

Relay Feedback을 이용한 시간지연 시스템에 대한 제어기 설계

이규용, 이석원
호서대학교 제어계측공학과

Controller Design for Time-Delay System Using Relay Feedback

Kyu-Yong Lee, Suk-Won Lee
Dept. Control & Instrumentation Eng., Hoseo University

Abstract - In this paper, we show the simple methods of designing the Smith predictor for the long dead time processes. We are using the relay feedback to model the processes in the second-order plus dead time structure. The model is able to represent a various class of processes dynamics including low- or high-order, and monotonic or oscillatory process. A PID type controller is proposed for the main controller in the Smith controller, which insure the stability of overall system. Simulation Examples are also provided to illustrate the effectiveness and applicability of the proposed controller.

1. 서 론

PID 제어기는 간단한 구조를 가지고 있으며 쉽게 구현할 수 있기 때문에 산업현장에서 널리 쓰이고 있으며 다양한 설계방법들이 제시되고 있다[1][2][3][7]. 그러나 시간지연이 있는 플랜트에 대해서는 제어기를 설계하기가 비교적 간단하지 않으며, 원하는 성능을 보장하기가 어렵다. 시간지연이 있는 플랜트에 대한 제어기로써 Smith Predictor는 단순한 구조를 가지면서도 효과적으로 시간지연문제를 해결할 수 있으나 플랜트의 모델이 완벽하게 플랜트와 동일해야 하는 제약조건이 있다. 실제로 완벽한 수학적 모델을 구하기는 불가능하므로 항상 모델링 오차가 존재하게 되며 이러한 모델링 오차는 Smith predictor의 성능 및 안정도에 큰 영향을 미치게 된다[5][6]. 본 논문에서는 Wang등이 제안한 시간지연항이 포함된 2계 근사화 모델[3]을 릴레이 피드백을 이용하여 구하는 방법을 보이는데, 이 방법은 플랜트의 주파수 응답 중 특정한 두 점만을 이용하여 모델의 모든 파라미터를 결정할 수 있으며, 1계 모델에 비해 다양한 동적 특성을 갖는 플랜트를 표현할 수 있다. 이를 바탕으로 안정도가 보장되는 PID형태의 Smith Predictor의 제어기를 설계하는 방법을 제시하며, 다른 동적 특성을 가지는 플랜트에 대한 모의 실험 결과를 통해 제시된 설계방법의 효용성을 보인다.

2. 릴레이 피드백을 이용한 모델링

Astrom[2][7], Wang[4] 등에 의해 다양하게 연구되고 있는 릴레이 피드백은 주파수 응답의 여러 포인트를 비교적 정확하고 간단하게 구할 수 있다. 본 논문에서는 플랜트를 모델링하는데 주파수응답의 위상이 $-\pi$, $-\pi/2$ 인 두 개의 포인트만이 필요하다. 그림 1.의 표준형 릴레이 피드백에서 플랜트가 적어도 π 라디안의 위상지연을 갖는다면 릴레이 피드백의 출력은 주기가 t_c 인 진동을 일으킨다. 만약 d 가 릴레이의 크기라면 릴레이의 출력의 크기는 릴레이신호를 푸리에 급수 전개했을

때의 첫째 고조파인 $4d/\pi$ 가 된다. 만약 그때 플랜트의 출력이 a 라면 임계이득[2]은 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$k_c = \frac{4d}{\pi a} \quad (1)$$

이 때, 임계주기[2]는

$$\omega_c = 2\pi/t_c \text{이다.}$$

측정시의 오차를 줄이기 위해서 히스테리시스가 있는 릴레이를 사용할 수 있다. 위상이 $-\pi/2$ 인 포인트는 적분기를 릴레이의 앞이나 뒤에 추가함으로써 구할 수 있다. (그림 2.) 이때의 이득과 주파수는 마찬가지로 계산된다.

$$k_b = \frac{4d}{\pi a} \quad (1)$$

이 때, 임계주기는

$$\omega_b = 2\pi/t_b \text{이다.}$$

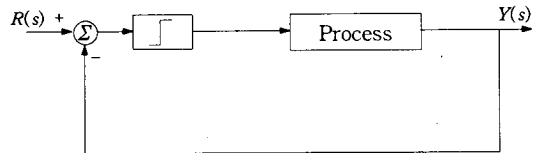


그림 1. 릴레이 피드백

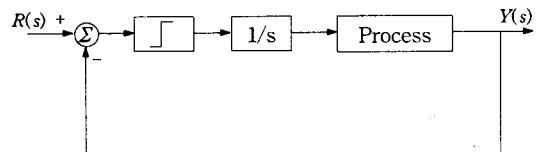


그림 2. 적분기를 포함한 릴레이 피드백

$-\pi$ 포인트는 Ziegler-Nichols의 PID설계방법에서 파라미터를 결정하는 요소[1][2][7]이다. 나이키스트 곡선에서 ω_c , ω_b 는 각각 음의 실수축의 교차점과, 음의 허수축과의 교차점이다.

위에서 구한 주파수 응답의 위상이

$$\angle G(j\omega_c) = -\pi, \quad \angle G(j\omega_b) = -(\pi/2)$$

를 만족하는 두 개의 주파수 포인트 $s=j\omega_c$, $s=j\omega_b$ 를 이용하여 다음과 같은 2계 근사화 모델을 결정한다.

$$G_m(s) = \frac{e^{-sL}}{as^2 + bs + c} \quad (2)$$

이때, $G(j\omega_c) = G_m(j\omega_c)$, $G(j\omega_b) = G_m(j\omega_b)$ 라면

$$c - a\omega_c^2 + j b \omega_c = \frac{\cos(\omega_c L) - j \sin(\omega_c L)}{-|G(j\omega_c)|} \quad (3)$$

$$c - a\omega_b^2 + j b \omega_b = \frac{\cos(\omega_b L) - j \sin(\omega_b L)}{-j|G(j\omega_b)|} \quad (4)$$

식(3), (4)를 풀면

$$\frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[\frac{\sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (6)$$

$$b = \frac{\sin(\omega_c L)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[\frac{\omega_c^2 \sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\omega_b^2 \cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (8)$$

을 얻는다. 식(5)는 비선형 방정식이므로 직접 해를 구할 수는 없다. 그러나 근접 해를 알면 Newton-Raphson 방법으로 거의 정확한 해를 구할 수 있으므로 우선 근접해를 얻기 위해 다음의 근사식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= px^2 + qx \\ \cos(x) &= px^2 + rx + 1 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$p = \frac{8}{\pi^2}(1 - \sqrt{2}), \quad q = \frac{2}{\pi}(2\sqrt{2} - 1), \quad r = \frac{2}{\pi}(2\sqrt{2} - 3)$$

이다. 식(5)와 (9)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} p(\omega_c^2 - \theta\omega_b^2)L^2 + (q\omega_c - \theta r\omega_b)L - \theta &= 0, \quad (10) \\ \theta &= \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \end{aligned}$$

다음은 식(10)의 해 중 절대값이 작은 것을 선택해서 다음의 Newton-Raphson 방법의 초기값으로 이용한다.

$$L_2 = L_1 - \frac{f(L_1)}{f'(L_1)} \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} f(L) &= \frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} - \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \\ f'(L) &= \frac{\omega_b \sin(\omega_b L) \sin(\omega_c L) + \omega_c \cos(\omega_b L) \cos(\omega_c L)}{\cos^2(\omega_b L)} \end{aligned}$$

이다.

식(11)에 의해 얻어진 L 을 식(6), (7), (8)에 대입하여 2계 근사화 모델을 얻는다.

3. Smith Predictor의 제어기 설계

그림 3에서 $R(s)$ 는 기준입력을, $Y(s)$ 는 출력을, $D(s)$ 는 외란을 각각 나타내며, $C(s)$ 는 주제어기, $G_p(s)e^{-sd}$ 는 플랜트이고, $G_m(s)e^{-sL}$ 은 근사 모델이다. 이때, 전달함수 $Y(s)/R(s)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{C(s)G_p(s)e^{-sd}}{1 + C(s)G_m(s) + C(s)[G_p(s)e^{-sd} - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (12)$$

외란에 대한 전달함수 $Y(s)/D(s)$ 는

$$\frac{G_p e^{-sd} [1 - \{G_m(s)e^{-sL}C(s) - C(s)G_m(s)\}]}{1 + C(s)G_m(s) + C(s)[G_p(s)e^{-sd} - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (13)$$

가 된다.

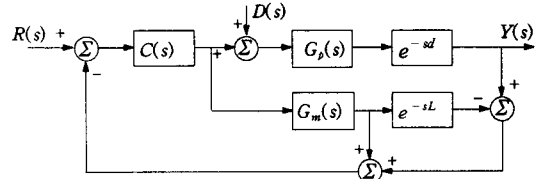


그림 3. Smith Predictor

위의 구조에서 플랜트와 모델식이 완전히 일치한다고 하면 즉,

$$G_m(s)e^{-sL} \approx G_p(s)e^{-sd} \approx \frac{1}{as^2 + bs + c} e^{-sL} \quad (14)$$

이면 기준입력에 대한 출력의 전달함수는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \approx \frac{C(s)G_p(s)e^{-sd}}{1 + C(s)G_m(s)} \quad (15)$$

외란에 대한 출력의 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} \approx \frac{G_p e^{-sd} [1 - \{C(s)G_m(s)e^{-sL} - C(s)G_m(s)\}]}{1 + C(s)G_m(s)} \quad (16)$$

식(15), (16)에서 입력과 외란에 대한 특성방정식은 서로 동일하며 시간지연항이 제거되었음을 보여주고 있다. 하지만 실제 적용에서는 식(14)를 만족할 수 없기 때문에 그에 따른 성능과 안정도를 고려해야 한다 [5][6]. 본 논문에서는 다음의 제어를 제안한다.

$C(s)$ 는 다음의 PID제어기라고 하자.

$$C(s) = k \frac{\alpha^2 s + \beta s + \gamma}{s} \quad (17)$$

그리고 제어기의 계수를 모델의 분모의 계수와 같게 놓으면 즉 $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ 이면 식(12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kN(s)}{s + k + k(as^2 + \beta s + \gamma)M(s)} \quad (18)$$

$$M(s) = [G_p(s)e^{-sd} - G_m(s)e^{-sL}],$$

$$N(s) = (as^2 + \beta s + \gamma)G_p(s)e^{-sd}$$

만약 $G_p(s)$ 와 $G_m(s)$ 가 모두 안정하다면 식(18)은 어떠한 양의 k 에 대해서도 안정하게 된다[6]. 그리고 모델이 비교적 정확하다면 식(18)에서 $M(s)$ 의 동적특성이 매우 작아지게 되고 $N(s) \approx e^{-sd}$ 이 되어 전체 시스템의 전달함수가 다음의 식과 유사하게 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \approx \frac{k}{s + k} e^{-sd} \quad (19)$$

시스템의 출력은 단지 k 에 의해서만 결정된다. 하지만 식(18)에서 모델링 오차는 k 에 비례하게 된다. 따라서

모델링 오차의 영향을 줄이기 위해선 제어기의 이득 k 를 작게 할수록 좋으나, 식(19)에서 k 는 시상수의 역수가 되므로 응답속도가 느려지게 된다. 따라서 k 값의 선정은 응답속도와 모델링 오차사이의 적절한 타협이 필요한데, 만약 모델링 오차의 크기를 안다면 그에 따른 k 를 결정할 수 있으나, 실제적으로 불가능하므로 많은 모의실험 결과에 의한 적절한 k 값을 선정했는데, 시간지연이 없는 모델의 등가 시상수 $1/\tau_0$ [3]의 1/3정도가 적절하다.

$$\frac{1}{\tau_0} = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{b^2-2ac}}, & b^2-4ac \geq 0 \\ \frac{b}{2a}, & b^2-4ac < 0 \end{cases} \quad (20)$$

a, b, c : 모델의 계수

$$k = \frac{1}{3\tau_0}$$

4. 모의실험

Example 1

플랜트가

$$G_p(s) = \frac{1}{(s^2+2s+3)^3(s+3)} e^{-5s}$$

이고, 근사화 모델은

$$G_m(s)e^{-sL} = \frac{1}{60.9539s^2+77.5317s+81.0119} e^{-6.3629s}$$

일 때 $1/\tau_0 = 0.636$ 이며, 제안된 방법에 의해

$$C(s) = k \left(\frac{60.9539s^2+77.5317s+81.0119}{s} \right)$$

$k = 1/3\tau_0 = 0.212$ 이다.

모의실험의 결과는 그림 4에 나타내었다. 입력으로는 단위 스텝을 가했으며, 80초 후에 -1의 부하 외란을 가했을때의 응답을 나타낸다. 제안된 방법의 효용성을 검증하기 위해 최근의 PID제어기설계방법 중 우수한 성능을 나타내는 Wang등이 제안한 제어기와 비교하였다.

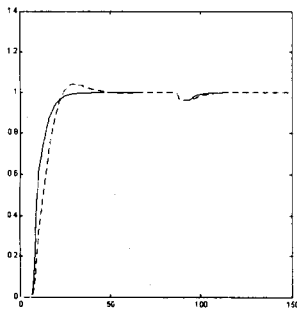


그림 4. Example 1.
(실선: 제안방법, 점선: PID제어기)

Example 2

플랜트는

$$G_p(s)e^{-sL} = \frac{1}{(s^2+s+1)(s+2)^2} e^{-10s}$$

이고, 근사화 모델이

$$G_m(s)e^{-sL} = \frac{1}{6.7393s^2+6.5916s+4} e^{-10.3079s}$$

일 때 $1/\tau_0 = 0.489$ 이며, 제안된 방법에 의해

$$C(s) = k \left(\frac{60.9539s^2+77.5317s+81.0119}{s} \right)$$

$k = 1/3\tau_0 = 0.163$ 이다.

부하 외란은 -0.5의 크기로 80초후에 가했으며 마찬가지로 PID 제어기와 비교를 나타내었다.

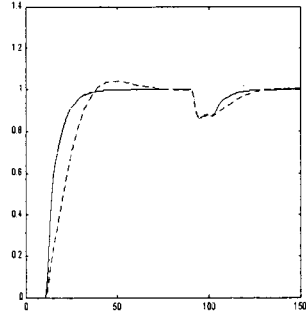


그림 5. Example 2.
(실선: 제안방법, 점선: PID제어기)

5. 결 론

긴 시간지연이 존재하는 플랜트를 제어하는데 있어서 Smith Predictor의 주제어기를 설계하는 문제를 다루었다. 릴레이 피드백을 이용하여 플랜트를 시간지연항이 있는 2계 모델로 근사화하고 이를 플랜트의 모델로 가정하여 Smith Predictor의 주제어기를 설계하였다. 제시된 제어 시스템의 응답은 1계 시스템의 응답특성을 가지며 플랜트가 안정하고 모델 또한 안정하면, 전체 시스템의 응답특성을 결정짓는 매개변수 k 의 크기에 관계없이 안정도가 유지된다. 그러나 모델링 오차에 의한 영향은 k 에 비례하게 되지만 응답 속도는 반비례하므로 적절한 값을 선택해야 하는데 2계 근사화 모델의 시상수를 이용하여 결정하는 방법을 제시하였다.

(참 고 문 헌)

- [1] W. K. Ho et al., "Performance and Gain and Phase Margins of Well-Known PID Tuning Formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., VOL. 4, NO. 4, pp. 473-477, 1996
- [2] K. J. Astrom et al., "Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins", Automatica, VOL. 20, NO. 5, pp. 645-651, 1984
- [3] Q. G. Wang et al., "PID Tuning for Improved Performance", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., VOL. 7, NO. 4, pp. 457-465, 1999
- [4] Q. G. Wang et al., "A Technique for Frequency response Identification from Relay Feedback", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., VOL. 7, NO. 1, pp. 122-128, 1999
- [5] K. K. Tan et al., "New Approach For Design and Automatic Tuning of the Smith Predictor Controller", Ind. Eng. Chem. Res., VOL. 38, pp.3438-3445, 1999
- [6] A. C. Ioannides et al., "Stability Limits of a Smith Controller in Simple Systems Containing a Time Delay", Int. J. Control, VOL. 29, NO. 4 pp.557-563, 1979
- [7] K. J. Astrom et al., PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2nd Edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park, 1999