

유한요소법을 이용한 압전 세라믹의 3차원 과도해 해석

주현우, 이창환, 정현교
서울대학교 전기공학부

Three Dimensional Transient Analysis of Piezoelectric Beam Using Finite Element Method

Hyun-Woo Joo, Chang-Hwan Lee, and Hyn-Kyo Jung
School of Electric Eng. Seoul National Univ.

Abstract - The static characteristic of a piezoelectric beam is for finding resonance frequency of the beam. In practice, it is required to analyze the beam with external command circuit including capacitors, inductors, and resistors for control. It means that the proper analysis of a piezoelectric beam with external command circuit is required by a dynamic analysis. We can also get transient and steady-state solution from the analysis. In this paper, the static and dynamic characteristic of the piezoelectric beam using FEM(Finite Element Method) are proposed.

1. 서 론

형상의 자유도가 크고 소형화가 가능한 압전물질은 초음파 모터, 구동자, 변압기등 매카트로닉스 분야에서 활발히 연구되고 있다. 압전 현상의 해석은 대부분 등가회로법을 사용하는데 이는 복잡한 뿐만 아니라 전기-기계적 결합(coupling) 문제를 효과적으로 해석하기 어렵기 때문에 최근 유한 요소법에 의한 수치해석 연구가 활발히 진행되고 있다. 수치해석법은 등가회로를 고려할 필요가 없을 뿐 아니라, 시스템 외부로의 전계 유출이 작으므로 해석 영역이 작다는 이점을 가진다. 본 논문에서는 이러한 이점을 가지는 수치해석법 즉 유한 요소법을 정식화하고 이를 시험 모델에 적용하여 주파수 변화와 시간의 변화에 따른 특성을 해석하였으며 입력 전류 파형을 보였다. 또한 이를 실험 결과와 비교하였다.

2. FEM 정식화

행렬식 (1)은 압전 물질의 압전 현상 및 전계 현상을 나타내는 식으로 유한 요소 해석의 정식화 시에 기본이 되는 식이다.

$$\begin{matrix} T = c^E S - e^t E \\ D = eS + \epsilon^t E \end{matrix} \quad (1)$$

- T : 응력 벡터
- S : 변형 벡터
- E : 전계 벡터
- D : 유전 변위 벡터
- C^E : 기계 계수행렬식 (E=상수)
- e^S : 유전상수 (S=상수)
- e : 압전상수

해밀턴의 변분법을 압전 물질에 적용하면 다음과 같다 [1].

$$\delta \int L dt = 0 \quad (2)$$

$$L = E_{kin} - E_{st} + E_d + W$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int \int \int S^t T dV \quad (3)$$

$$E_{st} = \frac{1}{2} \int \int \int \rho u^2 dV \quad (4)$$

$$E_d = \frac{1}{2} \int \int \int D^t E dV \quad (5)$$

$$W = \int \int_V u^t f_B dV + \int \int_{A_f} u^t f_S dA - \int \int_{A_c} \phi_Q dA + \sum u^t F_p - \sum \phi Q_p \quad (6)$$

- u : 변위
- V : 압전물질의 체적
- f_B : body for ce
- f_S : surface for ce
- F_p : point for ce
- A_F : 힘이 인가되는 면적
- Q_S : 점 전하
- A_c : 전하가 인가되는 면적

식 (3)-(6)은 각각 운동 에너지, 탄성 에너지, 유전 에너지, 외부인가 에너지를 나타낸다.

또한 전계와 기계적인 변형은 각각 식 (7)과 (8)과 같이 표현할 수 있으며 이를 (3)-(6)에 대입하고 이 결과를 다시 식 (2)에 대입하여 정리하면 식 (10)과 (11)의 결과식을 얻을 수 있다[1][2].

$$\begin{matrix} E = -grad\phi = -grad(N_\phi\phi) = -B_\phi\phi \quad (7) \\ S = Bu = BN_u u = B_u u \end{matrix} \quad (8)$$

여기서 ϕ 는 전위차이고, u 는 변위량을 나타내며 B 는 식 (9)와 같다[1][2].

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$-\omega^2 M + j\omega D_{uu} u + K_{uu} u + K_{u\phi} \phi = F_B + F_S + F_P \quad (10)$$

$$K_{u\phi}^t u + K_{\phi\phi} \phi = Q_S + Q_P \quad (11)$$

K_{uu} : 기계 계수 행렬식
 D_{uu} : 기계 감쇄 행렬식
 $K_{u\phi}$: 압전 결합 행렬식
 $K_{\phi\phi}$: 유전 계수 행렬식
 M : 질량 행렬식
 F_B : 기계적인 체적 힘
 F_S : 기계적인 면적 힘
 F_P : 기계적인 point 힘
 Q_S : 면전하
 Q_P : 점전하

식 (10)과 (11)에 주어진 계수 행렬식들을 정리하면 다음과 같다[1][2].

$$\begin{aligned}
 K_{uu} &= \int \int \int B'_u c^E B_u dV \\
 D_{uu} &= \alpha \int \int \int \rho N'_u N_u dV \\
 &\quad + \beta \int \int \int B'_u c^E B_u dV \\
 K_{u\phi} &= \int \int \int B'_u e^t B_{\phi} dV \\
 K_{\phi\phi} &= \int \int \int B'_{\phi} \epsilon^S B_{\phi} dV \\
 F_B &= \int \int \int N'_u N_{FB} f_B dV \\
 F_S &= \int \int N'_u N_{FS} f_S dA \\
 F_P &= N'_u F_P \\
 Q_S &= - \int \int N'_{\phi} N_{QS} q_S dA \\
 Q_P &= - N'_{\phi} Q_P \\
 &\quad (\alpha, \beta : \text{감쇄 계수})
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

식 (12)에 나타난 식들은 하나의 요소에 대한 식을 나타낸 것으로 전체 시스템에 대한 해석은 이들의 조립된 결과로 나타난다. 또한 기계 감쇄 행렬식(D_{uu})은 주파수에 따라 변화하는 구조의 감쇄 특성으로부터 조립되는 값으로 감쇄 계수는 구동되는 주파수에 의해 결정되는 값이므로 해석적인 방법에 의해 값을 얻는 것이 어렵다[1]. 따라서 본 논문에서는 감쇄 계수 행렬식에 의한 영향을 무시하고 해석하였다.

3. 해석 및 검토

FEM 정식화를 적용시키기 위한 시험 모델은 그림 1과 같고 이 모델에 대한 등가회로는 그림 2와 같다[3].

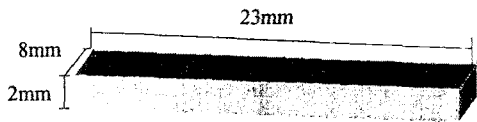


그림 1 시험 모델

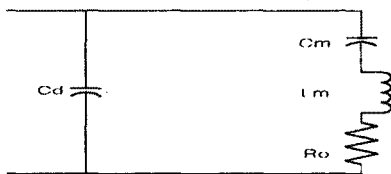


그림 2 등가회로

3.1 정특성 해석

그림 3은 주파수 변화에 따른 정특성 해석의 결과로서 공진 주파수와 변위량과의 관계를 나타낸 그래프이다. 그림 2의 등가회로에서 각각의 회로 상수들은 정특성 해석으로부터 얻은 공진 주파수로부터 계산할 수 있으며 이를 실험값과 비교하면 표 1과 같다.

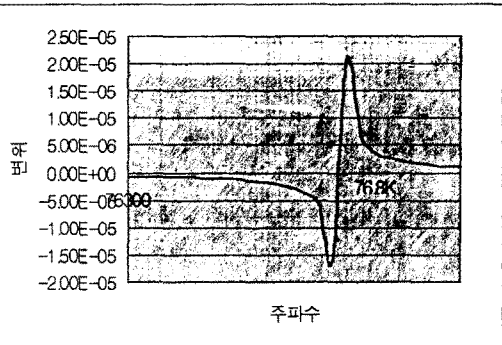


그림 3 공진주파수 특성

	C_d	C_m	L_m
해석결과	0.85pF	7.34pF	590mH
실험결과	1.00pF	78.5pF	65.7mH

표 1 회로 상수의 비교

실험으로부터 얻은 공진 주파수는 71.2(KHz)로서 해석결과와 비슷한 값을 나타내지만 C_m , L_m 값은 상당한 차이를 보인다. 이는 해석시 감쇄 행렬식을 고려하지 않았기 때문이다.

3.2 동특성 해석

시간의 변화에 따른 압전 물질의 유한 요소 해석은 정상상태해와 과도해를 얻을 수 있을 뿐 아니라 수동 소자로 구성된 외부 구동 회로를 포함하는 압전 물질의 유한 요소 해석에도 이용될 수 있다. 과도해의 분석은 시간 영역에서의 게이 변수들(rise time, settling time, overshoot, peak time)을 해석 및 설계할 수 있어 압전 물질의 동작 특성을 향상시킬 수 있다.

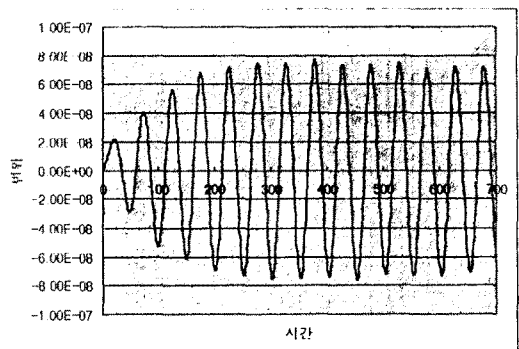


그림 4 시간분할법에 의한 변위 해석

그림 4는 시험 모델의 정특성 해석으로부터 얻은 공진

주파수에서 시간분할법에 의한 동작 특성을 나타낸 것으로 정현파 입력에 대한 과도해 및 정상 상태 해를 보여준다. 이 해석 결과는 압전 물질이 LC 공진회로와 같이 동작됨을 고려한다면 타당한 결과이다[3].

3.3 전류 파형의 해석

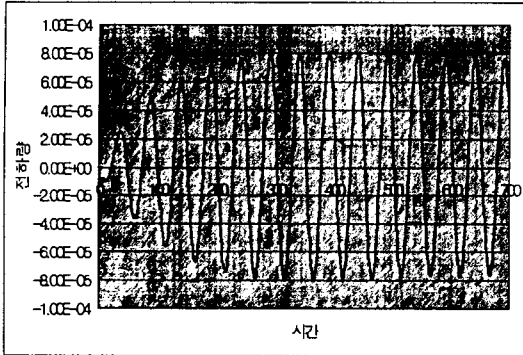


그림 5 전류 파형

그림 5는 해석 모델에 인가되는 전류 파형을 나타낸 것으로 FEM 정식화로부터 시간의 변화에 따른 전하량을 계산한 것이다. 이 파형 또한 과도해와 정상 상태해를 가지며 입력 전압 파형에 비해 약 90° 위상 뒤짐을 나타낸다. 전류 파형의 시작 부분에서 전류의 형태가 정현적이지 않은 것은 전류의 초기 조건을 고려하지 않았기 때문이다. 그림 2의 등가회로에서 공진의 원리에 의해 C_m 과 L_m 는 서로 상쇄되므로 C_d 가 전류 위상 뒤짐에 지배적인 영향을 미친다. 시간의 변화에 따른 전류 파형의 해석은 압전체의 등가 임피던스 해석을 가능케 하며 외부 제어 회로를 고려한 해석 시에도 상태 변수로써 이용될 수 있다[2].

4. 결 론

FEM을 이용한 압전 물질의 해석은 등가회로를 이용하는 해석적인 방법을 통해 얻을 수 있는 공진 특성의 해석뿐만 아니라 시간의 변화에 따른 동특성의 해석도 가능함을 보였다. 동특성 해석을 통해서도 과도해 및 정상 상태해를 얻었으며 압전 물질로 인가 되는 전류를 보여 압전 물질의 등가 임피던스도 계산할 수 있음을 보였다.

[참 고 문 헌]

- [1] Reinhard Lerch. "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three -Dimensional Finite Elements", IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol.37, No.2, May 1990
- [2] B. Bona, E. Brusa, P. Canestrelli, G.Genta, A. Tonoli, "Finite Element Modeling and Experimental Validation of an Elastic Beam with Surface Bonded Piezoelectric Devices", IEEE, 1050-4729/94, 1994
- [3] Toshiiku Sashida, Takashi Kenjo, An Introduction to Ultrasonic Motors, (Clarendon Press, Oxford 1993)