낸 것이다 [2].

$$
\begin{bmatrix} K11 & 0 & Kb1 \\ 0 & K22 & Kb2 \\ K1b & K2b & Kbb \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Phi 1 \\ \Phi 2 \\ \Phi b \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f1 \\ f2 \\ fb \end{bmatrix}
$$

그림 3 분할된 계수 행렬식

$$
\begin{aligned}
&(\, K_{bb} - K_{b1}^T K_{11}^{-1} K_{b1} - K_{b2}^T K_{22}^{-1} K_{b2}\,)\Phi_b \\
&= f_b - K_{b1}^T K_{11}^{-1} f_{b1} - K_{b2}^T K_{22}^{-1} f_{b2} \\
&\quad \Phi_1 = K_{11}^{-1}(\, f_1 - K_{b1\Phi_b}\,) \\
&\quad \Phi_2 = K_{22}^{-1}(\, f_2 - K_{b2\Phi_b}\,)
\end{aligned} \tag{6}
$$

K_{11} : 회전자(영역 1)의 계수 행렬식값

K_{22} : 고정자(영역 2)의 계수 행렬식값

K_{bb} : 경계면의 계수 행렬식값

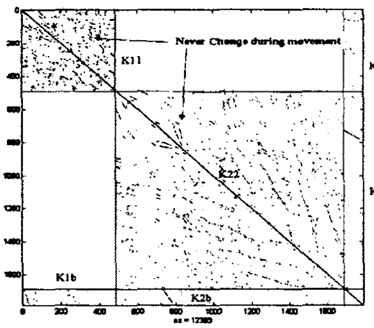

그림 4 계수 행렬식값의 분포도

회전자가 회전할 때 회전자와 고정자의 계수 행렬식의 값(K_{11}, K_{22})은 변하지 않고 경계 면에서의 계수 행렬식의 값(K_{bb}, K_{b1}, K_{b2}) 만 변한다. 그러므로 그림 4에서 K_{11} . K_{22} 의 LU에서 영이 아닌 값들을 한번만 저장하고 전진 차분, 후퇴 차분 과정(forward and backward substitution process)에 의해 회전자(영역 1)와 고정자(영역 2)에서의 해 즉 Φ_1 과 Φ_2를 구할 수 있다. 따라서 동특성 해석시 매시간 마다 경계면에서의 계수 행렬식의 값(K_{bb}, K_{b1}, K_{b2})만 계산하면 되며 그림 4에서와 같이 경계면에서의 계수 행렬식의 값은 회전자와 고정자의 계수 행렬식에 비해 값이 적으므로 계산시 요구되는 시간을 많이 줄일 수 있다.

3. TLM법의 적용

비선형 시스템의 동특성 해석 시 자성체의 비선형성에 의해 회전자와 고정자의 시스템 계수 행렬 (K_{11}, K_{22})이 매시간 변하게 된다. 즉 뉴튼-랍슨(Newton-Raphson)법을 이용하여 해석하면 영역 분할법이 가지는 이점을 이용할 수 없게 된다. 따라서 비선형 시스템의 동특성 해석 시에도 시스템 계수 행렬이 변하지 않는 특징을 가지는 TLM(transmission line modeling)법을 이용하면 영역 분할법이 가지는 이점을 비선형 해석에서도 얻을 수 있다. 또한 TLM법은 그 자체로도 부가적인 계산상의 이점을 갖는다[1][3].

4.해석 및 결과

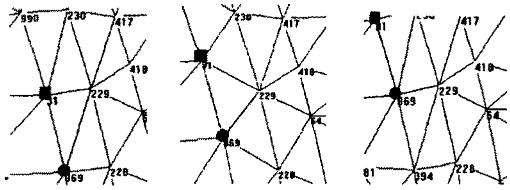

그림 5 경계면에서의 요소 해석

그림 5는 회전자가 회전할 때 회전자와 고정자 사이의 경계면에서 요소를 구성하는 절점의 변화를 나타낸 것으로 유한 요소 해석 시에 그림 5와 같은 방법으로 회전자의 회전 시 경계 면에서의 요소변화만 계산하면 된다.

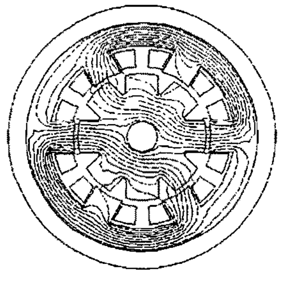

그림 6 θ = 0°

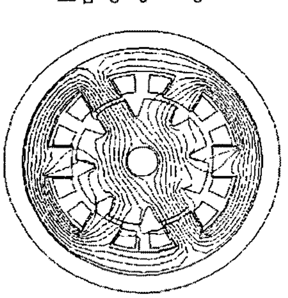

그림 7 θ = 25.2°

그림 6과 그림 7는 회전자가 회전했을 때의 자속 분포를 나타내 것으로 이는 정확히 같음을 알 수 있다. 즉 영역 분할법을 이용하여 그림 5와 같은 방법으로 경계 면에서의 요소 변화만을 매 시간 마다 계산하면 매 시간 회전자와 고정자의 계수 행렬식을 계산할 필요 없이 그림 6, 그림 7과 같이 정확히 일치하는 결과를 얻을 수 있으며 계산 속도는 영역 분할법을 이용하지 않았을 때보다 약 30배만큼 향상된다. 또한 비선형 해석시에도 뉴튼-랍슨(Newton-Raphson)법을 이용하는 것 대신 TLM(Transmission Line Modeling)을 이용하면 선형시 영역 분할법(Domain Decomposition Method)을 이용했을 때의 이점을 얻을 수 있다.

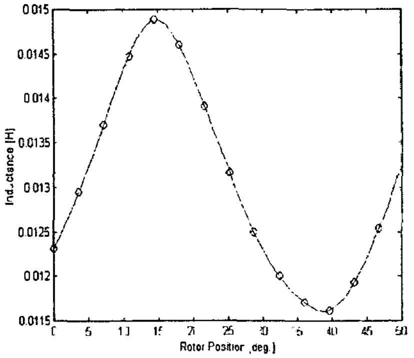

그림 8 인덕턴스의 계산

그림 8은 회전자의 회전각에 따른 인덕턴스를 계산한 것으로 입력에 따라 정현적으로 변화함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 회전자의 회전과 비선형성에 따른 효과적인 유한 요소 해석의 새로운 방법을 제시하였다. 동특성 선형 시스템의 해석 시 영역 분할법을 이용하여 계산 속도를 향상시켰으며 비선형 시스템의 경우는 TLM법을 이용하여 선형 해석 시 영역 분할법이 가지는 이점을 활용하여 선형 해석 시와 같은 이점을 얻었다.

[참 고 문 헌]

[1] J.Lobry, J.Trecat, C. Broche, "The transmission Line Modeling(TLM) method as a New Iterative Technique in Non-linear 2D Magneto-statics," IEEE trans. Magnetics, Vol.32, No.2, pp. 559-566, 1996

[2] K. Weeber, S. Rantnajeevan, H. Hoole, "The Subregion Method in Magnetic Field Analysis and Design Optimization", IEEE Transaction on magnetic, vol.28, No2 pp. 1561-1564, March,1992

[3] 임창환, 김홍규, 이창환, 정현교, "이방성과 비선형성을 고려한 삼상 변압기의 TLM-FEM해석", 대한전기학회지, Vol.488, No10, OCT, 1999