

구간 불확실 플랜트에서의 강인 제어기 설계

\* 이진규\* 손상균\* 원용규\*\* 정양웅\*\*\* 정찬수\*  
 \*숭실대학교 전기공학과 \*\*서울정수기능대학 전기기술학과 \*\*\*서해대학 전자계산과

Robust Controller Design for Interval uncertainty system

\* Jin-Kyu Lee\* Sang-Gyun Son\* Yong-Kyu Won\*\* Yang Woong Chung\*\*\* Chan-Soo Chu  
 \*Dept. Electrical Eng. Soongsil Univ \*\*Seoul-JungSoo Polytechnic college \*\*\*Dept. Computer Scie

**Abstract** - 계수적 구간 불확실 플랜트를 안정화하는 강인 제어기의 설계의 방법으로서 고정차수 극 배치(FOPA : Fixed Order Pole Assignment) 알고리즘을 이용할 수 있다. FOPA 알고리즘에 의해서 강인제어기 계수의 집합은 선형제약조건으로 표현되고, 이 조건을 만족하는 임의의 한점은 주어진 불확실 시스템을 안정화한다. 본 논문에서는 선형제약조건으로 주어진 제어기 계수의 집합에서 외란의 에너지를 최소화하는 제어기를 구하는 알고리즘을 제안한다. 일반적으로 전역 최적해를 구하는 문제는 BMI(bilinear matrix inequalities)로 표현되지만 제어기의 계수를 고정했을 때는 LMI(linear matrix inequalities)로 간략화되기 때문에 제어기계수에 대한 최소화과 성능지수에 대한 최소화를 반복함으로써 국부 최적해를 구할 수 있다. 제안한 알고리즘의 효율성을 보이기 위해 제어기 설계 예를 보이고, 그 성능을 비교·분석한다.

1. 서 론

불확실한 시스템에 대한 제어기 설계에 관한 연구결과로서 일반적으로 널리 알려진 이론은 강인  $H_2$  설계, 강인  $H_\infty$  설계,  $\mu$  설계법 등이 있으나 이러한 제어기 설계 방법으로 설계된 제어기는 고차이므로 제어기의 구현에 어려움이 많고 제어기계수의 불확정성에 대해서 페루프 시스템에 매우 민감하게 된다는 단점이 있다. 실제로 제어기 구현시에는 A/D, D/A, 유한 분해능에 의한 오차, 수치계산시 반올림에 의한 오차와 같은 부정확성을 피하기는 매우 어렵다. L. H. Keel은 기존의 강인 제어기 설계방법으로 설계된 제어기가 제어기 계수의 섭동에 대하여 상당히 작은 안정도 여유를 갖는다는 것을 몇가지 예를 들어 발표했고, 강인제어를 실제 시스템에 적용할 때 고려해야 할 점들을 지적하였다[1]. 이후 이런 문제들을 해결하기 위한 몇가지 방법들[2],[3],[10]이 제시되었으나 아직 많은 연구문제가 남아있다. 제어기 계수의 안정도 여유는 제어기의 차수가 증가할수록 작아진다. 기존의 강인제어 기법으로 설계된 제어기는 고차의 제어기이고, 이로인해서 제어기 계수에 대한 안정도 여유는 크게 줄어들게 된다. 따라서 제어기의 계수적 안정도 여유를 확보하고 설계자의 설계시양을 만족하는 저차의 제어기를 설계하는 것이 바람직하다. 구간 불확실 시스템에서 저차의 강인 제어기를 설계 방법으로서 원하는 페루프 시스템의 특성을 갖는 목적 다항식의 집합을 설정하고, 미리 정한 차수의 제어기와 구간 불확실 시스템의 페루프 특성이 목적 전달함수의 집합에 포함되도록 제어기의 계수를 구하는 방법이 있고, 이것이 고정차수 극배치(FOPA) 알고리즘이다.[6] 이 알고리즘은 구간 불확실 시스템을 안정화하는 강인제어기의 계수의 집합을 선형제약조건으로 표현하기 때문에 매우 쉽게 제어기를 설계할 수 있다. 즉, 유도된 선형제약조건을 만족하는 임의의 한 제어기는 주어진 구간불확실 시스템을 안정화한다. 하지만 FOPA 알고리즘을 이

용할 경우 우선, 원하는 목적 다항식을 어떻게 결정할 것인지에 대한 문제가 있고, 두 번째로 유도된 선형제약조건을 만족하는 제어기들 중 어떤 제어기를 선택해야만 가장 우수한 제어기를 선택하는 것인지에 대한 문제가 여전히 남아있다. 첫 번째 문제는 CDM(coefficient diagram method)과 리파토프 정리를 이용하여 해결할 수 있다.[5],[7] [5]는 시스템의 응답시간, 정착시간 등의 성능을 만족하는 특성다항식을 설계하는 기법이고, [7]은 구간 불확실 시스템에서 CDM을 이용할 수 있는 방법을 제시한다. 즉, 이 결과들이 이용함으로써 원하는 성능을 만족하는 목적 전달함수를 쉽게 설계할 수 있다.[10] 본 논문은 두 번째 문제를 해결하는 방법을 제안한다.

FOPA에 의해서 유도된 선형제약조건에서 하나의 제어기를 선택할 때, 외란 에너지의 최소화 혹은 제어입력 신호의 최소화하는 제어기를 선택할 수 있을 것이다. 이러한 조건은 일반적으로 제어기의 계수와 양한정행렬의 BMI 형태로 표현된다. 이 문제를 풀면 전역최소해를 구할 수 있지만 BMI 문제는 풀기 매우 어렵다는 단점이 있다. 하지만 만일 제어기의 계수를 고정하거나 양한정행렬을 고정하면 LMI로 표현이 되기 때문에 제어기 계수에 대한 최소화와 양한정행렬에 대한 최소화를 반복 수행하면 국부최소해를 구할 수 있을 것이다. 본 논문은 최적해를 구하는 알고리즘을 설계하는 과정의 기초연구의 결과이다. 제안한 알고리즘의 효율성을 보이기 위해서 간단한 제어 예를 보이고, 설계된 제어기의 성능을 기존의 FOPA 설계방법으로 구한 제어기의 성능과 비교·분석한다.

2. 본 론

2.1 고정차수 극 배치법 (FOPA)

FOPA 알고리즘은 구간 불확실한 플랜트를 안정화하는 고정차수의 제어기를 설계함에 있어 안정화된 목적다항식의 집합을 식 (1)과 같이 정하고, 주어진 구간플랜트 P(s)와 고정 차수 제어기 C(s)의 페루프 특성다항식이 목적 다항식의 집합에 포함되는 제어기의 계수를 설계하는 기법이다.

$$\delta_T(s) = \delta_{n+r}^T s^{n+r} + \delta_{n+r-1}^T s^{n+r-1} + \dots + \delta_0^T \quad (1)$$

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i^T \leq \delta_i^{T+}, \text{ for all } i$$

$$\left( \begin{array}{l} n : \text{구간플랜트의 차수} \\ r : \text{제어기의 차수} \end{array} \right)$$

제어기의 차수를 고정시키고 구간 플랜트와 페루프를 구성할 경우, 특성다항식의 계수는 제어기의 계수의 선형함수로 표현되고 식(1)의 집합에 포함되기 위해서는 각 계수가 상한  $\delta_i^{T+}$ 과 하한  $\delta_i^{T-}$  내부에 존재해야 한다. 이러한 제약조건은 식(2)와 같이 제어기계수를 미지수로 갖는 선형제약조건으로 표현된다.

$$\delta_i^{T-} \leq \delta_i(x, P_\sigma) \leq \delta_i^{T+}, \text{ for all } i \quad (2)$$

여기서

$$\begin{pmatrix} x = \text{제어기의 계수} \\ P_\sigma = \text{플랜트 계수 구간의 모서리} \end{pmatrix}$$

이때,  $\delta_i(x, P_\sigma)$ 는 제어기의 계수  $x$ 의 선형함수로 표현되므로 다음과 같이 간략화해서 표현할 수 있고

$$Ax \leq b \quad (3)$$

식(3)의 선형제약조건을 만족하는 제어기는 구간 불확실 플랜트를 안정화하고 원하는 특성다항식의 특성을 만족한다. 그러나 목적 다항식 계수들의 구간을 정함에 있어서 고려해야 할 문제는 전체 페루프 시스템의 동특성 및 구간불확실 시스템의 안정도와 밀접한 관련이 있기 때문에 설계자는 어느 정도의 사전정보가 요구된다. 따라서, 이 문제를 해결하기 위해서 CDM과 리파토프 안정도 충분조건을 이용해 목적다항식을 결정할 수 있다.

## 2.2. 목적 다항식의 설계

구간 플랜트에서 CDM과 리파토프 안정도 충분조건으로 설계자의 설계사양에 만족하도록 목적다항식을 구하는 단계는 다음과 같다.[10]

1. 안정도 지수  $\gamma_i$ 를 결정한다.
2. 원하는 정착시간을 만족할 만한 등가시정수의 구간  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ 를 결정한다.[5] ( $t_s = (2.5 \sim 3)\tau$ )
4.  $\delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{\max(1)}$ 를 결정된  $\gamma_i$ 와  $\tau_{\max}, \tau_{\min}$ 로써 계산한다. (보조정리 1 참조)
5. 리파토프 안정도 충분조건 
$$\min \left\{ \frac{(\delta_{i+1}^{\min})^2}{\delta_{i+2}^{\min} \delta_i^{\max}}, \frac{(\delta_{i+1}^{\max})^2}{\delta_{i+2}^{\max} \delta_i^{\min}} \right\} > 1.4656, \quad (i \leq r+n-2)$$
을 만족하도록  $\delta_i^{\min(2)}, \delta_i^{\max(2)}$ 을 구한다.[7]
6. 구간  $\delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{\max(1)}$ 와 계수  $\delta_i^{\min(2)}, \delta_i^{\max(2)}$ 를 다음과 같이 설정한다. 
$$\delta_i^{T-} = \delta_i^{\min(1)}, \delta_i^{T+} = \min[\delta_i^{\max(1)}, \min[\delta_i^{\min(2)}, \delta_i^{\max(2)}]]$$

## 2.3. 국소 최적제어기 결정

본 절에서는 식(3)으로 표현된 제어기의 선형제약조건을 만족하면서 외란의 에너지를 최소화하는 제어기를 결정하는 알고리즘을 제안한다. 우선 전달함수로 표현된 구간 불확실 시스템을 상태변수 방정식의 형태로 표현한다. 구간 불확실 전달함수가 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$G(s) = \frac{N(s, b)}{D(s, a)} \quad (4)$$

여기서,  $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ ,  $b = [b_0, b_1, \dots, b_m]$  이고  $a_i^- \leq a_i \leq a_i^+$ ,  $b_j^- \leq b_j \leq b_j^+$ 의 구간을 갖는다. 이때, 스케일링 상수  $\sigma_a$ 와  $\sigma_b$ 를 도입하면 각 구간을 식( )로 다시 표현할 수 있다

$$a_i = a_{i_0}(1 + \sigma_a \delta_a), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5-1)$$

$$b_j = b_{j_0}(1 + \sigma_b \delta_b), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5-2)$$

여기서  $|\delta_a| < 1$ 이고  $|\delta_b| < 1$ 이다. 또, 전달함수는 가제어형(혹은 가관측형) 상태방정식으로 항상 표현할 수 있고 외란신호  $w$ 와 시스템의 성능평가를 위한 측정변수  $z$ 를 도입하면 결과적으로 전달함수로 표현된 구간 불확실 시스템은 식(6)와 같은 상태방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + [B_p, 0]p + B_w w + B_u u \\ q &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{q1} \\ C_{q2} \end{bmatrix} x = C_q x \\ z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y &= C_y x + [0, D_{yp}]p + D_{yw} w + D_{yu} u \end{aligned} \quad (6)$$

$$q = \Delta p$$

여기서,  $\Delta_1 = \text{diag}(\delta_a)$ ,  $\Delta_2 = \text{diag}(\delta_b)$ 이고

$$q = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} p = \Delta p \text{ 이다.}$$

전달함수로 표현된 제어기 역시 가제어형(가관측형)의 상태방정식으로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} x_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{aligned} \quad (7)$$

식(6)의 플랜트와 (7)의 제어기로 페루프를 구성하고 외란  $w$ 와 출력  $z$ 의 전달함수  $T_{zw}$ 의 무한대 노음을 최소화하면 외란의 에너지를 최소화할 수 있다.

$$\min \gamma \quad \text{s.t.} \quad \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (8)$$

위의 문제는 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_\infty + P_\infty A_{cl} & P_\infty B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P_\infty & -\gamma I_{n_e} & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$P_\infty > 0$$

여기서  $A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$ 은 페루프시스템의 계수이다. 즉, 식(9)의 두 개의 조건을 만족하는 양의한정행렬  $P_\infty$ 가 존재하면  $T_{zw}$ 의 무한대 노음을  $\gamma$ 인 제어기가 존재한다. 또 (3)과 (9)를 동시에 만족하면서  $\gamma$ 를 최소화하는 제어기가 원하는 제어기이다. 하지만, (9)는 제어기의 계수와  $P_\infty$ 의 BMI 형태이다. 따라서 일반적으로 (9)의 문제를 푸는 것은 매우 어렵다. 하지만 (9)는 제어기의 계수를 고정했을 때  $P_\infty$ 와  $\gamma$ 의 LMI 형태가 된다. 따라서 제어기의 계수가 고정되면 그 제어기의 최대 외란감소 성능을 계산할 수 있다. 따라서 (3)과 (9) 문제를 동시에 접근하지 않고 (3)을 만족하는 임의의 제어기를 구하고, 그 제어기를 (9)에 대입한 후  $\gamma$ 를 최소화하는 과정을 반복함으로써 국소 최적해를 찾을 수 있다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘은 다음과 같다.

1. (3)을 만족하는 임의의 한 제어기의 계수  $x$ 를 구한다. ITER = 0
2.  $x_i$ 를 제외한 나머지 계수는 고정시키고 (3)에 의해서  $x_i$ 의 한계를 구한 후에 (9)를 이용하여 그 한계내에서 최소의  $\gamma$ 값과 그때의 같은  $x_i$ 를 찾아낸다. (Line search algorithm과 Semidefinite programming을 이용)
3.  $i = 0, 1, \dots, k$ 에 대해서 2의 과정을 반복한다.
4.  $\gamma_{\text{ITER}} = \min[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k]$
5.  $\gamma_{\text{ITER}} - \gamma_{\text{ITER}-1}$  이 0.0001보다 작아지면
- 6을 수행하고, 아니면 2과정으로 되돌아간다.

6. 구해진  $x$ 로 제어기를 구성한다.

2.4 모의실험

본 절에서는 위에서 설명한 알고리즘을 이용하여 간단한 구간불확실 플랜트를 안정화하는 제어기를 설계한다. 다음과 같은 구간 불확실 플랜트가 있다고 가정한다.

$$G(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (10)$$

$$\alpha_0 \in [\alpha_0^-, \alpha_0^+] = [0.4, 0.6], \alpha_1 \in [\alpha_1^-, \alpha_1^+] = [0.6, 0.8]$$

$$\beta_0 \in [\beta_0^-, \beta_0^+] = [1.1, 1.3], \beta_1 \in [\beta_1^-, \beta_1^+] = [0.6, 0.8]$$

(10)의 플랜트를 안정화하는 제어기는 다음과 같이 1차 제어기로 설정하였다.

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} \quad (11)$$

우선, 목적다항식의 집합을 설정하기 위해 2.2절에서 보인 알고리즘을 이용하여 다음과 같이 구하였다.

$$T(s) = s^3 + [7.1, 10]s^2 + [25.5, 34.8]s + [36.4, 44.4] \quad (12)$$

위의 목적다항식은 정착시간이 2초이고 (10)의 구간 불확실 플랜트를 안정화하는 특성다항식의 집합이다. (10)과 (11)로 폐루프를 구성하면 그때의 특성다항식은 다음과 같다.

$$\Delta(s) = s^3 + (a_0 + b_1 \beta_1)s^2 + (a_0 \alpha_1 + a_0 + b_0 \beta_1 + b_1 \beta_0)s + (a_0 \alpha_0 + b_0 \beta_0)$$

이때,  $\{\Delta(s)\} \subseteq \{T(s)\}$ 을 만족해야만 한하므로 다음과 같은 제약조건을 유도할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 7.1 \\ 25.5 - a_0 \\ 36.4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \beta_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 34.8 - a_0 \\ 44.4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서 식(10)의 계수공간에서 계수들의 구간에 의해서 형성되는 공간의 모서리점을 이용하여 식(3)과 같은 선형제약조건을 유도할 수 있다. 또 (9)의 조건을 유도한다. 마지막으로 2.3절의 알고리즘을 수행함으로써 다음과 같은 제어기를 구할 수 있었다.

$$C(s) = \frac{3.5s + 30.8}{s + 6.2}$$

이때의  $\|T_{zw}\|_\infty$ 은 1.587이다. 설계된 제어기의 성능을 비교하기 위해 기존의 FOPA 제어기 설계방법을 이용하여 제어기를 구하였다. 식(3)의 제약공간에서 제어기 계수의 합이 최소가 되는 제어기를 구하였다. 이때 제어기는 다음과 같다.

$$C(s) = \frac{2.9s + 31.1}{s + 5.3}$$

그리고 이때의  $\|T_{zw}\|_\infty$ 은 1.6777이다. 그림1은 구해진 제어기로 폐루프를 구성했을 때 스텝응답을 계산한 것이다. 플랜트가 구간 불확실하므로 각각의 구간의 값을 무작위로 선택하여 응답을 구했다. 모든 스텝응답이 2초부근에서 정착되는 것을 알 수 있다.

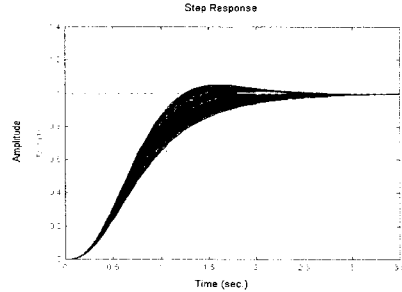


그림 1 스텝응답

결과적으로 제안한 알고리즘은 구간불확실 시스템에서 고정된 차수의 강인한 제어기를 설계하는 데 효과적임을 보였다.

3. 결 론

본 논문에서는 구간 불확실 플랜트의 제어기를 설계함에 있어 계수도법과 리파토프 안정도 충분조건을 사용하여 설계사양에 만족하면서 충분히 안정한 목적다항식의 구간을 정하고 이 목적다항식의 구간 안으로 폐루프 특성다항식의 계수를 포함시키는 고정차수 극 배치법을 이용하여 제어기의 제약을 선형제약조건으로 표현하고, 이 제약공간에서 외란의 에너지를 최소화하는 제어기를 찾아내는 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘을 효율성을 보이기 위해 간단한 구간불확실 플랜트를 안정화하고 외란의 에너지를 최소화하는 강인한 제어기를 설계하였다. 기존의 FOPA 방법과 비교할 경우, 제안한 알고리즘으로 구한 제어기가 더 성능이 우수함을 보였다.

[참고 문헌]

- [1] L.H. Keel, S.P. Bhattachayya, "Robust, Frag Optimal", IEEE Trans, Automatic Control, Vol42, p 1105 1997
- [2] L.H. Keel, S.P. Bhattachayya, "Stability Marg Digital Implementation of Controllers", Proceedi the ACC June 1998 p2852~2856
- [3] Peter Dorato "Non-Fragile Controller Design Overview" Proceedings of the ACC June, 1998, p 2831
- [4] L.H. Keel, S.P. Bhattachayya, "Robust stabili performance with fixed-order Controllers", Autom 35(1999) p1717~1724
- [5] S. Manabe, "Coefficient Diagram Method", 14th Symposium on Automatic Control in Aerospace, p 210, Aug 1998
- [6] S.P. Bhattachayya, L.H. Keel, M. Ikeda "New A to Feedback Design" International Workshop 충북대 July 1999
- [7] 주성준, 박영배, "리파토프 정리를 이용한 강인한 제어기 설계", Proceedings of the 13th KACC, Oct 1999
- [8] S.P. Bhattachayya, H.Chapellat, L.H. Keel Controll:The Parametric Approach, Upper Saddle NJ:Prentice Hall, 1995
- [10] 이진규, 차영호, 정태진, 박용식, 정찬수 "리파토프 정리 이용한 구간 플랜트의 제어기 설계" 1999년도 대한 전기학회 추계 학술대회 논문집, 1999.11