

## 시간지연을 갖는 이산시간 대규모 시스템의 강인 안정화

박주현  
영남대학교 전자정보공학부

## Robust Stabilization of Large-Scale Discrete-Time Systems with Time-Delays

Ju H. Park

School of Electrical Engineering and Computer Science, Yeungnam University

**Abstract** - This paper describes the synthesis of robust decentralized controllers for uncertain large-scale discrete-time systems with time-delays in subsystem interconnections. Based on the Lyapunov method, a sufficient condition for robust stability, is derived in terms of a linear matrix inequality (LMI). The solutions of the LMI can be easily obtained using various efficient convex optimization techniques. A numerical example is given to illustrate the proposed method.

## 1. 서 론

전력시스템, 디지털통신망, 교통망 시스템, 생태계 시스템, 철강공정, 공정 시스템과 같은 대규모 시스템을 주위에서 흔히 접할 수 있다. 일반적으로 이러한 대규모 시스템은 여러 개의 상호 연결된 부 시스템으로 구성되어있다. 이런 시스템의 가장 큰 특징으로는 많은 시스템 변수, 시스템 구조의 복잡성, 시스템 변수간의 강한 상호연결, 피드백 루프의 복잡성 등을 들 수 있다. 이러한 특성들로 인하여 대규모 시스템의 안정화를 위한 제어기의 설계에 있어서 하나의 제어기로 운용되는 중앙 집중 시스템(centralized system)으로 구성하는 것은 적절하지 못한 면이 있다<sup>[1]-[2]</sup>. 이러한 연유로 70년대 후반부터 대규모 시스템의 모델링, 안정성 해석법 등과 더불어 분산 제어기(decentralized control) 설계에 관한 연구가 활발히 진행되어왔다. 특히, 근래에는 섭동을 가지는 선형 대규모 시스템의 안정화에 관한 연구가 Chen<sup>[3]</sup>, Cheng 등<sup>[4]</sup>, Wang 등<sup>[5]-[6]</sup>, Ikeda 등<sup>[7]</sup>, Trinh 등<sup>[8]</sup>에 의하여 활발히 이루어졌다. 또한 실제 시스템에서 쉽게 접할 수 있는 요소로서 제어문제에 있어서 고려해야 할 것 중 하나가 시간지연이다. 특히, 부 시스템간의 데이터 교환시 전송지연(transportation delay)이 널리 산재해 있는 대규모 시스템에서는 반드시 고려해야 할 요소중 하나이다. 이러한 시간지연이 존재하면 전체 시스템의 안정성을 해치며, 성능저하의 요인이 된다. 이와 관련된 연구도 다수의 연구진들에 의해 활발히 진행되었다(Hu<sup>[9]</sup>, Trinh과 Aldeen<sup>[10]</sup>, Xu<sup>[11]</sup>). 이러한 연구들의 대부분들은 연속시간 시스템에서 다루었다. 실질적으로 대부분의 제어 시스템은 컴퓨터 기술의 발달로 이산시간 제어가 이루어지고 있다. 그러나, 대규모 시스템의 안정화를 위한 이산시간영역에서의 해석은 몇몇의 연구(Lee와 Radovic<sup>[12]</sup>, Wu 등<sup>[13]</sup>)에 불과하다.

본 논문에서는 부 시스템간의 상호 연결 시에 시간 지연과 섭동을 가지는 이산시간 대규모 시스템의 강인 안정화를 위한 상태제환 제어기를 설계한다. 주어진 시스템의 안정화를 이끌기 위하여, 본 연구에서는 보편적인 Lyapunov 안정성 이론에 최근에 큰 각광을 받고 있는 선형행렬부등식(LMI) 이론을 접목하여 시스템의 강인 안정성을 보장하는 충분조건을 LMI로 표시한다. 이 조건을 만족하는 해가 바로 제어기의 파라미터가 되며, 이 부등식의 해들은 다양

한 최적화 알고리즘을 이용함으로써 쉽게 찾을 수 있다.

본 연구에서는 시스템 행렬의 구조적인 제한적 요소<sup>[9]</sup>,<sup>[10]</sup>,<sup>[12]</sup>를 두지 않았으며, 기존의 연구결과들<sup>[9]</sup>-<sup>[13]</sup>에서 이용된 시스템 행렬의 놈(norm)들의 향으로 표현된 조건들보다 본 연구에서의 LMI로 표현된 안정화 조건은 덜 제한적일 가능성이 많다.

이 논문에서는  $I$ 은 적절한 차원의 단위행렬이며, \*는 대칭부분(symmetric part)을 의미하고, *block diag*(...)은 블록 대각화 행렬을 의미한다. 대칭행렬  $X, Y$ 에 대하여  $X > Y$  혹은  $X \geq Y$ 은 행렬  $X - Y$ 가 양함정(positive definite), 준 양함정(postive semi-definite)를 나타낸다.

## 2. 본 론

다음과 같이  $N$  개의 부 시스템간( $S_i$ )의 상호 연결에 시간지연이 존재하는 대규모 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} S_i \quad x_i(k+1) &= (A_i + \Delta A_i(k))x_i(k) + \sum_{j=1}^N (A_{ij} \\ &+ \Delta A_{ij}(k))x_j(k-h_j) + (B_i + \Delta B_i(k))u_i(k), \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x_i(k) \in R^{n_i}$ 은 상태변수,  $u_i(k) \in R^{m_i}$ 는 입력벡터,  $y_i(k) \in R^{q_i}$ 은 출력벡터이다.  $A_i, B_i, C_i, A_{ij}$ 은 적절한 차원을 갖는 시스템 행렬이며,  $\Delta A_i(k), \Delta B_i(k), \Delta A_{ij}(k)$ 는 실수값을 갖는 시스템에 존재하는 시변 파라미터 불확실성이며,  $h_j > 0$ 은 부 시스템 상호 연결 때의 시간 지연값이다. 각 부 시스템들에 대하여  $(A_i, B_i)$  쌍은 모두 제어가능(completely controllable)하다고 하자. 또한 시변 불확실성 행렬은 다음과 같은 구조를 가진다고 한다.

$$\begin{aligned} \Delta A_i(k) &= D_{ai}F_{ai}(k)E_{ai}, \quad \Delta A_{ij}(k) = D_{aij}F_{aij}(k)E_{aij}, \\ \Delta B_i(k) &= D_{bi}F_{bi}(k)E_{bi} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $D_{ai}, D_{aij}, D_{bi}, E_{ai}, E_{bi}, E_{aij}$ 은 적절한 차원을 갖는 알려진 상수 행렬이며, 불확실성 요소인  $F_{ai}(k), F_{aij}(k), F_{bi}(k)$ 는 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$F_{ai}^T F_{ai} \leq I, \quad F_{aij}^T F_{aij} \leq I, \quad F_{bi}^T F_{bi} \leq I \quad \forall i, j \geq 0. \quad (3)$$

주어진 시스템의 모든 상태변수가 피드백을 위해 측정 가능할 때, 각 부 시스템을 위한 분산제어기의 구조는

$$u_i(k) = -K_i x_i(k) \quad (4)$$

와 같으며, 여기서  $K_i (i=1, \dots, N)$ 는 적절한 차원의 각 부 시스템의 피드백 행렬이다.

(4)를 이용하여 전체 페루프 시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$x_i(k+1) = [A_i + \Delta A_i(k) - (B_i + \Delta B_i(k))K_i]x_i(k) + \sum_{j=1}^N [A_{ij} + \Delta A_{ij}(k)]x_j(k-h_j) \quad (5)$$

식 (5)의 표현을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$X(k+1) = [A + \Delta A - (B + \Delta B)K]X(k) + (A_D + \Delta A_D)X(k-h) \quad (6)$$

여기서

$$X(k) = [x_1(k)^T \ x_2(k)^T \ \dots \ x_N(k)^T]^T$$

$$X(k-h) = [x_1(k-h_1)^T \ x_2(k-h_2)^T \ \dots \ x_N(k-h_N)^T]^T$$

$$A = \text{block diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$$

$$\Delta A = \Delta A_a F_a(k) E_a$$

$$B = \text{block diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$$

$$\Delta B = \Delta B_b F_b(k) E_b$$

$$K = \text{block diag}(K_1, K_2, \dots, K_N)$$

$$A_D = \text{block matrix with elements } A_{ij} (i \neq j)$$

$$\Delta A_D = \sum_{i=1}^N D_{di} F_{di}(k) E_{di}$$

$$D_a = \text{block diag}(D_{a1}, D_{a2}, \dots, D_{aN})$$

$$D_b = \text{block diag}(D_{b1}, D_{b2}, \dots, D_{bN})$$

$$E_a = \text{block diag}(E_{a1}, E_{a2}, \dots, E_{aN})$$

$$E_b = \text{block diag}(E_{b1}, E_{b2}, \dots, E_{bN})$$

$$F_a(k) = \text{block diag}(F_{a1}(k), F_{a2}(k), \dots, F_{aN}(k))$$

$$F_b(k) = \text{block diag}(F_{b1}(k), F_{b2}(k), \dots, F_{bN}(k))$$

$$D_{di} = \text{block matrix with elements } D_{di}(r, j)$$

$$D_{di}(r, j) = \begin{cases} D_{dij}, & r=i, i \neq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_{di}(k) = \text{block diag with diagonal elements } F_{di}(j, j)$$

$$F_{di}(j, j) = \begin{cases} F_{dij}, & j \neq i, j=1, \dots, N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$E_{di} = \text{block diag with diagonal elements } E_{di}(j, j)$$

$$E_{di}(j, j) = \begin{cases} E_{dij}, & j \neq i, j=1, \dots, N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이제, 본 논문에서 주어진 문제는 시스템 (6)이 섭동에도 불구하고 강인 안정하게 되는 다음의 같은 형태의 분산 제어기를 설계하는 문제로 귀착된다.

$$U(k) = -KX(k) \quad (8)$$

리아프노프 해석법을 이용하여, 다음의 정리는 시스템 (6)의 강인 안정성을 보장하는 조건을 제시한다.

정리 1: 다음의 선형행렬 부등식을 만족하는 해인 행렬  $M$  과 양한정 행렬  $Q, S$  가 존재하면 페루프 시스템은 제어기 (8)에 의해서 강인 안정하다.

$$\begin{bmatrix} U_{11} & AQ - BM & 0 & 0 & 0 & A_D S E_D^T \\ * & -Q & Q & Q E_a^T & M^T E_b^T & 0 \\ * & Q & -S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & U_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

여기서

$$U_{11} = -Q + DD^T + A_D S A_D^T$$

$$U_{22} = -I + E_D S E_D^T$$

$$D = \left( D_a D_a^T + D_b D_b^T + \sum_{i=1}^N D_{di} D_{di}^T \right)^{1/2}$$

$$E_D = \left( \sum_{i=1}^N E_{di}^T E_{di} \right)^{1/2}$$

이때, 제어기의 개인 행렬  $K$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$K = MQ^{-1} \quad (10)$$

언급 1: 피드백 행렬 개인  $K$ 는 (9)의 해로부터  $M = KP^{-1}$ 인 관계로부터 쉽게 구할 수 있다. 이러한 LMI의 해를 찾는 알고리즘은 다양하게 있지만, 최근에 개발된 interior-point 알고리즘<sup>[14]</sup>으로 효과적으로 찾을 수 있다.

언급 2: Wu 등<sup>[13]</sup>은 분산제어기 설계를 위하여  $u_i(k) = K_i y_i(k)$ 를 이용한 출력 제어기를 사용하였다. 출력행렬  $C_i$ 가 완전랭크(full rank)를 가지면, 정리 1에서의 방식을 그대로 적용하여,  $M = KCP^{-1}$ 인 관계를 적용하면 출력제어기 설계 문제는 상태 궤환 제어기 설계 문제로 귀착된다. 이때 궤환 행렬  $K$ 는  $K = MQ^{-1}C^T(CC^T)^{-1}$  관계로부터 구할 수 있다.

### 3. 수치예제

이 절에서는 위에서 제시된 방법을 수치 예제를 통하여 살펴본다.

다음과 같이 3개의 부 시스템으로 구성된 대규모 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \cos(k) \\ 0.2 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} x_1(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} u_1(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.05 \cos(k) \end{bmatrix} x_2(k-h_2) + \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.04 \cos(k) & 0 \\ 0 & 0.04 \sin(k) \end{bmatrix} x_3(k-h_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0.09 \cos(k) \\ 0.09 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} x_2(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \cos(k) & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} u_2(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0.04 \cos(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1(k-h_1) + \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.09 \cos(k) & 0 \\ 0 & 0.09 \sin(k) \end{bmatrix} x_3(k-h_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \cos(k) & 0 \\ 0 & 0.2 \sin(k) \end{bmatrix} x_3(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_3(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.05 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} u_3(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \cos(k) \\ 0.1 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} x_1(k-h_1) + \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0.04 \cos(k) \\ 0.04 \sin(k) & 0 \end{bmatrix} x_2(k-h_2) \end{aligned}$$

위의 예제 시스템을 식 (6)의 행렬 형태로 적절히 분해하여 식 (9)의 LMI를 적용하면 다음과 같은 해를 얻는다.

다.

$$Q = \begin{bmatrix} 2.583 & 0.0860 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.086 & 0.6117 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.954 & 1.165 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.165 & 0.822 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2362 & -0.239 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2388 & 1.091 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 6.226 & 1.055 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.055 & 3.495 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.8777 & 0.2877 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2877 & 6.6503 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.396 & 0.465 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.465 & 2.034 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1684 & 1.198 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4701 & -0.0824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6029 & 0.965 \end{bmatrix}$$

위의 해로부터,  $K = MQ^{-1} = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$  관계로 부터 각 부 시스템을 안정화하는 제어기의 게인 행렬은

$$\begin{aligned} K_1 &= [0 \quad 1.9583] \\ K_2 &= [0.6888 \quad -1.0762] \\ K_3 &= [-0.3308 \quad 0.8121] \end{aligned}$$

와 같다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 시간지연과 섭동을 갖고 있는 이산시간 대규모 시스템의 강인 안정화를 조사하였다. 분산형 상태궤환 제어기를 구현하였으며, 안정성 해석을 위하여 리아프노프 방식을 이용하여 안정화 조건을 선형행렬 부등식으로 표현하였다. 선형행렬 부등식을 이용함으로써 기존의 리아프노프 방정식 및 리카치 방정식을 이용하여 시스템 행렬의 norm으로 표현되는 결과들 보다 덜 제한적인 안정화 조건을 얻을 수 있으며, 제어기의 해 또한 쉽게 찾을 수 있다는 장점이 있다. 무엇보다도, 본 연구는 이산시간영역에서의 LMI해석법을 이용하여 대규모 시스템의 분산제어기를 설계하는 한 방법을 제시한 것에 그 의의가 있다고 사료된다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] D. Siljak, *Decentralized control of complex systems*, Academic Press, London, 1991.
- [2] M. Jamshidi, *Large-scale dynamic systems: modelling and control*, North-Holland, New York, 1983.
- [3] Y. H. Chen, "Decentralized robust control of decomposed uncertain interconnected systems," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 111, pp. 359-363, 1989.
- [4] C. Cheng, W. Wang, and Y. Lin, "Large-scale Uncertain systems under insufficient decentralized controllers," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, pp. 592-599, 1993.
- [5] W. Wang, and C. Cheng, "Robustness of perturbed large-scale systems with local constant state feedback," *Int. J. of Control*, Vol. 50, pp. 373-384, 1989.

[6] W. Wang, and C.Cheng, "Stabilizing controller and observer synthesis for uncertain large-scale systems by the Riccati equation approach," *IEE Proceedings-D*, Vol. 139, pp. 72-78, 1992.

[7] M. Ikeda, G. Zhai, and Y. Fujisaki "Decentralized  $H^\infty$  controller design for large-scale systems: A matrix inequality approach using a homotopy method", *Proc. of the 35th CDC*, Kobe, Japan 1996.

[8] H. Trinh and M. Aldeen, "Decentralised feedback controllers for uncertain interconnected dynamic systems", *IEE Proc. Part D*, pp. 429-434, 1993.

[9] Z. Hu, "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays," *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, Vol. 39, pp. 180-182, 1994.

[10] H. Trinh and M. Aldeen, "A Comment on 'Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays'", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 40, 914-916, 1995.

[11] B. Xu, "On delay-independent stability of large-scale systems with time delays," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 40, 930-933, 1995.

[12] T. N. Lee, and U. L. Radovic, "Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delays in interconnections," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 33, 757-761, 1988.

[13] H. Wu, K. Mizukami, and S. Zhang, "Robust stability conditions for large-scale interconnected systems with structured and unstructured uncertainties", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol 230, p. 70-96, 1999.

[14] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM books, Philadelphia, 1994.

[15] K. Zhou and P. Khargonekar, "Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 10, pp. 10-17, 1988.