

선형행렬부등식을 이용한 비선형 시스템의 TS 퍼지 제어기 설계

김진성\*\*\*, 최 익\*\*, 윤태웅\*

\*고려대학교 전기공학과 \*\*한국과학기술연구원 지능제어연구센터

Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Controllers for Nonlinear Systems using LMIs

Jinsung Kim\*\*\*, Ick Choy\*\*, Tae-Woong Yoon\*

\*Dept. of Electrical Eng., Korea Univ. \*\*Intelligent System Control Research center, KIST

**Abstract** - In this paper, we consider multi-objective synthesis of fuzzy controllers for a widely used special class of the Takagi-Sugeno(TS) fuzzy systems. We propose a new fuzzy controller utilizing the strategy of rescaling and show that synthesis of the proposed controllers satisfying multiple design objectives can be reduced to a simple linear matrix inequality(LMI) problem. Finally, an application to an inverted pendulum on a cart is presented to illustrate the validity of the proposed method.

1. 서 론

퍼지 제어의 응용이 모색되던 초창기에는 제어기의 설계가 일반적으로 시행착오에 의해 이루어졌으며 시스템의 안정도가 이론적으로 보장되지 못하고 시뮬레이션에 의한 경험적 입증에만 의존하는 경우가 많았는데 이러한 방식은 엄격한 검증을 중시하는 제어 분야의 특성상 많은 비판을 받아왔다. 최근에는, TS(Takagi-Sugeno) 퍼지 모델을 이용하는 제어 시스템을 중심으로 이러한 논란을 불식시킬 수 있는 주요한 이론적 성과들이 관찰되고 있다[3][4]. TS 퍼지 모델은(1), 결론부가  $\dot{x} = A_i x + B_i u$  형태인 퍼지 IF-THEN 규칙들로 표현된다. 본 논문은 폭넓게 사용되는 1차원의 콘(cone)에 속한 입력 행렬  $B_i$ 를 가진 TS 퍼지 시스템을 다룬다. 이 시스템에 변형된 TS 퍼지 제어기를 적용하여 매우 편리하게 안정한 제어기 설계를 수행할 수 있음을 관찰한다. 선형 행렬 부등식은 콘벡스 최적화 기법(convex optimization techniques)에 의해 정확하게 풀 수 있기 때문에 제안된 설계 방법론은 매우 실용적인 가치를 지닌다.

본 논문의 구성은 다음과 같다: 2.1절에서 TS 퍼지 모델, 선형 행렬 부등식 그리고 2차(quadratic) 안정도에 대하여 간단히 소개한다. 2.2절에서 TS 퍼지 모델로 표현되는 비선형 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기 설계 방법론을 구체적으로 제시하고, 2.3절에서는 본 논문에서 제안된 방법론을 도입된자에 적용하여 설명한다. 마지막으로 3장에서는 결론을 내린다.

2. 본 론

2.1 TS 퍼지 모델, 2차안정도 및 선형행렬부등식

본 논문은 TS 퍼지 모델로 표현된 비선형 시스템을 안정화시키는 퍼지 제어기의 설계를 다룬다. TS 퍼지 모델의 IF-THEN 규칙은 다음과 같은 형식으로 주어진다:

Plant 규칙  $i$  :

IF  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $z_g(t)$  is  $M_{ig}$ ,

THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i=1, \dots, r. \quad (1)$$

여기서  $z_i(t)$ 와  $M_{ij}$ ,  $i=1, \dots, r, j=1, \dots, g$ 는 각각 전건부 변수와 퍼지 집합이고  $r$ 은 IF-THEN 규칙의 개수이다. TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의하면, 전체 시스템의 상태 방정식은 케도  $z(t)$ 에 따른 가중평균의 형태로 표현된다:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (2)$$

단,  $u(t) \in R^p$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $z(t) \in R^g$ . 방정식 (2)에서 하중 함수(weight functions)는 다음과 같이 정의된다:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t)).$$

이때,  $M_{ij}(z_j(t))$ 은 퍼지 집합  $M_{ij}$ 에서  $z_j(t)$ 의 소속 정도이다. 음이 아닌 하중 함수  $w_i$ 는 일반적으로 다음을 만족한다:

$$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

본 논문에서는 (3)이 항상 만족되는 것과 벡터  $x(t)$ 와  $z(t)$ 이 실시간으로 측정 가능함을 가정한다. 하중 함수를  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ 로 정규화 하면 상태방정식(2)는 polytopic 형식으로 쓰여질 수 있다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (4)$$

이때, 정규화된 하중함수  $h_i$ 는  $h_i(z(t)) > 0, i=1, \dots, r$ 과  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall t \geq 0$ 을 만족한다.  $u(t)=0, \forall t \geq 0$ 인 경우에, TS 퍼지 시스템 (4)는 입력이 없는 polytopic 시스템이 된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t). \quad (5)$$

안정도 이론으로부터 잘 알려진 바와 같이, 0이 아닌 모든 케적에 따라 감소하는 양의 정부호(positive definite) 2차 함수  $V(x) = x^T Q^{-1} x$ 가 존재하면 시스템은 안정하고, 이러한 리아프노프(Lyapunov) 함수를 갖는 시스템을 2차 안정(quadratic stable)하다고 말한다. Polytopic 시스템 (5)에서, 0이 아닌 케적  $x(t)$ 에 따른  $V$ 의 미분값은 다음과 같이 주어진다:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \{ x^T(t) Q^{-1} x(t) \}$$

$$= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x^T(t) (A_i^T Q^{-1} + Q^{-1} A_i) x(t).$$

$Q > 0$ 인 경우  $A_i^T Q^{-1} + Q^{-1} A_i < 0$ 은  $A_i Q + Q A_i^T < 0$ 과 동치이므로, polytopic 시스템 (5)는 대칭행렬  $Q$ 가 다음을 만족할 때 2차 안정이다[2][4]:

$$Q > 0, \quad A_i Q + Q A_i^T < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (6)$$

주목할 점은 위 부등식의 왼편은 행렬 변수  $Q$ 에 대하여 모두 선형이라는 점이다. 또한, 각  $i \in \{1, \dots, r\}$ 에 대하여

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i = A, \text{를 만족하는 } z(t) \in R^g \text{가 존재한다면,}$$

부등식의 집합(6)은 TS 퍼지 시스템(5)이 2차 안정이기 위한 필요충분조건이 된다.

(6)을 만족하는  $Q$ 를 구하거나 그러한  $Q$ 가 존재하지 않는다는 것을 결정하는 것은 LMI feasibility problem으로 불리는 convex문제이다. LMI는 다음 형태의 제한 조건이다:

$$A(x) \triangleq A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0, \quad (7)$$

단,  $x \triangleq (x_1, \dots, x_N)$ 는 변수,  $A_0, \dots, A_N$ 은 대칭행렬이고 " $<$ "는 음의 정부호(negative definite)임을 의미한다. 많은 제어 문제들이 선형 행렬 부등식으로 수식화될 수 있는데, polytopic 시스템(5)의 2차 안정도도 그 중의 하나이다.

## 2.2 선형행렬부등식을 이용한 제어기 설계

비례적인 입력 행렬을 갖는 TS 퍼지 시스템 집합을  $TS(\alpha, B)$ 라 정의하자. 즉,

$$\frac{B_1}{\alpha_1} = \frac{B_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{B_r}{\alpha_r} = B \quad (8)$$

여기서  $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$  이고  $B \in R^{n \times b}$ 이다. 이러한 TS 퍼지 시스템은 다음의 상태 방정식으로 나타낸다:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + \alpha_i B \mathbf{u}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) A_i \mathbf{x} + \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t)) \right\} B \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (9)$$

시스템(9)에 대한 TS 퍼지 제어기를 약간 변형시켜주면 좀더 간단하고 편리한 해를 구할 수 있다. 이러한  $TS(\alpha, B)$ 의 경우에, 특별히 다음과 같이 정의되는 변형된 TS 퍼지 제어기를 고려해 보자:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) F_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t))}. \quad (10)$$

변형된 TS 퍼지 제어기를 시스템(9)에 적용하면, 페루프 상태 방정식이 다음과 같이 간단히 정리된다:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) A_i \mathbf{x}(t) \\ &+ \frac{\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t)) \right\} B \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) F_i \mathbf{x}(t) \right\}}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) (A_i + B F_i) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

이 식은 공통입력행렬  $B$ 를 갖는 TS 퍼지 시스템의 형태가 된다. 이 퍼지 시스템에 대하여 안정도, 시스템의 반응속도 및 제어 입력제한과 같은 제어성능을 고려하여 제어기를 설계하고자 한다.

먼저 반응 속도와 관련된 감쇄비율(decay rate)을 안정도 조건에 고려한다. TS 퍼지 시스템의 감쇄 비율은 모든 궤적  $\mathbf{x}(t)$ 에 대하여 다음의 조건을 만족하는  $\beta$ 의 최대 값으로 정의한다:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq C e^{-\beta t}.$$

여기서,  $C \triangleq \frac{\lambda_{\max}(P^{1/2})}{\lambda_{\min}(P^{1/2})} \|\mathbf{x}(0)\|$ 이다. 감쇄 비율을 구하는데 있어서 2차 리아푸노프 함수를 사용한다. 만약에 모든 궤적  $\mathbf{x}(t)$ 에 대하여

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t)) \quad (12)$$

라면,

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) e^{-2\beta t} \quad (13)$$

이고,  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq C e^{-\beta t}$ 을 만족한다. 여기에 대한 증명은 다음과 같다:

2차 리아푸노프 함수  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P^{1/2} P^{1/2} \mathbf{x}$ 으로 (13)을 다시 표현하면,

$$\begin{aligned} \|P^{1/2} \mathbf{x}(t)\|^2 &\leq \|e^{-\beta t} P^{1/2} \mathbf{x}(0)\|^2 \\ \text{과 같다. Rayleigh's principle [6]을 이용하면,} \\ \|\mathbf{x}(t)\|^2 &\leq \frac{\|P^{1/2} \mathbf{x}(t)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{\|P^{1/2}(e^{-\beta t} \mathbf{x}(0))\|^2}{\lambda_{\min}(P)} \\ &\leq \frac{\|P^{1/2}\|^2 \|e^{-\beta t} \mathbf{x}(0)\|^2}{\lambda_{\min}(P)} = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\mathbf{x}(0)\|^2 e^{-2\beta t} \\ &= C^2 e^{-2\beta t} \end{aligned}$$

이다. 따라서 (9)와 (12)를 이용하여 2차 안정도 기준을 유도하면,

$$Q > 0, (A_i + B F_i) Q + Q (A_i + B F_i)^T + 2\beta Q < 0, \quad i=1, \dots, r, \quad (14)$$

이고, 새로운 변수  $Y_i = F_i Q$ ,  $i=1, \dots, r$ 을 도입하면, 안정도 조건(14)은 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$Q > 0, A_i Q + Q A_i^T + B Y_i + Y_i^T B^T + 2\beta Q < 0, \quad i=1, \dots, r. \quad (15)$$

다음으로, 입력을  $\sigma$ 보다 작게 제한하는 입력 제한을 고려해보자. TS 퍼지 제어기(10)을

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) F_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t))} = \frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{F_i \mathbf{x}(t)}{\alpha_i} \right\}}{\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i(\mathbf{z}(t))}$$

으로 분자부분에  $\alpha_i$ 를 첨가하여 표현할 수 있다. 여기서, 만약

$$\left\| \frac{F_i \mathbf{x}(t)}{\alpha_i} \right\| < \sigma$$

이면,

$$\|\mathbf{u}\| < \sigma$$

을 만족하게 된다. 먼저,  $\epsilon$ 을 원점을 중심으로  $P$ 에 의하여 구해지는 타원이라 정의하면 다음과 같이 표현된다 [7]:

$$\epsilon \triangleq \{ z \in R^n \mid z^T P z \leq 1 \}.$$

초가치  $\mathbf{x}(0) \in \epsilon_P$ 라 가정하면,

$$\mathbf{x}(0)^T P \mathbf{x}(0) \leq 1$$

이므로 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

여기서  $Q \triangleq P^{-1}$ 이다.

또한,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \epsilon_P} \left\| \frac{F_i \mathbf{x}}{\alpha_i} \right\| &= \max_{\|P^{1/2} \mathbf{x}\| \leq 1} \left\| \frac{F_i P^{-1/2} P^{1/2} \mathbf{x}}{\alpha_i} \right\| \\ &= \frac{\|F_i P^{-1/2}\|}{\alpha_i} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(F_i P^{-1/2} P^{-1/2} F_i^T)}}{\alpha_i} < \sigma \end{aligned}$$

이므로,

$$F_i P^{-1} F_i^T < \alpha_i^2 \sigma^2$$

이 성립한다. 이 부등식은 다음의 선형행렬부등식으로 변환된다:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^2 \sigma^2 I_b & Y_i \\ Y_i^T & Q \end{bmatrix} > 0, \quad i=1, \dots, r, \quad (17)$$

여기서,  $Y_i = F_i Q$ ,  $i=1, \dots, r$ 이다. 지금까지  $TS(\alpha, B)$ 에 감쇄 비율과 입력 제한 조건을 고려한 설계과정을 정리하면 다음과 같다:

<감쇄비율과 입력 제한 조건을 고려한  $TS(\alpha, B)$  집합의 연속 퍼지 시스템의 제어기 설계과정>

- (8)를 만족하는  $\alpha_i > 0, i=1, \dots, r$ 와  $B \in R^{n \times b}$ 를 구한다.
- (15), (16) 및 (17)을 만족하며, 최대  $\beta$ 일 때의  $Q = Q^T \in R^{n \times n}$ 와  $Y_i \in R^{b \times n}$ 를 구한다.
- 계산된  $Q$ 와  $Y_i$ 를 이용하여  $F_i = Y_i Q^{-1}, i=1, \dots, r$ 를 계산한다.
- 퍼지 제어기

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^2 \alpha_i h_i(z(t))}$$

를 구한다.

### 2.3 모의 실험

본 절에서는 제안된 방법론을 도립진자[3]에 적용하여 설명한다. 시스템은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (18)$$

이 시스템은 다음과 같은 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있다:

규칙1: IF  $x_1$  is about 0,

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

규칙2: IF  $x_1$  is about  $\pm \pi/2$  ( $|x_1(t)| < \pi/2$ ),

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2g \\ \frac{\pi(4l/3 - aml\beta^2)}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

이다. 여기서  $g=9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $a=1/(m+M)$ ,  $m=2 \text{ kg}$ ,  $M=8.0 \text{ kg}$ ,  $2l=1.0 \text{ m}$  이다. 소속함수는 다음과 같다:

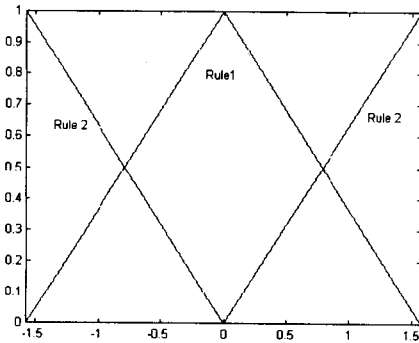


그림 1.  $x_1$ 에 대한 퍼지 집합

제어기 설계 과정을 적용해보자.  $\alpha_i > 0, i=1, \dots, 2$  와 (8)을 만족하는  $B=B_1$ 을 선택한다. 여기서  $\alpha_1=1$ ,  $\alpha_2=0.0295$  이다. 초기 조건  $x_1(0)=80^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  이고  $x_2(0)=0$  이다.  $\|u\| < 10,000$ 에 대하여 (15), (16) 그리고 (17)을 만족하며, 최대 감쇄비율  $\beta$  일때의 계산된  $F_i, i=1, \dots, 2$ 를 가지고 제어 신호  $u(t)$ 를 다음으로부터 구한다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^2 \alpha_i h_i(z(t))} \quad (19)$$

여기서

$$F_1 = [783.9866 \quad 242.8932],$$

$$F_2 = [70.7679 \quad 23.1298]$$

이다. 이 제어기를 시스템(18)에 적용하면 그림 2의 결과를 얻는다.

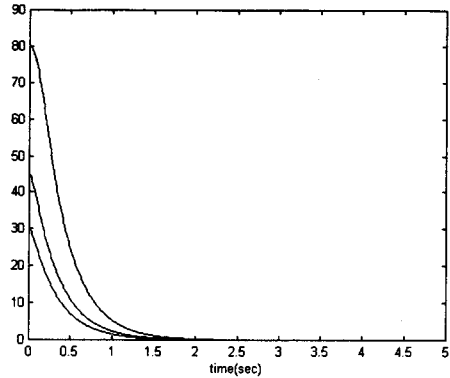


그림 2. 제안된 방법론에 의한 모의실험 결과

### 3. 결 론

본 논문은 폭넓게 사용되는 1차원의 콘(cone)에 속한 입력 행렬  $B_i$ 를 가진 TS 퍼지 시스템을 다루었다. 이 시스템에 변형된 TS 퍼지 제어를 제안하여 매우 편리하게 선형행렬부등식으로 표현되어 안정한 제어가 설계할 수 있음을 보였다. 또한, 도립진자에 적용하여 제안된 제어가 효과적으로 동작함을 보였다.

추후 연구과제로는 적용분야를 확장하여 다양한 시스템에 적용하는 것과 자세한 성능비교를 들 수 있다.

### (참 고 문 헌)

- [1] T.Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Transactions on systems, Man and cybernetics 15, 116-132, 1985.
- [2] H.O. Wang and K. Tanaka, "An LMI-based stable fuzzy control of nonlinear systems and its application to control of chaos", Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, New Orleans, Louisiana, 1433-1438, 1996
- [3] H.O. Wang, K. Tanaka and M.Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues", IEEE Transactions on Fuzzy Systems 4, 14-23, 1996.
- [4] K. Tanaka, T.Ikeba and H.O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs", Proceedings of the American Control Conference, June, 2873-2877, 1997
- [5] K. Tanaka, T. Ikeda and H.O. wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed conditions and LMI-based designs", IEEE Trans. on fuzzy systems, vol.6, No. 2, pp.250-264, May 1998.
- [6] Gibert Strang, Linear algebra and its applications, 3rd edition, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 349, 1988.
- [7] S. Boyd, L. Elghaoui, E. Feron and V. balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in systems and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15 SIAM, Philadelphia, 1994.