

로봇 매니퓰레이터에서 바운드 예측을 갖는 슬라이딩 모드 제어기 설계

이창민\*, 윤원식\*, 박성준\*\*, 김철우\*  
 부산대학교\*, 동명대학\*\*

A Sliding Mode Controller with Bound Estimation for Robot Manipulator

Chang Min Lee, Won Sik Yun, Sung-Jun Park, Cheul-U Kim  
 Pusan National Univ., Dong-myung college

**Abstract** - A sliding mode control algorithm combined with an adaptive scheme, which is used to estimate the unknown parameter bounds, is developed for the trajectory control of robot manipulators. Simulated results show the validity to accurate tracking capability and robust performance.

1. 서 론

로봇 매니퓰레이터는 여러 개의 관절이 연결되어 있는 구조로 되어있으며 그 동 특성은 매우 복잡하고 비 선형적이다. 따라서, 최근에는 로봇 매니퓰레이터 파라미터의 불확실성에도 불구하고 지속적이며 안정된 추적 성능을 갖는 가변 구조 제어기 설계에 대한 연구가 진행되고 있다[1]. 이런 연구들 중 최근 VSS(Variable Structure System)의 이론에 기초한 제어 알고리즘을 이용하여 로봇 매니퓰레이터 제어기를 설계하는 연구가 진행중이다[2]. VSS 이론은 Lyapunov stability 나 linearizable method 등의 이론을 이용하고 있는데, 이 경우 플랜트의 파라미터 변화의 바운드를 미리 제한하게 된다. 이로 인해서 시스템에서 모델링 되지 않는 dynamic에 과대한 제어 입력과 chattering 현상을 일으키게 된다. 따라서, 본 논문은 로봇 매니퓰레이터에서 Tracking Control을 목적으로 한 바운드를 가지는 슬라이딩 모드제어기를 설계한다. 제안된 방식은 linear parameterization 접근방식에 기초를 둔다[3]. 이 방식에서 로봇의 dynamic equation은 2개의 항목으로 구분되어 지는데, 하나는 매니퓰레이터의 불확실한 파라미터 항이고 다른 하나는 regressor matrix을 사용하여 매니퓰레이터의 알 수 있는 비선형 dynamic function이다. System matrix에서 불확실한 파라미터 항은 알 수가 없기에 본 논문은 트래킹 에러(tracking error)의 상태 함수로써 적응 알고리즘을 사용하여 바운드를 예측하게 된다. 결과적으로 제안한 바운드 예측 알고리즘을 가지는 슬라이딩 모드 제어기를 이용하여 시스템의 불확실성을 제한시키지 않으며, 빠른 변화에 강인한 제어기를 설계한다. 제안한 알고리즘을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 우수성을 증명한다.

2. 본 론

2.1 로봇 매니퓰레이터 동력학적 특성

자유도가 n인 로봇 매니퓰레이터의 동력학 모델은 다음 식으로 표현된다.

$$D(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (1)$$

여기서  $q \in R^n$ 는 generalized coordinates(joint positions),  $D(q) \in R^{n \times n}$ 는 symmetric, bounded,

positive define inertia matrix,  $B(q, \dot{q})\dot{q} \in R^n$ 는 centripetal and Coriolis torque,  $G(q) \in R^n$ 는 gravitational torque vector 그리고  $u \in R^n$ 는 applied joint torque vector 이다.

위의 동력학 모델 (1)에서 안정성 해석에 중요한 구조적 특성을 나타내면 다음과 같다.

**Property 1** : System matrix에서 불확실한 상수 파라미터(질량, 관성모멘트 등),  $\alpha \in R^m$ 이 존재한다면 (2)식과 같이 Regressor matrix[3]을 통해 동력학 방정식을 특별히 선택된 parameter 들에 관해서 선형화 시킨다.

$$D(q)\dot{v} + B(q, \dot{q})v + G(q) = \Phi(q, \dot{q}, v)\alpha \quad (2)$$

여기서  $\Phi \in R^{n \times m}$ 는 regressor matrix,  $v \in R^n$ 는 vector of smooth function,  $\alpha$ 는 unknown constant parameter 이다.

**Property 2** : The proper definition matrix  $B(q, \dot{q})$ 을 사용하면 수식 (1)의  $D(q)$ 와  $B(q, \dot{q})$ 은 식(3)을 만족시킨다.

$$x^T(\dot{D} - 2B)x = 0, \quad \forall x \in R^n \quad (3)$$

여기서  $x^T$ 는  $x$ 의 전치행렬이고,  $(\dot{D} - 2B)$ 는 skew-symmetric matrix로 특별히  $B(q, \dot{q})$ 는 다음과 같이 정의한다[4].

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \dot{q}^T \frac{\partial D_{ij}}{\partial q} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right] \quad (4)$$

property 2에서 정의된  $B(q, \dot{q})\dot{q}$ 에 의한 힘(가상적 힘)들은 시스템에 영향을 미치지 않으므로 간단한 sliding mode controller로 나타낼 수 있다.

2.2 바운드 예측을 갖는 슬라이딩모드 제어기 설계

A. 제어기 설계

트래킹 제어에서 고려되어야 될 사항은 매니퓰레이터의 파라미터를 알지 못하는 경우 desired trajectory  $q_d \in R^n$ ,  $\dot{q}_d \in R^n$ ,  $\ddot{q}_d \in R^n$ 을 통해서 제어법칙  $u$ 를 결정하고, 과도 응답시의 트래킹 에러  $\tilde{q}(t) = q(t) - q_d(t) \in R^n$ 의 발생 시 시간이 무한대 ( $t \rightarrow \infty$ )일 때 이 에러가 점근적(asymptotically)으로 0(zero)이 될 수 있는 슬라이딩 평면( $s=0$ )을 결정한다.

본 논문에서 슬라이딩 평면  $s=0$ 는 다음과 같다.

$$S = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \quad (5)$$

여기서  $\Lambda$ 는 positive define matrix 이고  $\tilde{q}(t)$ 는

트래킹 에러, 즉  $\dot{q}(t) = q(t) - q_d(t)$  이다.  $s=0$  ( $t \rightarrow \infty$ )에서 슬라이딩모드가 존재하는 경우 VSS이론에 의해 다음의 선형 차분 방정식(linear differential equation)의 지배를 받는다.

$$\dot{\tilde{q}}(t) = -\Lambda \tilde{q}(t) \quad (6)$$

명백히 과도응답의 트래킹 에러는 matrix  $\Lambda$ 에 의해서 결정될 것이다. 그러므로 만약  $s=0$ 에서 슬라이딩 모드가 존재하는 제어 법칙을 설계한다면 과도응답 시 트래킹 에러는 완벽히 식(6)의 선형 dynamic equation에 지배되게 된다. 슬라이딩 평면  $s=0$ 을 따라 에러를 강제로 이동시키기 위한 슬라이딩 모드 제어 법칙을 유도하기 위해 다음의 식을 이끌어 낸다.

$$\dot{q}_r(t) = \dot{q}_d(t) - \Lambda \tilde{q}(t) \quad (7)$$

적당하고 선택된 로봇의 dynamic 파라미터로부터 불확실한 상수 파라미터를  $\alpha \in R^n$  라 두고 선형화된 dynamic (property 1)의 표현으로 다음 식을 이끌어 낼 수 있다.

$$D(q)\ddot{q}_r + B(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\alpha \quad (8)$$

여기서  $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) \in R^{n \times m}$ 은 불확실한 파라미터에서 독립된 regressor matrix 이다. 식(8)의 로봇 dynamic으로부터 불확실한 파라미터를 분리시키고, regressor matrix를 사용함으로써 슬라이딩 모드 형태로 간결하게 표현하게 되며, 슬라이딩 모드 제어 법칙은 다음과 같이 정의된다.

$$u = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\psi - K_d s \quad (9)$$

$$\psi_i = -\hat{\eta}_i \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^m s_j \phi_{ji}(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\right), \quad i=1, \dots, m. \quad (10)$$

$$\hat{\eta}_i = \Gamma_i \left| \sum_{j=1}^m s_j \phi_{ji}(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r) \right|, \quad i=1, \dots, m. \quad (11)$$

여기서  $\psi_i$ 는 component of the vector  $\psi$ ,  $K_d$ 는 positive definite matrix,  $\Gamma_i$ 는 0(zero)보다 큰 임의의 상수로 rate of adaptation에 의해서 결정된다. 식(9)의 슬라이딩모드 제어법칙으로부터 다음의 슬라이딩 모드 방정식을 이끌어 낼 수 있다.

$$Ds = \Phi\psi - \Phi\alpha - Bs - K_d s \quad (12)$$

위의 식은 식(1)에서 식(8)을 빼고  $s = \dot{q} - \dot{q}_r$  식을 사용하면 얻을 수 있다.  $\tilde{q}$ 가 점근적으로 0(zero)에 수렴 여부 판별을 증명하기 위해서 Lyapunov function(V)을 사용한다.

proof: 다음의 Lyapunov function을 고려해 보자.

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T Ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\eta_i - \hat{\eta}_i)^2 / \Gamma_i \quad (13)$$

여기서  $\eta_i$ 는  $\eta_i \geq |a_i|$ 를 만족시키는 상수,  $a_i$ 는 식(8)에서 정의된  $\alpha$ 의  $i$ 번째 요소이다. 식(13)을 시간에 대하여 미분하게 되면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T (\Phi\psi - \Phi\alpha - K_d s - Bs) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} Ds \right) \\ & + \sum_{i=1}^m (\eta_i - \hat{\eta}_i) (-\dot{\hat{\eta}}_i) / \Gamma_i \end{aligned} \quad (14)$$

property 2를 사용하여 식(14)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -s^T K_d s + s^T (\Phi\psi - \Phi\alpha) + \sum_{i=1}^m (\eta_i - \hat{\eta}_i) (-\dot{\hat{\eta}}_i) / \Gamma_i \\ = & -s^T K_d s - \sum_{i=1}^m \eta_i \left| \sum_{j=1}^m s_j \phi_{ji} \right| - \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^m s_j \phi_{ji} \\ \leq & -s^T K_d s < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)의 결과로  $\dot{V}(t)$ 는 한정적인 negative 가 되거

나  $s=0$ 에 의해서 0 이 된다. Lasalle theorem에 의해서 위의 이론은 증명된다(5). 식(5)에 관련된  $\tilde{q}$ 와  $s$ 에 의해서 트래킹 에러는 점근적으로 0(zero)이 된다.

### B. 불확실한 요소에 대한 강인한 제어기 설계

사실상, 실제에 존재하는 불확실한 요소, 예를 들면 마찰성분, 토르리플에 관한 시변 외란 오차 등은 로봇 system의 안정성에 많은 영향을 준다. 제어기가 이런 불확실한 요소에 관해 강인한 특성을 나타내기 위해서 아래의 동력학 방정식을 나타내어 보자.

$$D(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) + G(q) + u_r = u \quad (16)$$

여기서  $u_r$ 는 vector of torque disturbance 이다. 불확실한 요소의 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|u_r\| \leq d_0 + d_1 \|\dot{q}\| + d_2 \|\ddot{q}\| \quad (17)$$

여기서  $d_0, d_1, d_2$ 는 0보다 큰 상수이다. 불확실한 요소를 고려하여 제어기는 다음과 같이 고칠 수 있다.

$$u = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\psi - \hat{\sigma}_0 s - \hat{\sigma}_1 \text{sgn}(s) \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \zeta_0 \|s\|^2, \quad \hat{\sigma}_1 = \zeta_1 \|s\|^2 \quad (19)$$

여기서  $\psi$ 와  $\eta$ 는 식(10)과 식(11)에서와 같고  $\Gamma_i, \zeta_0, \zeta_1$ 는 0보다 큰 상수이며 이 값들은 rate of adaption에 의해서 결정된다. 식(16)에서 로봇 system을 고려하여 슬라이딩 모드 식을 나타내면 다음과 같다.

$$Ds = \Phi\psi - \Phi\alpha - K_d s - \sigma \text{sgn}(s) - Bs - u_r - \hat{\sigma}_0 s \quad (20)$$

안정도 판별을 위해서 Lyapunov function을 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} s^T Ds + \frac{1}{2} \tilde{q}^T \Pi \tilde{q} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\eta_i - \hat{\eta}_i)^2 \Gamma_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 (\sigma_i - \hat{\sigma}_i)^2 / \zeta_i \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $\Pi = \rho I$ 이고  $\rho > 0$ 이다. 식(21)을 시간에 대해 미분하고 정리하여 결과를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\sigma_0 - d_1) \|s\|^2 + (\rho + \lambda_m(\Lambda) d_1 + d_2) \|s\| \|\tilde{q}\| \\ & - \rho \lambda_m(\Lambda) \|\tilde{q}\|^2 - (\sigma_1 - d_0) \|s\| \\ \leq & [\|s\| \|\tilde{q}\|] Q \begin{bmatrix} \|s\| \\ \|\tilde{q}\| \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)를 통해서 점근적으로 수렴함을 알 수 있다.

### C. 제어 법칙에 Smoothing 기법을 도입

위의 제어기법은 슬라이딩 평면  $s=0$ 에서 채틀링이 발생하게 된다. Smoothing 기법을 도입하면 이런 채틀링 현상을 줄일 수 있다. Smoothing Control law는 슬라이딩 바운드를 결정시 signum nonlinearity를 saturation nonlinearity로 바꾸게 된다. saturation nonlinearity는 다음과 같다.

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s/\phi > 1 \\ s/\phi & \text{if } -1 < s/\phi < 1 \\ -1 & \text{if } s/\phi < -1 \end{cases} \quad (23)$$

여기서  $\phi$ 는 the boundary thickness 이다. 위의 제어법칙 역시 실제로 정상상태동안 작은 채틀링 현상을 가지게 되는데 이 현상을 제거하기 위해서 본 논문은 바운드 예측을 가지는 슬라이딩 모드 제어법칙을 제안한다. 제안하는 제어법칙은 수식(9), (10), (11)에 의해서 다음과 같은 수식으로 나타낼 수 있다.

$$u = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\psi - K_d s_\phi \quad (24)$$

$$\psi_i = -\hat{\eta}_i \text{sat}\left(\sum_{j=1}^m s_j \phi_{ji}(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\right), \quad i=1, \dots, m. \quad (25)$$

$$\hat{\eta}_i = \Gamma_i \left| \sum_{j=1}^m s_{\phi_j} \Phi_{ij}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \right|, \quad i=1..m. \quad (26)$$

여기서  $s_{\phi_i} = s_i - \phi_i \text{sat}(s_i / \phi_i)$  을 가지는

$s_{\phi} = (s_{\phi_1}, \dots, s_{\phi_m})^T$  는 현재 상태의 바운드를 예측할 수가 있다. 결과적으로 정상상태에도 최적의 바운드를 예측하여 채틀링 현상을 제거 할 수 있다. 제안한 제어법칙의 안정도 판별을 위해 다음과 같은 Lyapunov function을 나타내면

$$V(t) = \frac{1}{2} s_{\phi}^T D s_{\phi} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\beta_i - \hat{\beta}_i)^2 / \eta_i \quad (27)$$

식(13)의 outside boundary layer 에는  $\dot{s}_{\phi} = \dot{s}$  그리고 inside boundary layer 에는  $s_{\phi} = 0$  로 해서 Lyapunov function을 정리하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{V}(t) \leq -s_{\phi}^T K_d s_{\phi} \quad (28)$$

위의 결과로 제안한 바운드 예측을 가지는 슬라이딩 모드 제어기는 점근적으로 0(zero)에 수렴함을 알 수 있다.

### 2.3 시뮬레이션

본 논문에서 제안한 제어 알고리즘을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 타당성을 검증한다. 시뮬레이션은 C language 사용하여 실행하였고, 시뮬레이션 대상은 Fig 1과 같은 two-link planar manipulator 이다.

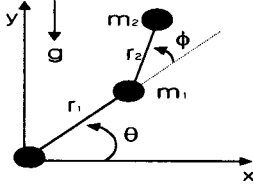


Fig 1. Two-link robot manipulator model

시뮬레이션에 사용된 파라미터는  $r_1=1m$ ,  $r_2=0.8m$ ,  $m_1=0.5kg$ ,  $m_2=0.5kg$  그리고 desired joint trajectory 는  $\theta_d = \phi_d = -90^\circ + 52.5(1 - \cos 1.26t)$ 로 한다. Fig 2는 기존의 Smoothing 기법의 슬라이딩 제어기를 사용한 경우를 나타냈고, Fig 3은 본 논문에서 제안한 바운드 예측을 갖는 슬라이딩 모드를 사용할 경우를 나타내었다.

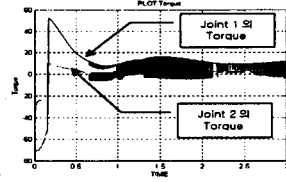
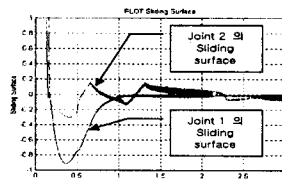
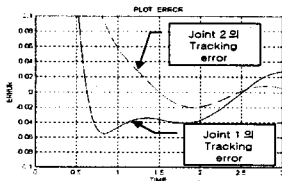


Fig 2. 기존의 Smoothing 기법의 슬라이딩 제어기 사용

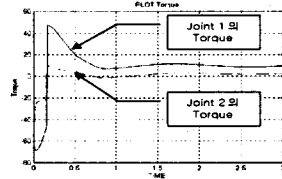
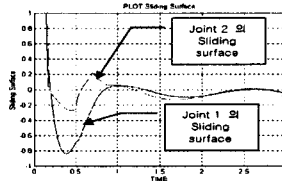
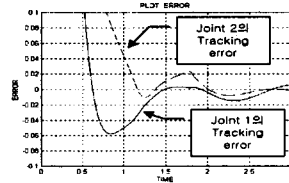


Fig 3. 제안된 슬라이딩 모드 제어기 사용 시

### 3. 결론

본 논문은 VSS 이론을 이용하여 바운드 예측을 갖는 슬라이딩 모드 제어기를 설계하였다. 본 논문에서 제안한 제어기는 기존의 Smoothing 기법의 슬라이딩 제어기보다 정상 상태에서 채틀링 현상을 감소시킬 수 있다. 본 논문의 우수성을 시뮬레이션을 통해 입증하였다.

#### [ 참고 문헌 ]

- [1] T.L.Chern and W.C. Wu, "Integral variable structure control approach for robot manipulator", IEE Proceedings Part-D, Vol.139, No.2, pp.161-166, 1992
- [2] K.D. Young, "Controller design for a manipulator using theory of variable structure system", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern, Vol.8, pp.101-109, 1978
- [3] J.J.Craig, P.Hsu, and S.S.Sastry, "Adaptive control of mechanical manipulators", IEEE Conf. Robotics Automat., 1986
- [4] J.J.E.Slotine and W.Li, "On the adaptive control of robot manipulators", Int J. Robotics Res., Vol.6, pp.49-57, 1987
- [5] W.Hahn, Stability of Motion, Berlin : Springer-Verlag, 1967