

벡터유한요소법을 이용한 결합선로 구조를 갖는 도파관 구조의 우.기모드 임피던스 추출

김영태, 박준석, 안달, 김형석
 순천향대학교 정보기술공학부

Extraction of Even and Odd Impedance for a Coupled-line Waveguide Structure using the Vector Finite Element Method

Young-Tae Kim*, Jun-Seok Park, Dal Ahn, Hyeong-Seok Kim
 Division of Information Technology Engineering, Soonchunhyang University

Abstract - This paper deals with finite element eigenvalue problem using electric field intensity to extract the even and odd impedance for a coupled-line waveguide structure. Calculations for the even-and-odd impedance of a coupled line waveguide structure are achieved based on the relative impedance concept for a waveguide with electric and magnetic wall contains.

1. 서 론

초고주파대역의 소자를 해석하고 설계하는데 있어서 소자들의 임피던스 값을 계산하는 것이 중요하다. 임피던스 값을 구하기 위해서 여러 가지 수치계산방법 [1]-[3] 등이 제시되고 있지만 각각의 알고리즘마다 단점들이 있기 때문에 좀 더 효율적인 계산방법이 필요하다.

본 논문에서는 결합선로 구조를 갖는 도파관의 임피던스를 추출하기 위하여 전계벡터를 사용한 유한요소 고유치문제 [4]를 다루었다. 임의의 주파수에 대해 고유치인 위상정수를 구하기 위한 시스템 행렬을 유도하였다. 결합구조를 갖는 도파관에서 우모드와 기모드의 상대임피던스(relative impedance)를 구하기 위해서 불연속 경계면에 완전도체경계(Electric wall)과 완전자계경계(Magnetic wall)를 적용하였다. 전형적인 도파관에서 위상정수 β_{TE_0} 와 불연속면에 위의 두가지 경계조건에 따라 계산된 위상정수 $\beta_{TE_0}^e$, $\beta_{TE_0}^o$ 을 이용하여 상대임피던스 값을 계산하는 방법을 제안한다.

2. 본 론

2.1 유한요소 정식화

시간적인 변화를 갖는 계에 대한 맥스웰방정식 2개를 표현하면

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

와 같이 표현되며 복소페이저형식으로 다시 표현하면

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0\mu_r H \quad (2.3)$$

가 되며 자유공간내에서의 전자파동을 고찰하므로 전하밀도 $\rho_v = 0$, 전류밀도 $J = 0$ 인 경우의 맥스웰 방정식을 생각하므로 식 2.2을 대입하여 정리하면

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon_0\epsilon_r E \quad (2.4)$$

라고 표현할 수 있다.

자계 E에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times E \right) - k_0^2 \epsilon_r E = 0 \quad (2.5)$$

자계 H에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식도 위와 동일한 방법으로 유도할 수 있다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times H \right) - k_0^2 \mu_r H = 0 \quad (2.6)$$

2.2 벡터유한요소법

벡터유한요소법을 이용해서 전장벡터 E을 해석하기 위해서 식 2.6을 횡(transverse) 성분과 종(longitudinal) 성분으로 나누어서 표현하면

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times E_t \right) - \frac{1}{\mu_r} (j\beta \nabla_t E_z - \beta^2 E_t) \\ = k_0^2 \epsilon_r E_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_r} [\nabla_t \cdot (\nabla_t E_z + j\beta E_t)] \\ = k_0^2 \epsilon_r E_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서 $E_t = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \exp(-j\beta z)$ 로 표현되며 E field의 횡파 즉 x, y성분을 나타낸다. β 와 k_0^2 을 분리하고 복소수값(complex value)가 아닌 실수 값을 얻기 위해서 $\vec{e}_t = \beta E_t$, $e_z = -jE_z$ 로 놓고 갤러킨 방법(Galerkin method)을 적용하기 위해서 벡터형상함수(vector weighting function) N_i [5]을 곱하고 스칼라형상함수(scalar weighting function) L_j 을 곱하여 도파관의 cross section(Γ)에 대해서 적분을 취하면

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} [N_i \cdot \nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{e}_t \right) \\ + \frac{\beta^2}{\mu_r} (N_i \cdot \nabla_t e_z + N_i \cdot \vec{e}_t)] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} N_i \cdot \vec{e}_t ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} L_j [\nabla_t \cdot (\nabla_t e_z + \vec{e}_t)] \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} L_j e_z ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

과 같이 된다.

벡터등식과 발산정리를 이용하여 식 2.9와 식 2.10을 weak form 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} [(\nabla_t \times N_i) \cdot (\nabla_t \times \vec{e}_t) \\ + (\beta^2 N_i \cdot \nabla_t e_z + \beta^2 N_i \cdot \vec{e}_t)] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} N_i \cdot \vec{e}_t ds - \frac{1}{\mu_r} \int_{\partial\Gamma} N_i \cdot (\hat{n} \times \nabla_t \times \vec{e}_t) ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} (\nabla_t L_j \cdot \nabla_t e_z + \nabla_t L_j \cdot \vec{e}_t) ds$$

$$= k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} L_j e_z ds + \frac{1}{\mu_r} \int_{d\Gamma} (L_j \frac{\partial e_z}{\partial n} + L_j \hat{n} \cdot \vec{e}_i) ds \quad (2.12)$$

도파관의 경계조건을 완전도체로 적용하고 행렬의 대칭을 위해서 식 2.12에 β^2 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^{\infty} \int \int_{\Delta} (\nabla_t \times \mathbf{N}_{tm}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{N}_{tm}) e_{tm} ds \\ & - k_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_r \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \mathbf{N}_{tm}) e_{tm} ds \\ & = -\beta^2 [\frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^{\infty} \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \nabla L_j) e_{zj} ds + \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^{\infty} \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \mathbf{N}_{tm}) e_{tm} ds] \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^{\infty} \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot \nabla L_j) e_{zj} ds + \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^{\infty} \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot \mathbf{N}_{tm}) e_{tm} ds \\ & = \beta^2 \sum_{m=1}^{\infty} k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Delta} L_i L_j e_{zj} ds \quad (2.14) \end{aligned}$$

와 같은 식을 얻을 수 있다.

최종적으로 Matrix 형태로 조합하면

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ e_z \end{bmatrix} = (-\beta^2) \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{iz} \\ T_{zi} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ e_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

와 같은 형태가 되며 Matrix의 각각 항들을 정리하면

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Delta} (\nabla_t \times \mathbf{N}_{tm}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{N}_{tm}) ds \\ & - k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \mathbf{N}_{tm}) ds \\ T_{ii} &= \epsilon_r \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \mathbf{N}_{tm}) ds \\ T_{iz} &= \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Delta} (\mathbf{N}_{tm} \cdot \nabla L_j) ds \\ T_{zi} &= \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot \mathbf{N}_{tm}) ds \\ T_{zz} &= \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot \nabla L_j) ds \\ & - k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Delta} L_i L_j ds \end{aligned}$$

이 된다.

3. 상대임피던스

벡터유한요소법을 이용하면 식 2.15에서 보는 바와 같이 특정 파수(wavenumber) 또는 주파수에서 각각의 모드들에 대한 고유값인 위상정수(β)와 그에 해당하는 고유벡터인 전계값을 구할 수 있다. 본 해석방법을 이용하여 불연속 구조를 갖는 도파관에서의 임피던스 값을 구하기 위해서 상대임피던스(relative impedance) 개념을 도입하였다. 본 개념을 적용하기 위해서 먼저 그림 1에서 전형적인 구형도파관에 기본모드에 해당하는 위상정수($\beta_{TE_{10}}$)와 그림 2와 같은 구조를 갖는 도파관에서의 길이를 갖는 불연속 구조면에서 완전도체경계(Electric wall)면일 경우의 위상정수($\beta_{TE_{10}}$), 완전자계경계(Magnetic wall)의 경우일 때의 위상정수($\beta_{TE_{10}}$)의 값을 각각 구한다. 전형적인 구형도파관에서의 임피던스 $Z_{TE_{10}} = (\omega \mu) / (\beta_{TE_{10}})$ 을 정규화 한 상태에서 완전도체경계

면에서의 임피던스 $Z_{TE_{10}}^o = (\omega \mu) / (\beta_{TE_{10}}^o)$ 와 완전자계경계면에서의 임피던스 $Z_{TE_{10}}^e = (\omega \mu) / (\beta_{TE_{10}}^e)$ 에 대한 각각 비를 구하게 되면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$Z_{TE_{10}}^o = \frac{\beta_{TE_{10}}}{\beta_{TE_{10}}^o} \quad (2.15)$$

$$Z_{TE_{10}}^e = \frac{\beta_{TE_{10}}}{\beta_{TE_{10}}^e} \quad (2.16)$$

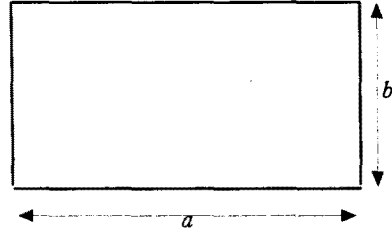


그림 1. 전형적인 구형도파관

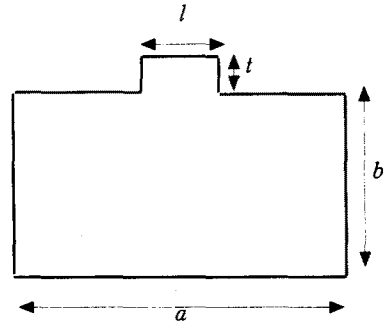


그림 2. 불연속 구조를 갖는 도파관

그림 1과 그림 2 구조에서 $a = 19.05 \text{ mm}$, $b = 9.522 \text{ mm}$, $l = 2.6 \text{ mm}$, $t = 0.5 \text{ mm}$ 의 형상에서 벡터유한요소법을 사용하여 각각의 형상과 경계조건에 따라 위상정수 값을 계산하였다. 그림 3과 그림 4에서는 Delaunay 삼각화 이론을 적용한 Mesh 형상이다. 그림 3에서는 요소(element)수가 364개이고 마디(node)수가 209개이고 변(edge)가 572개이며 그림 4에서는 요소(element)수가 405개이고 마디(node)수가 229개이고 변(edge)가 633개이고 불연속구조를 갖는 부분에서는 해의 정확도를 높이기 위해서 Mesh수를 높였다.

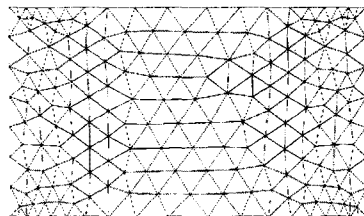


그림 3. 전형적인 구형도파관의 Mesh 형상

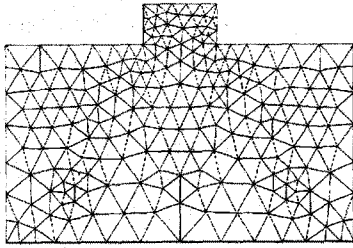


그림 4. 불연속 구조를 갖는 도파관 Mesh 형상

벡터유한요소법을 이용하여 계산한 위상정수의 값은 $\beta_{TE_0} = 136.8322$, $\beta_{TE_1} = 135.2866$, $\beta_{TE_2} = 134.4384$ 와 같다.

위의 계산값을 이용하여 식 2.15와 식 2.16을 적용하면 $Z_{TE_0}^o = 1.017805924$, $Z_{TE_0}^e = 1.011424174$ 와 같은 값을 계산할 수 있다. 결합계수 C를 계산하기 위해서 식 2.17을 이용하였다.

$$C = \frac{Z_{TE_0}^e - Z_{TE_0}^o}{Z_{TE_0}^e + Z_{TE_0}^o} \quad (2.17)$$

벡터유한요소법을 이용한 결합계수값은 50.048dB가 계산되었다.

본 알고리즘을 활용한 계산의 검증은 위해서 상용프로그램인 전자기 해석 프로그램 HFSS을 이용한 불연속구조를 갖는 3차원 구조의 도파관을 시뮬레이션 하였다. 그림 5는 벡터유한요소법을 이용한 불연속구조의 2차원 구조를 HFSS를 활용한 시뮬레이션 검증과정에서 2차원 구조와 같은 구조로 대칭되는 3차원 불연속 구조를 갖는 도파관의 형상이다.

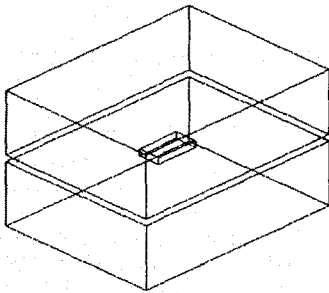


그림 5. 불연속 구조를 갖는 3차원 도파관 형상

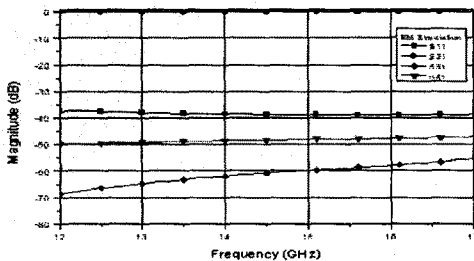


그림 6. HFSS를 이용한 S 파라미터 값

그림 6에서의 보는 바와같이 HFSS의 결과가 50dB됨을 확인할 수 있었다. 2차원 벡터유한요소법과 계산 결과를 HFSS 시뮬레이션 결과와 비교하였을 때 잘 일치함을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 결합선로 구조를 갖는 도파관 구조의 해석에서 불연속 경계면에서 완전도체경계면과 완전자계 경계면에서의 위상정수값을 구하고 상대임피던스 개념을 적용하여 우,기모드에서의 상대임피던스를 추출하였다. 상대임피던스 개념의 검증을 위해 HFSS 시뮬레이션 결과치가 상대임피던스 계산치와 잘 일치함을 확인하였다. 본 개념을 이용해서 결합구조를 갖는 도파관의 형태에서 적용할 수 있을 것이라고 판단되며 Directional Coupler, Band-Pass Filter등의 초고주파 소자들의 설계에 응용할 수 있을 것으로 판단된다.

(참 고 문 헌)

- [1] A. Weisshaar, M.Mongiardo, and V.K.Tripathi, "CAD-oriented equivalent circuit modelling of step discontinuities in rectangular waveguides", IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol.6, No.4, pp. 171-173, April 1996
- [2] F.Alessandri, et al, " Admittance matrix of formulation of waveguide discontinuity problems: computer-aided design of branch guide directional couplers", IEEE Trans.Microwave Theory and Techniques, Vol.36, No.2, pp.394-403, Feb.1998
- [3] T.Itoh, Ed., "Numerical Techniques for microwave and millimeter wave passive structures", New York, Wiley, 1989
- [4] J.F.Lee, et.al, "Full wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements", IEEE Trans.Microwave Theory and Techniques, Vol.39, No.8, pp.1262-1271, August 1991
- [5] Z.J.Cendes, et.al, "Vector finite elements for electromagnetic field computation", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol.27, No.5, pp.3958-3966 Sep, 1991