

광섬유 신호 특성 예측을 위한 일반화된 단계분할 유한요소법의 구현

이범우, 정백호, 이호준\*  
 호서대학교 벤처전문대학원, \* 호서대학교 전기공학부

Generalization of SS-FEM for Prediction of Signal Characteristics in Optical Fiber

Bum-Woo Lee, Baek-Ho Jung, Ho-Joon Lee\*  
 Graduate School of Venture, Hoseo University, \* School of Electrical Eng., Hoseo University

**Abstract** -광섬유에서 전송되는 신호를 예측하기 위하여 일반화된 단계분할 유한요소법(split-step finite element method, SS-FEM)을 이용한 비선형 슈뢰딩거 방정식의 해석 방법을 구현하였다. 사용된 방정식은 분산 및 감쇄, 그리고 비선형 효과를 모두 고려하도록 하였다. SS-FEM으로 계산된 수치 결과는 엄밀해와 잘 일치하였음을 확인하였으며, 계산 시간을 푸리에법과도 비교하였다.

이때, 전송되는 방향을  $z$  축으로 가정하였다. 식 (2)에서  $F(x, y)$ 는 전송방향에 대한 광섬유 횡단면의 모드 분포함수,  $A(z, t)$ 는 포락선 함수의 복소값인 진폭, 그리고  $\beta$ 는 전파되는 모드의 전파 상수이다.

복소 신호진폭  $A(z, t)$ 에 대하여 자기위상변조 효과를 포함하는 전송 방정식은 다음과 같다 [1].

1. 서론

광섬유에서 전송되는 신호를 예측할 때 비선형 슈뢰딩거 미분방정식을 풀어야 한다. 가장 널리 사용되는 수치 해석 방법은 단계분할법(split-step method, SSM)이며, 분산과 비선형의 항을 분리하고 시간영역의 미분 연산자를 푸리에 변환을 통하여 주파수 영역의 연산자로 변환한 후 주파수 영역에서 해를 계산한다 [1].

이미 푸리에법에 대한 결과의 고찰을 통하여, 전송방향으로 거리가 증가할수록 오차가 가중된다는 사실을 발견하였으며 [2], 이를 극복하기 위하여 솔리톤에 SS-FEM을 적용하였다 [3]. 본 연구에서는 일반화된 유한요소법을 적용하여, 고차항의 분산 효과를 포함한 결과를 얻고자 한다. 이미 솔리톤에 대하여 SS-FEM을 적용하였으며, 계산 시간 감소를 제안한 바가 있다 [4], [5]. 따라서 본 논문에서는 일반적인 비선형 미분방정식을 해결하기 위하여 유한요소법으로 수치해석 프로그램을 구현하였다.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - \frac{\alpha}{2} A + i\gamma |A|^2 A \quad (3)$$

식 (3)의 우변에서 제 1항부터 3항까지는 전파상수  $\beta$ 가 주파수에 의존하는 분산 영향을 나타내는 항이며, 제 4항은 감쇄상수  $\alpha$ 에 의해 광섬유의 고유손실을, 마지막 항은 비선형 계수  $\gamma$ 에 의하여 비선형 효과를 나타낸다.

전송방정식 (3)의 수치 해석을 위하여 전송방정식을 정규화하고자 한다. 광신호의 포락선 함수인  $A(z, t)$ 는 전송축  $z$ 와 시간  $t$ 의 함수이다. 신호의 군속도  $v_g = 1/\beta_1$ 를 고려하여 시간을

$$t = T + \beta_1 z = T + \frac{z}{v_g} \quad (4)$$

으로 변수 변환을 하면, 식 (3)은 다음과 같이 된다.

2. 전송 방정식

광섬유에서 입력되는 신호의 전장  $E$ 를 포락선 근사를 통하여 표현하면 다음과 같다.

$$E = \frac{1}{2} \hat{x} E(x, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c. \quad (1)$$

식 (1)에서  $\hat{x}$ 는 전장의 편파를 나타내는 단위 벡터이며,  $E(x, t)$ 는 변조된 광신호의 포락선 함수,  $x$ 은 위치 벡터,  $t$ 는 시간이다. 그리고 지수함수에서  $i = \sqrt{-1}$ , 주파수  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ 이며, 여기서  $\lambda_0$ 와  $c$ 는 자유공간에서 각각 반송파의 파장과 전파속도를 나타낸다. 식 (1)의 우변에서 제 2항의 c.c.는 제 1항의 복소 공액물의미한다.

식 (1)의 전장을 이용하여 맥스웰 방정식과 섭동 이론으로부터 전송방정식을 유도할 수 있다. 전송 방정식의 유도 과정에서 가정된 해의 형태는

$$E(x, t) = F(x, y) A(z, t) e^{i\beta(\omega_0)z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} A + i\gamma |A|^2 A \quad (5)$$

그리고 신호크기를 입력 펄스의 침투전력  $P_0$ 으로 정규화하면 다음과 같다.

$$A(z, T) = \sqrt{P_0} U(z, T) \quad (6)$$

여기서  $U$ 는 전력  $P_0$ 으로 정규화된 신호를 나타낸다. 식 (6)를 (5)에 대입하여 전송방정식을 다시 쓰면

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} U + i\gamma P_0 |U|^2 U \quad (7)$$

와 같이 된다.

3. 단계분할 유한요소법

식 (7)의 해를 얻기 위하여 먼저 단계분할법을 적용하면

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}U + iyP_0|U|^2U \quad (9)$$

와 같이 분리하여 쓸 수 있다. 식 (8)에서 시간 영역의 변수  $T$ 에 대하여 기저함수를 다음과 같이 정의한다 [6].

$$U^e(z, T) = \sum_{j=1}^{N_e} N_j^e(T) \phi_j^e(z) \quad (10)$$

여기서  $N_e$ 는 요소  $e$ 에서 기저함수의 수로서 절점의 수와 같다.  $N_j^e(T)$ 는 기저함수이며,  $j=1, \dots, N_e$ 이다. 그리고  $\phi_j^e$ 는 미지의 계수이다. 식 (10)을 (8)에 대입하고, 식 (10)과 동일한 함수를 가중함수로 사용하여 내적을 취하면, 그 결과로서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[M^e] \frac{d}{dz} [\phi^e] + [K^e] [\phi^e] = [G^e] \quad (11)$$

여기서 각 행렬의 요소는 다음과 같다.

$$M_{ij}^e = \langle N_i^e, N_j^e \rangle \quad (12)$$

$$K_{ij}^e = -\frac{i}{2}\beta_2 \left\langle \frac{dN_i^e}{dT}, \frac{dN_j^e}{dT} \right\rangle + \frac{1}{6}\beta_3 \left\langle \frac{d^2N_i^e}{dT^2}, \frac{d^2N_j^e}{dT^2} \right\rangle \quad (13)$$

$$G_i^e = -\frac{i}{2}\beta_2 \left[ N_i^e \frac{\partial U}{\partial T} \right]_e + \frac{1}{6}\beta_3 \left[ N_i^e \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \right]_e \quad (14)$$

식 (12)와 (13)에서  $\langle \rangle$ 는 다음과 같이 정의되는 내적이다.

$$\langle A, B \rangle = \int_{\Omega} AB d\Omega$$

행렬식 (11)의 공간 미분연산자를 처리하기 위하여 미소구간  $\Delta z$ 에 대하여 유한차분법 및 평균치 근사화를 이용하여 식 (11)을 다시 쓰면

$$[A^e][\phi^e(z+\Delta z)] = [B^e][\phi^e(z)] + [G^e] \quad (15)$$

와 같으며, 여기서 새로 정의된 행렬은

$$[A^e] = [M^e] + \frac{\Delta z}{2}[K^e] \quad (16)$$

$$[B^e] = [M^e] - \frac{\Delta z}{2}[K^e] \quad (17)$$

이다 [5]. 식 (15)에 대하여 전체 요소의 수  $M$ 에 대한 행렬조합 과정을 수행하면 그 결과는

$$[A][\phi(z+\Delta z)] = [B][\phi(z)] + [G] \quad (18)$$

가 된다. 여기서 전체 절점수는  $N+1$ 이라고 가정한다. 이를 풀기 전에 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$$U|_{T=T_1^0} = U|_{T=T_N^0} \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{T=T_1^0} = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{T=T_N^0} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \Big|_{T=T_1^0} = \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \Big|_{T=T_N^0} \quad (21)$$

그러므로 식 (19)에 의해  $\phi_1 = \phi_{N+1}$ 이므로, 이를 행렬식 (18)에 적용하고, 경계조건 (20)과 (21)을 적용하면  $G_1 + G_{N+1} = 0$ 이 되고, 각 요소의 절점에서 연속성으로 인하여  $G_i = 0$ ,  $2 \leq i \leq N$ 이다. 그러므로 경계조건이 적용된 행렬식 (18)을 다시 쓰면

$$[L_A][\phi(z+\Delta z)] = [L_B][\phi(z)] \quad (22)$$

가 되고  $[L_A]$  및  $[L_B]$ 는 경계조건이 적용되어 식 (18)이 재구성된 결과이다. 전송거리  $\Delta z$ 에 대한 식 (9)의 해는 근사적으로 다음과 같이 표현된다.

$$U(z+\Delta z, T) \approx \exp(\hat{N}\Delta z)U(z, T) \quad (23)$$

여기서 연산자는 다음과 같다.

$$\hat{N}(T) = -\frac{\alpha}{2} + iyP_0|U(z, T)|^2 \quad (24)$$

그러므로 식 (22)와 (23)을 전송축상의 미소구간에 대하여 순차적으로 적용하면 출력단의 해를 얻을 수 있다.

#### 4. 수치 예

식 (7)에서 비선형 효과의 영향을 무시하면, 즉  $\gamma=0$ 일 때 주파수 영역의 해는 다음과 같다.

$$\bar{U}(z, \Omega) = \bar{U}(0, \Omega) \exp\left\{\left(\frac{i}{2}\Omega^2 + \frac{i}{6}\beta_3\Omega^3 - \frac{\alpha}{2}z\right)\right\} \quad (25)$$

여기서  $\bar{U}(0, \Omega)$ 는 입력의 푸리에 변환이며,  $\Omega = \omega - \omega_0$ 이다. 그러므로 이 결과를 역 푸리에 변환하면  $U(z, T)$ 를 얻게 된다. 식 (25)의 적용에서 입력함수는 다음과 같은 함수들이 사용될 수 있다. 가우시안 펄스는

$$U(0, T) = \exp\left\{-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right\} \quad (26)$$

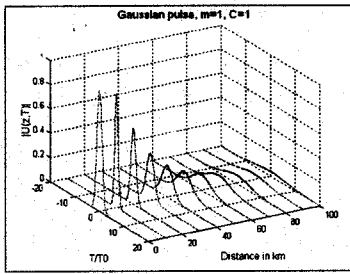
이며, 쌍곡-정할 펄스는

$$U(0, T) = \text{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left\{-\frac{iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\} \quad (27)$$

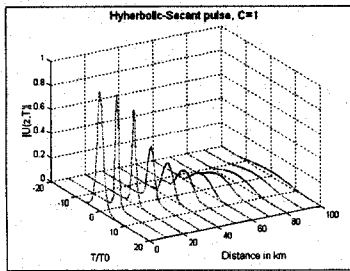
이다.

식 (26) 및 (27)의 신호를 입력으로 사용하여 해석한 결과는 그림 1과 같다. 이때 분할 간격을  $\Delta z = 1$  km로 하였으며, 전체 전송거리를 100 km까지로 두었다. 시뮬레이션시 각 파라미터는  $\beta_2 = -20$  ps<sup>2</sup>/km,  $\beta_3 = 0.15$  ps<sup>3</sup>/km,  $\alpha = 0.2$  dB/km으로 두었으며, 입력 펄스의 폭은  $T_0 = 20$  ps로 하였다. 또한 분산 파라미터의 고차항 ( $\beta_3$ )을 처리하기 위하여 3차 요소함수를

이용하였다. 미지수의 개수는  $N=210$ 이다. 그림 1의 신호 모양은 수치해와 식 (25)의 푸리에 역변환인 해석해를 동시에 나타내고 있으며, 거의 겹쳐 있어서 분별이 어려울 정도로 고차 분산항을 포함한 유한요소법이 정확히 구현되었다는 사실을 알 수 있다.

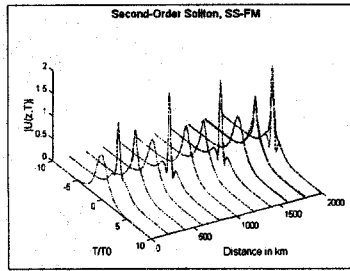


(a)

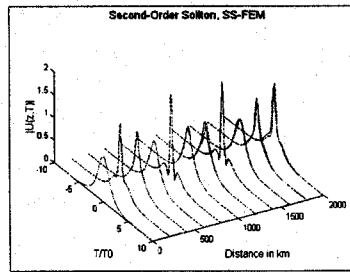


(b)

그림 1. 수치해와 해석해의 비교, (a) 가우시안 펄스, (b) 쌍곡-정할 펄스



(a)



(b)

그림 2. 솔리톤의 수치해와 해석해의 비교, (a) 푸리에법, (b) 유한요소법

비선형 효과를 포함한 2차 솔리톤에 대한 해는 그림

2와 같다. 해석시  $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{km}$ ,  $T_0 = 20 \text{ ps}$ ,  $\gamma = 1 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$ ,  $P_0 = 0.2 \text{ W}$ 로 하였으며 미지수의 개수는  $N=210$ 으로 두었다. 전체 전송거리는 2000 km로 하였으며, 분할 간격은  $\Delta z = 250 \text{ m}$ 로 하였다. 이미 솔리톤에 대하여 참고문헌 [5]에서 푸리에법과 유한요소법의 정확성을 비교한 바가 있으나 그림 2의 수치해는 식 (22)와 (23)을 이용한 일반적인 FEM 코드에서 얻어진 결과이다.

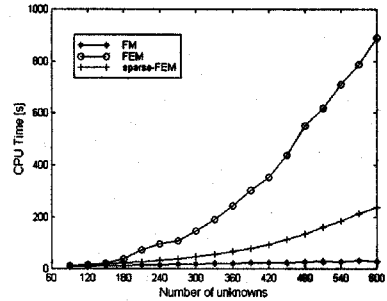


그림 3. 계산 시간, 전송거리 500 km,  $\Delta z = 250 \text{ m}$

그림 3은 미지수의 개수  $N$ 을 90부터 600까지 30개의 간격으로 하여 일반화된 SS-FEM 코드를 수행한 계산시간을 푸리에법의 결과와 같이 나타내었다. 희귀행렬 근사에 의한 계산 시간은 기존의 FEM에 의한 계산시간보다 매우 단축됨을 볼 수 있다 [5].

## 5. 결론

광섬유에서 전송되는 펄스의 전파특성을 예측하기 위하여 비선형 전파 방정식을 수치 해석하기 위한 일반화된 단계분할 유한요소법의 코드를 구현하였다. 계산된 결과는 해석해와 잘 일치함을 보였다. 따라서 본 논문에서 제안된 단계분할 유한요소법은 장거리 광전송 시뮬레이션에 사용 가능하며, 단계분할 푸리에법의 결과와도 비교 또는 검증용으로도 활용될 수 있을 것이다.

이 논문은 1999년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

## (참 고 문 헌)

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, chapter 2, 1995.
- [2] 홍순원, 이호준, "단계 분할 유한 요소법을 이용한 분산 보상 광 전송 시스템의 시뮬레이션," 대한전자공학회 논문지, 36권, 8호, pp. 751-758, 1999. 8.
- [3] 정백호, 이호준, "단계분할 유한 요소법에 의한 광섬유의 신호 전송 예측," 1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2441-2443, 1999. 7.
- [4] 이범우, 정백호, 이호준, "희귀행렬 근사를 이용한 SS-FEM에 의한 광 솔리톤의 수치 해석," '99 광자기술 학술회의, pp. 513-514, 1999. 11.
- [5] 정백호, 이호준, "희귀행렬 SS-FEM에 의한 비선형 광섬유의 전송신호 해석," 대한전자공학회 논문지, 49C권, 1호, pp. 52-58, 2000. 1.
- [6] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, chapter 3, 1993.