전역적 성능과 지역적 성능을 동시에 고려하는 TS 퍼지 모델링 : LMI를 이용한 풀이

곽 기 호, 박 주 영
고려대학교 제어계측공학과

Fuzzy modeling with emphasis on both global fitting and local interpretation : An LMI approach

Kiho Kwak, Jooyoung Park
Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Korea University

Abstract - TS 퍼지 모델은, 복잡한 비선형 시스템을 효과적으로 표현할 수 있는 주요한 근사 모델 중 하나이다. TS 퍼지 모델링을 위한 기존의 학습 방법론들은 대부분 전역적 근사 오차를 최소화하는 것을 목적으로 하는데, 이러한 경우에는 결과로서 얻어지는 TS 퍼지 모델의 국소모델들이 근사 대상 시스템의 국소적 특성을 제대로 표현 할 수 없는 상황이 발생할 수 있다

따라서 본 논문에서는 이러한 특성을 고려하여 새로운 학습 알고리즘을 제시함으로써 전역·지역적 성능을 동시에 향상시킬 수 있는 TS 퍼지 모델을 구하고자 한다. 모델을 구하는데 있어서는 LMI를 이용한 풀이를 이용한다. 그리고 간단한 예제를 통하여 그 성능을 입증한다.

1. 서 론

일반적으로 TS 퍼지 모델링이 널리 사용되는 이유 중 하나는, 몇 개의 간단한 규칙의 결합을 통하여 복잡한 비선형 시스템을 표현할 수 있다는 장점 때문이다. 그리고 [1][6]와 같은 학습 알고리즘을 통하여 실제 시스템을 정확하게 표현할 수 있는 TS 퍼지 모델을 구할 수 있다. 하지만 대부분의 알고리즘들은 다음과 같은 전역적 목적 함수 J를 최소화하는 방법으로 퍼지모델의 매개변수를 찾는 방법을 취한다.

$$J = \sum_{k=1}^{N} [\, y_d(k) - y_a(k) \,]^2 \tag{1}$$

이러한 형태의 알고리즘들이 가질 수 있는 단점 중 하나는, 구해진 TS 퍼지 모델의 각 국소모델이 모델링하고자 하는 시스템의 지역적 특성을 적절히 반영하지 못하는 경우가 있다는 점이다[2].

본 논문에서는 최근에 퍼지제어 분야에서 응용이 다각도로 모색되고 있는 LMI(Linear Matrix Inequality) [3][5]을 이용하여 전역적 성능과 지역적 성능을 동시에 고려할 수 있는 TS 퍼지 모델링 방법을 제시하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 TS 퍼지 모델에 대해서 간단히 소개하고, 3장에서는 본 논문에서 제시하고자하는 방법론에 대해서 설명한다. 그리고 4장에서는 제시한 방법을 모의 실험을 통하여 예시하고, 마지막으로 5장에서는 결론 및 추후 연구방향에 대해서 알아본다.

2. 기초 이론

Takagi와 Sugeno에 의해 제안된 TS 퍼지 모델은 비선형 시스템의 국소 선형 입출력 관계를 표현하는 퍼지 IF-THEN 규칙들로 표현된다[6]. 따라서 일반적인 TS 퍼지 모델의 IF -THEN 규칙은 다음과 같은 형식으로 주어진다

Rule i:

IF x_1 is M_{i1} and $\cdots$ and x_r is M_{ir}, (2)

THEN

$y_i = b_{i0} + b_{i1}x_1 + \cdots + b_{ir}x_r$ for $i = 1, 2, \cdots, L$

여기서 x_i는 입력변수, y_i는 국소 출력변수, L은 rule의 개수, M_{ij}는 소속함수 $M_{ij}(x_j)$에 의해 결정되는 퍼지집합이고, 그리고 b_{ij}는 매개변수이다.

그리고 TS 퍼지모델의 일반적인 추론 방법에 의하면 모델의 전체 출력은 다음과 같다.

$$y = \frac{\sum_{i=0}^{L} \omega_i y_i}{\sum_{i=0}^{L} \omega_i} = \frac{\sum_{i=0}^{L} \omega_i (\, b_{i0} + b_{i1}x_1 + \cdots + b_{ir}x_r)}{\sum_{i=0}^{L} \omega_i} \tag{3}$$

여기서 ω_i는 Rule i의 하중함수(Weight Function)이고 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} w_i &= M_{i1}(x_1) \times M_{i2}(x_2) \times \cdots \times M_{ir}(x_r) \\ &= \prod_{j=1}^{r} M_{ij}(x_j) \end{aligned} \tag{4}$$

또 $\sum_{i=1}^{r} w_i(x) > 0, \quad \forall t > 0$을 항상 만족함을 가정하고 하중 함수를

$$h_i(x) \triangleq \frac{w_i(x)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x)} \tag{5}$$

으로 정규화하면, TS 퍼지모델의 전체 출력은 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$y = \sum_{i=0}^{L} h_i (\, b_{i0} + b_{i1}x_1 + \cdots + b_{ir}x_r) \tag{6}$$

$$h_i(x) \ge 0, \; i = 1, \ldots, r,$$

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(x) = 1, \; \forall t \ge 0$$

3. 전역적 학습(Global Learning)과 지역적 학습(Local Learning) : LMI를 이용한 풀이

전역적 학습을 위한 알고리즘은 (1)에서 제시한 목적함수(Objective Function) J_G를 최소화하는 매개변수를

찾는 것이다. 여기서 $y_d(k)$는 실제 시스템의 출력, $y_a(k)$는 모델링한 시스템의 출력이고, 그리고 N은 학습에 사용된 데이터의 개수이다. 그리고 (1)은 전역적 학습의 목적함수로서 다음과 같이 다시 쓸 수 있다[2].

$$J_G = (y_d - Xb)^T(y_d - Xb) \tag{7}$$

여기서

$$y_d = [\, y_d(1) \;\; y_d(2) \;\; \cdots \;\; y_d(N)\,]^T \in \mathrm{R}^N$$

$$X = \begin{bmatrix} \omega_1(1) & \omega_1(1)x_1(1) & \cdots & \omega_1(1)x_r(1) & \cdots & & & & \\ \omega_1(2) & \omega_1(2)x_1(2) & \cdots & \omega_1(2)x_r(2) & \cdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ \omega_1(N) & \omega_1(N)x_1(N) & \cdots & \omega_1(N)x_r(N) & \cdots & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & \cdots & \omega_L(1) & \omega_L(1)x_1(1) & \cdots & \omega_L(1)x_r(1) \\ & & & & \cdots & \omega_L(2) & \omega_L(2)x_1(2) & \cdots & \omega_L(2)x_r(2) \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \cdots & \omega_L(N) & \omega_L(N)x_1(N) & \cdots & \omega_L(N)x_r(N) \end{bmatrix}$$

$$\in \mathrm{R}^{N\times[(r+1)\times L]}$$

$$b = [\, b_{10} \; b_{11} \cdots b_{1r} \cdots b_{L0} \; b_{L1} \cdots b_{Lr}\,]^T \in \mathrm{R}^{[(r+1)\times L]}$$

이다. 그리고 목적함수를 최소화하는 매개 변수 b를 구하기 위하여 다음을 만족하는 중간변수 $\alpha(k)$를 이용할 수 있다.

$$(y_d(k) - y_a(k))^2 < \alpha(k) \tag{8}$$

이 식은 다음과 동치임에 주목하자.

$$G(k) = \begin{bmatrix} \alpha(k) & [y_d(k) - X(k)b]^T \\ [y_d(k) - X(k)b] & 1 \end{bmatrix} > 0 \tag{9}$$

여기서 $X(k)$는 행렬 X의 k번째 행이다.

목적함수(1)을 최소화하는 문제는 다음의 EVP(Eigen value Problem)문제를 풀면 얻을 수 있다[3].

$$\textbf{minimize} \;\; \sum_{i=1}^{N} \alpha(i)$$

$$\textbf{subject to} \tag{10}$$

$$\text{block-diag}\,[\mathrm{G(1)} \;\; \mathrm{G(2)} \;\; \cdots \;\; \mathrm{G(N)}\,] > 0$$

따라서 식(10)에서 구한 매개변수는 전역적 성능만 고려하여 얻어지는 해가된다. 지역적 성능을 고려하는 데에는 일반적으로 다음과 같은 목적함수를 사용한다.

$$J_L = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{N} \omega_i(k)\,[\, y_d(k) - y_a(k)\,]^2 \tag{11}$$

이것은 다시

$$\begin{aligned} J_L &= \sum_{i=1}^{L} (y_d - X_i b_i)^T W_i (y_d - X_i b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{L} (W_i^{1/2} y_d - W_i^{1/2} X_i b_i)^T (W_i^{1/2} y_d - W_i^{1/2} X_i b_i) \end{aligned} \tag{12}$$

이 되고, 여기서

$$W_i = \text{diag}[\, \omega_i(1) \;\; \omega_i(2) \;\; \cdots \;\; \omega_i(\mathrm{N})\,] \in \mathrm{R}^{\mathrm{N\times N}}$$

$$b_i = [\, b_{i0} \;\; b_{i1} \;\; \cdots \;\; b_{ir}\,]^T \in \mathrm{R}^{(r+1)}$$

$$X_i = \begin{bmatrix} \omega_i(1) & \omega_i(1)x_1(1) & \cdots & \omega_i(1)x_r(1) \\ \omega_i(2) & \omega_i(2)x_1(2) & \cdots & \omega_i(2)x_r(2) \\ & & \vdots & \\ \omega_i(N) & \omega_i(N)x_1(N) & \cdots & \omega_i(N)x_r(N) \end{bmatrix}$$

$$\in \mathrm{R}^{N\times(r+1)}, \; i = 1,2, \;\; \cdots, L$$

가 된다. 따라서 목적함수 J_L을 β 미만으로 유지하기 위하여 부등식이 필요하다.

$$(W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b')^T (W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b') < \beta \tag{13}$$

여기서

$$y_d' = [\, y_d \;\; y_d \; \cdots \; y_d\,]^T \in \mathrm{R}^{N\times N}$$

$$X' = \text{diag}[\, X_1 \;\; X_2 \;\; \cdots \;\; X_L] \in \mathrm{R}^{(N\times L)\times[(r+1)\times L]}$$

$$W = \text{diag}[\, W_1 \;\; W_2 \;\; \cdots \;\; W_L] \in \mathrm{R}^{(N\times L)\times(N\times L)}$$

$$b = [\, b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_L]^T \in \mathrm{R}^{(r+1)\times L}$$

이다. 그리고 식(13)은 다음과 같이 선형행렬부등식의 형태로 표현이 가능하다.

$$\begin{bmatrix} \beta & [\, W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b'\,]^T \\ [\, W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b'\,] & 1 \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

하지만 전역적 학습을 통하여 얻어지는 매개변수와 지역적 학습을 통하여 얻어지는 매개변수는 결국 전역적 특성과 지역적 특성을 동시에 만족시키지는 못한다. 따라서 본 논문에서 LMI를 이용하여 두가지 특성을 동시에 만족시키는 방법을 다음과 같이 제안한다[4].

$$\textbf{minimize} \;\; \sum_{i=1}^{N} \alpha(i) \tag{15}$$

$$\textbf{subject to}$$

$$\text{block-diag}\,[\mathrm{G(1)} \;\; \mathrm{G(2)} \;\; \cdots \;\; \mathrm{G(N)}\,] > 0\,,$$

$$(W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b')^T (W^{1/2} y_d' - W^{1/2} X' b') < \varepsilon$$

4. 모의 실험

본 논문에서 제시하고자하는 방법을 보이기 위하여 먼저 간단한 예제[2]에 대해서 TS 퍼지모델을 구해보았다. Fig.1은 일반적인 학습을 통하여 모델을 구해보았는데 3개의 국소 모델 중 2와 3은 시스템의 국소적 특성을 정확하게 반영하지 못하고있다. 따라서 본 논문에서 제시하는 방법을 적용한 결과, Fig.2와 같이 전역 및 지역적 성능이 모두 만족되는 TS 퍼지 모델이 구해졌다.

다음 예제에서는

$$y = \frac{\sin(x)}{x} \tag{16}$$

를 중심이 x_i = -8,-6,-4,-2,0,2,4,6, 그리고 8인 9개의 삼각 소속함수를 갖는 TS 퍼지 모델로 근사하는 문제를 식(15)를 사용하여 다루어 보았다. 그 결과 Fig.3에서 보여진 바와 같이, 각 국소모델들의 성능과 전체 모델의 성능이 비교적 우수함을 알 수 있다.

본 논문의 관점을 따를 경우, 우리는 여러 가지 방법으로 TS 퍼지 모델의 전역적 성능과 지역적 성능을 동시에 고려해 줄 수 있다. 이러한 방법들 중 하나로 전역적 오차(1)을 ε 미만으로 유지시키면서 지역적 성능 관련 오

차(11)을 최소화하는 방법도 시뮬레이션 해보았는데, 결과는 Fig. 4와 같았다.

5. 결 론

지금까지 우리는 전역 및 지역적 성능을 동시에 보장할 수 있는 TS 퍼지 모델을 얻기 위하여 LMI를 이용한 학습 알고리즘을 제시하였다. 그리고 간단한 비선형 함수에 대해서 제시한 방법을 적용해 본 결과, 일반적인 학습 알고리즘에서 잘 보장하지 못했던 지역적 성능이 개선됨을 알 수 있었다. 그리고 본 모의 실험에서는 전역적 성능을 제한한 후 지역적 성능을 최적화시키는 방법도 고려해 보았다.

추후에 연구해야 할 방향으로서는, 더 복잡한 비선형 함수에 대해서 제시한 방법을 적용하는 것이다. 그리고 모델링 및 제어기 설계를 통합적으로 수행할 수 있는 LMI 기반 Tool의 설계 및 개발 등을 들 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] J.Shing, and R.Jang, "ANFIS:Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System", IEEE Transactions on Systems,Man and Cybernetics, Vol.23, 665-685,1993.

[2] John Yen, Liang Wang, and C.W.Gillespie, "Improving the Interpretability of TSK Fuzzy Models by Combining Learning and Local Learning", IEEE Transactions on Fuzzy Systems,Vol.6,530-537, 1998.

[3] K.Tanaka, T.Hori, K.Yamafuji, and H.Wang, "An Integrated Algorithm of Fuzzy Modeling and Controller Design for Nonlinear Systems", IEEE International Fuzzy systems conference proceedings, II887-II892,1999.

[4] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub, and M.Chilali, LMI Control Toolbox(MathWorks Inc, Natick, MA, 1995).

[5] S.Boyd, L.ElGhaoui, E.Feron, and V.Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15 (SIAM, Philadelphia, 1994).

[6] T.Takagi, and M.Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control" ,IEEE Transactions on Sys, Man and Cybernetics, Vol. SMC-15, 116-132,1985.

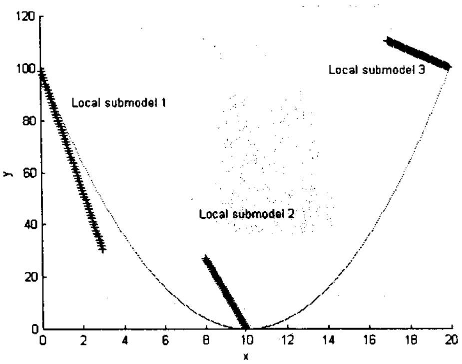

Fig.1. 전역적 성능만을 고려한 TS 모델

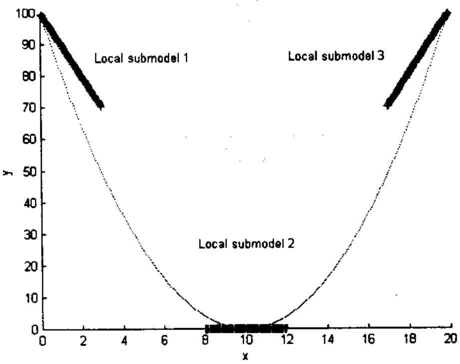

Fig.2. 본 논문의 방법론으로 구한 TS 모델

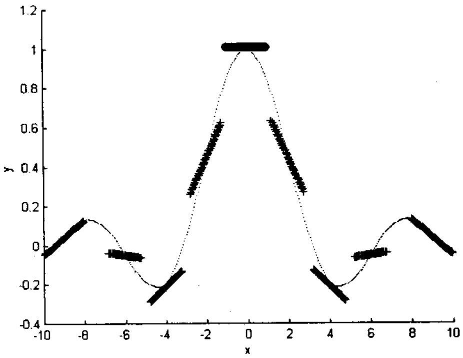

Fig.3. 본 논문의 방법론으로 구한 TS 모델 ($\varepsilon=0.35$)

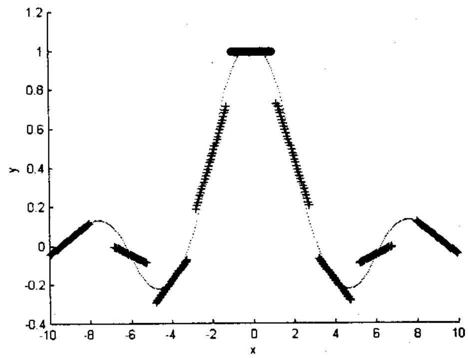

Fig.4. 전역적 성능을 제약조건으로, 목적함수로 지역적 성능을 가지는 방법으로 구한 TS 모델 (ε = 0.05)