2000년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2000.7.17-20

LMI기법을 이용한 시변 불확정성을 갖는 선형 시스템의 강인 극점 배치

마삼선*, 김진훈
한전전력연구원, 충북대 전기전자공학부

Robust Pole Assignment for Time Varying Uncertain Linear Systems via LMI Approach

Sam Sun MA*, Jin-Hoon KIM
KEPRI, Dept. of Control & Instrumentation Eng., Chungbuk National University

Abstract - This paper focuses on the robust pole assignment for time varying uncertain linear systems in a specified disk. Based on Linear Matrix Inequality (LMI) approach, we give two sufficient conditions, one is for the analysis and another is for the design, that guarantee the robust pole assignment in a specified disk in the left half plane(L.H.P) while satisfying the robust stability. Since these conditions are expressed as LMI forms, we can easily check their feasibility using MATLAB control toolbox. Finally, we show by an example that our results are useful for analysis and design.

1. 서 론

선형 제어계에서 극점(pole)은 시스템의 동적 특성과 밀접한 관계가 있다. 제어시스템의 해석이나 설계에 있어서 성능을 결정하는 중요한 문제 중 하나는 폐루프 시스템의 극점을 원하는 곳에 배치하는 것이다. 시스템의 불확정성(uncertainty)을 고려하지 않을 경우에는 극점을 원하는 영역에 정확히 배치할 수 있으나, 실제 시스템에서는 모델링 오차, 외부잡음 및 외란 그리고 환경에 따른 변화 등에서 오는 불확정성으로 인해 모든 극점들을 원하는 영역에 배치하기가 어렵다. 또한 불확정성이 시변(time varying)일 경우에는 시스템의 극점만으로는 안정성을 판단할 수 없어 별도로 안정성을 고려해야 하는 어려움이 있다. 시스템의 동적 거동은 시스템의 극점뿐만 아니라 영점에도 좌우되므로 극점을 원하는 정확한 위치에 배치하기보다는 규정된 영역 안에 위치하도록 하는 것이 필요하다. 따라서 원판(disk)[1][5][6][7], 원뿔(conic)[2], 타원(ellipse)[4], 수직 띠(vertical strip)[7], 환형(corona)[3]등과 같은 규정된 영역에 극점을 배치시키는 연구가 진행되어 왔다. Furuta et al. [1][4][7]은 불확정성이 없는 경우 모든 극점을 규정된 원판 내에 배치한 선형시스템의 해석과 설계를 고려하였고, 섭동 불확정성(perturbed uncertainty)이 있는 경우는 Rachid et al. [2][3]에서 다루었다. Petersen [5]은 시변 불확정성 $\Delta A(t)$가 있는 경우의 제어설계방법을 제시하였고, [6]에서는 $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 의 두 가지를 모두 고려하였다. 그러나 [5][6]에서는 이산 Riccati식으로 표현되어 행렬 파라메터를 시행착오 방식으로 찾아야 하는 제약조건이 있다. 그리고 김 [9]은 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 시변 불확정성을 갖는 폐루프 시스템의 모든 극점이 원판 내에 존재하면서 안정성을 보장하는 방법을 제시하였다. 최근에는 볼록(convex) 최적화 문제를 이용한 선형행렬부등식(LMI)을 적용하여 최적해를 쉽고 효과적으로 구할 수 있게 되어 시스템의 해석이나 설계에 쉽게 활용될 수 있어 LMI를 이용한 강인 극점 배치 제어가 활발히 연구되고 있다[7].

본 논문에서는 불확정성을 갖는 시스템의 모든 극점들이 규정된 원판 내에 위치하면서 안정성을 보장하는 조건을 만족하는 최적해를 구한다. 주요 결과에서는 불확정성을 갖는 시스템의 모든 극점들이 규정된 원판 내에 위치하고 안정성이 보장되는 조건하의 시스템의 해석과 설계를 LMI 형태로 제시한다. 얻어진 결과의 유용성을 보이기 위해 수치예제를 통하여 설계값을 제시하고 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 시변 불확정성을 갖는 선형 폐루프 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = [A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]u(t) \qquad (1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태를 나타내고, $u(t)\in R^m$은 제어를 나타낸다. $A\in R^{n\times n}$와 $B\in R^{m\times m}$은 안정한 폐루프 시스템 행렬이며 $\Delta A(t)\in R^{n\times n}$과 $\Delta B(t)\in R^{m\times m}$는 시변 불확정성으로 다음으로 주어지는 경우에 대해 생각한다.

$$\Delta A(t) = DF(t)E,\ \Delta B(t)\in[B^-,\ B^+];\ F^T(t)F(t)\le I \qquad (2)$$

여기서 G_i^v, $i=1,2,\cdots,q$가 간격행렬 $[B^-, B^+]$의 꼭지점 행렬(vertex matrices)이라면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v,\ \ \sum_{i=1}^{q}\gamma_i = 1,\ \gamma_i\ge 0 \qquad (3)$$

이 논문에서는 먼저 $u(t)=0$ 인 시스템 (1)의 모든 극점이 복소평면상의 좌반면내에 중심이 $-\alpha$이고 반지름이 $r(\alpha\ge r)$인 원판 영역 $D(-\alpha,r)$

$$D(-\alpha,r) := \{z\in R^n: |z+\alpha|\le r\} \qquad (4)$$

에 위치하면서 안정성이 보장되는 조건을 구하는 해석문제를 먼저 다루고, 다음으로 시스템 (1)의 모든 극점이 $D(-\alpha,r)$에 위치하면서 동시에 안정성이 보장되는 제어

$$u(t) = Kx(t) \qquad (5)$$

를 찾는 문제이다. 그리고 이 논문에서 사용되는 $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 $(\cdot)^{-1}$ 은 역행렬을 나타낸다. 그리고 대칭(symmetric) 행렬 $X, Y\in R^{n\times n}$에 대하여 $X>Y$ 또는 $X\ge Y$ 는 각각 행렬 $(X-Y)$ 가 양확정(positive definite) 또는 준양확정(semi-definite) 행렬임을 나타낸다. 또한 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 행렬의 최대고유치를 의미한다. 끝으로, I_n 은 $n\times n$ 항등(identity) 행렬이다.

다음의 보조정리들은 주요결과의 증명에 이용되는 정리이다.

보조정리 1 [6] : 불확정성을 갖는 다음의 선형시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = [A+\Delta A(t)]x(t)$$

여기서 다음을 만족하는 양확정 행렬 $P=P^T>0$, $X=X^T>0$ 가 존재하면

i) $[A+\alpha I_n+\Delta A(t)]^T P[A+\alpha I_n+\Delta A(t)] - r^2P < 0$

ii) $[A+\Delta A(t)]^T X + X[A+\Delta A(t)] < 0$
각 시간에서 시스템의 모든 극점은 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$에 위치하고 강인 안정하다.

보조정리 2 : 적당한 차원의 주어진 행렬 X, Y 와 $S>0$이 주어질 때 다음을 만족한다.

$$X^T Y + Y^T X \le X^T S^{-1} X + Y^T S Y$$

보조정리 3 [8]: A, D, E와 F가 적당한 차원의 실수 행렬이고, $F(t)F^T(t) \le I_l$ 일 때 다음의 관계가 성립한다. 행렬 $P=P^T>0$ 와 양의 상수 $\varepsilon>0$ 가 주어지고, $\varepsilon I_n - EPE^T > 0$ 의 조건이 만족하면

$$[A+DF(t)E]P[A+DF(t)E]^T \le APA^T + APE^T(\varepsilon I_l - EPE^T)^{-1}EPA^T + \varepsilon DD^T.$$

보조정리 4 : 행렬 $X=\sum_{i=1}^{q}\gamma_i X_i$ 에서 $X_i = X_i^T$, $\gamma_i \ge 0$이고 $X_i < 0$, $i=1,2,\cdots,q$ 이면 $X<0$가 성립된다.

증명 : 다음에서

$$\lambda_{\max}(X) = \lambda_{\max}\left(\sum_{i=1}^{q}\gamma_i X_i\right) \le \sum_{i=1}^{q}\gamma_i \lambda_{\max}(X_i) < 0$$

$X<0$가 성립됨을 알 수 있다.

보조정리 5 [10] : 임의의 대칭 행렬 X와 대칭 양확정 행렬 Y에 대하여 다음의 두 선형 행렬 부등식 (LMI)는 동치(equivalent)이다.

i) $\begin{bmatrix} X & S \\ S^T & Y \end{bmatrix} > 0$ ii) $Y>0$, $X - SY^{-1}S^T > 0$

3. 강인 극점배치

다음의 정리 1은 시스템 (1)에서 규정영역 (4)에 강인 극점배치에 대한 주요 결과이다. 정리 1에서는 폐루프 시스템 행렬을 전치(transposition) 하여도 극점과 안정성에는 변함이 없다는 것이다.

정리 1 : $u(t)=0$에서 불확정성 (2)를 갖는 선형시스템 (1)을 고려하자. 다음의 식 (6), (7)을 만족시키기 위한 양확정 행렬 $P=P^T>0$, $X=X^T>0$ 와 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ 그리고 조건식 $\varepsilon_1 I_l - EPE^T > 0$ 이 주어지면

$$\text{i)} \begin{bmatrix} A_\alpha P A_\alpha^T + \varepsilon_1 DD^T - r^2 P & A_\alpha PE^T \\ EPA_\alpha^T & -(\varepsilon I_l - EPE^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} AX + XA^T + \varepsilon_2 DD^T & XE^T \\ EX & -(\varepsilon_2 I_n) \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

시스템 (1)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$에 위치하고 안정하다. 여기서 $A_\alpha = A + \alpha I_n$이다.

증명 : 조건식 (7)과 보조정리 2로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &> A_\alpha P A_\alpha^T + A_\alpha PE^T(\varepsilon_1 I_l - EPE^T)^{-1}EPA_\alpha^T + \varepsilon_1 DD^T - r^2 P \\ &\ge A_\alpha P A_\alpha^T + A_\alpha PE^T F^T(t) D^T + DF(t)EPA_\alpha^T + DF(t)EPE^T F^T(t) D^T \\ &\quad - r^2 P \\ &= [A_\alpha + \Delta A(t)]P[A_\alpha + \Delta A(t)]^T - r^2 P. \end{aligned}$$

그리고 보조정리 1을 적용하면 $u(t)=0$일 때 시스템(1)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$에 위치함을 알 수 있다. 또한 조건식 (8)에서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 &> AX + XA^T + \frac{1}{\varepsilon_2} XE^T EX + \varepsilon_2 DD^T \\ &\ge A^T X + XA^T + DF(t)EX + XE^T F^T(t) D^T \\ &= [A+\Delta A(t)]X + X[A+\Delta A(t)]^T \end{aligned}$$

따라서 Lyapunov 안정도 정리에 의한 시스템의 안정도가 보장됨을 알 수 있다. ■■

4. 강인 극점배치의 설계

정리 2에서는 폐루프 시스템 행렬을 전치(trans-position) 하여도 극점과 안정성에는 변함이 없다는 것이다.

정리 2 : 불확정성 (2)를 갖는 시스템 (1)에 제어 (6)이 가해질 때 시스템 설계에 대해 생각해보자. 만일 행렬 $P=P^T>0$, $Q=Q^T>0$, $M=M^T>0$ 와 양의 상수 $\varepsilon_1>0$ 그리고 조건식 $\varepsilon_1 I_l - EPD^T > 0$ 가 다음의 식 (8), (9), (10), (11)을 만족시키고

$$\text{i)} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 DD^T - r^2 P & A_\alpha Q + BY + G_i^v Y \\ (A_\alpha Q + BY + G_i^v Y)^T & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad i=1,2,\cdots,q \quad (8)$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} M & PE \\ E^T P & (\varepsilon_1 I_l - EPE^T) \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

$$\text{iii)} \ P + M - Q \le 0 \quad (10)$$

$$\text{iv)} \begin{bmatrix} X + G_i^v Y + (G_i^v Y)^T + \varepsilon_3 DD^T & QE^T \\ EQ & -\varepsilon_3 I_l \end{bmatrix} < 0, \quad i=1,2,\cdots,q \quad (11)$$

여기서 $X = AQ + QA^T + BY + Y^T B^T$ 이다.
제어 조건이 다음과 같을 때

$$u(t) = Kx(t); \ K = YQ^{-1}$$

시스템 (1)의 모든 극점이 $D(-\alpha, r)$에 위치하게 되어 폐루프시스템의 안정이 보장된다. 여기서 $A_\alpha = A + \alpha I_n$ 이다.

증명 : $\tilde{B}(t) = B + \Delta B(t) = B + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v$로 놓고 Ω를 다음과 같이 놓으면

$$\begin{aligned} \Omega &:= [A_\alpha + \tilde{B}(t)K + \Delta A(t)]P[A_\alpha + \tilde{B}(t)K + \Delta A(t)]^T - r^2 P \\ &= [A_\alpha + \tilde{B}(t)K]P[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]^T + [A_\alpha + \tilde{B}(t)K]P\Delta A^T(t) \\ &\quad + \Delta A(t)P[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]^T + \Delta A(t)P\Delta A(t)^T - r^2 P \end{aligned}$$

보조정리 1로부터 $\Omega<0$일 때 시스템 (1)의 모든 극점은 $D(-\alpha, r)$ 위치한다. 다시 보조정리 3을 적용하여 전개하면

$$\begin{aligned} \Omega \le &[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]P[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]^T \\ &+ [A_\alpha + \tilde{B}(t)K]PE^T(\varepsilon_1 I_l - EPE^T)^{-1}EP[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]^T \\ &+ \varepsilon_1 DD^T - r^2 P. \end{aligned}$$

조건식 (9)로부터 $PE^T(\varepsilon_1 I_n - EPE^T)^{-1}EP \le M$ 를 얻고, 조건식 (10)인 $P+M \le Q$ 를 대입하면 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \Omega &\le [A_\alpha + \tilde{B}(t)K]Q[A_\alpha + \tilde{B}(t)K]^T + \varepsilon_1 DD^T - r^2 P \\ &= \left(A_\alpha + BK + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v K\right)Q\left(A_\alpha + BK + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v K\right)^T \\ &\quad + \varepsilon_1 DD^T - r^2 P \\ &= \left(A_\alpha + BK + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v K\right)Q^{-1}\left(A_\alpha + BK + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v K\right)^T \\ &\quad + \varepsilon_1 DD^T - r^2 P. \end{aligned} \quad (12)$$

조건식 (11)과 보조정리 4에 관계식 $Y=KQ$ 를 적용하면 다음과 같다.

$$(11) \Rightarrow \sum_{i=1}^{q}\gamma_i \begin{bmatrix} \varepsilon_1 DD^T - r^2 P & A_\alpha Q + BY + G_i^v Y \\ (A_\alpha Q + BY + G_i^v Y)^T & -Q \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 DD^T - r^2 P & A_\alpha Q + BY + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v Y \\ (A_\alpha Q + BY + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i G_i^v Y)^T & -Q \end{bmatrix} < 0$$

상수행렬는 Z는 $\sum_{i=1}^{q}\gamma_i = 1$이므로 $\sum_{i=1}^{q}\gamma_i Z = Z$ 가 된다. 따라서 이것을 윗식 (12)에 대입하여 정리하면 $\Omega<0$

을 얻게 됨으로 조건식 (11)을 만족하면 시스템 (1)의 모든 극점이 $D(-\alpha, r)$내에 위치함을 알 수 있다.

다음으로 안정도를 살펴보자.

$$\begin{aligned}\Omega_2 :&= [A+BK+\varDelta A(t)+\varDelta B(t)K]Q \\ &\quad + Q[A+BK+\varDelta A(t)+\varDelta B(t)K]^T \\ &= AQ+QA^T+BY+Y^TB+DF(t)EQ+QE^TF^T(t)D^T \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a}\gamma_i G_i^v Y + \sum_{i=1}^{a}\gamma_i (G_i^v Y)^T \\ &= \sum_{i=1}^{a}\gamma_i\Big(AQ+QA^T+BY+Y^TB+\varepsilon_3 DD^T+\frac{1}{\varepsilon_3}QE^TEQ \\ &\quad + G_i^v Y+(G_i^v Y)^T\Big) \\ &\le AQ+QA^T+BY+Y^TB+\varepsilon_3 DD^T+\frac{1}{\varepsilon_3}QE^TEQ \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a}\gamma_i G_i^v Y + \sum_{i=1}^{a}\gamma_i (G_i^v Y)^T\end{aligned}$$

조건식 (11)과 보조정리 2로부터 $\Omega_2 < 0$ 됨을 알 수 있고, 이것은 시스템이 안정하다는 것을 의미한다. 이것으로 증명을 마친다. ■■

5. 수치예제

다음과 같은 간단한 선형시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(1) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \varDelta A(t)x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(t) + \varDelta B(t)u(t) \tag{12}$$

여기서

$$\varDelta A(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t) [\, 0 \;\; 1 \,], \quad \varDelta B(t) \in \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} \right] \tag{13}$$

폐루프 시스템 행렬 $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$는 $\{-2, -1\}$의 극점을 갖는 안정한 시스템이다.

먼저 조건식 (13)과 같은 불확정성이 주어질 때 극점배치 영역을 찾는 해석문제를 다룬다. 표1은 정리 1을 적용하여 극점영역의 최소원판 지름 α의 범위를 보인다.

표 1. 불확정성를 고려한 강인안정 영역

α	1.4	1.5	1.6
r	1.2180	1.1180	1.2180

다음으로, 제어기 이득행렬 K를 구하는 문제로써 폐루프 시스템의 모든 극점이 주어진 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 존재하는 경우이다. 표 2는 정리 2를 이용하여 계산한 결과로 불확정성이 간격행렬로 주어지는 경우의 강인극점 설계를 나타낸다.

표 2. 불확정성을 고려한 강인 제어기의 이득

$D(-\alpha, r)$	K	(A+BK)의 극점
D(-1.5, 0.1)	[0.1248, -0.0003]	-1.5005, -1.4998
D(-1.5, 0.5)	[0.1800, 0.0736]	1.5061, 1.4203
D(-3.0, 0.5)	[-0.9988, 2.9247]	2.9624 ± j0.0304
D(-3.0, 1.0)	[-0.9990, 2.8890]	2.787, 2.9103
D(-10.0, 1.5)	[22.8101, -16.8017]	-9.8658, 9.9359

6. 결 론

이 논문에서는 시변 불확정성을 포함하는 선형 폐루프 시스템의 강인 극점 배치 문제를 다루었다. 제어시스템에 불확정성이 포함함에도 불구하고 폐루프 시스템의 모든 극점이 복소 평면상의 좌반면에 중심점이 $-\alpha$이고 반지름이 r인 규정된 원판 $D(-\alpha, r)$ 내에 위치하도록 하면서 동시에 시스템의 강인 안정성을 보장하는 강인 극점배치 해석과 강인 극점배치 설계를 모두 다루었다. 제시된 조건은 효과적인 알고리듬을 통해 원하는 파라미터를 쉽게 얻을 수 있는 선형 행렬 부등식(LMI) 형태로 나타내었다. 수치예제를 통하여 얻어진 결과의 유용성과 우수성을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] K. Furuta and S.B. Kim, "Pole assignment in a specified disk" , IEEE Trans. Automat. Contr.,, vol AC-32, pp.423-427, 1987.

[2] Y. T. Juang, Z. C. Hong and Y. T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis", Int. J. Contr., vol.49, pp.921-927, 1989

[3] A. Rachid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed system" , Int. J. System Sci., vlo.21, pp.579-585, 1990.

[4] W.M. haddad and D.S. Bernstein, "Controller design with regional pole constraints" , IEEE Trans. Automat. Contr., vol.37, pp.54-69, 1992.

[5] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback", IEEE Trans. Automat. Contr., vol.40, pp.184-189, 1995.

[6] S.O.R. Moheimani and I.R. Petersen, "Quadratic guaranteed cost control with robust pole placement", IEE Proc.- Control Theory Appl., vol. 143, pp.37-43, 1996.

[7] M. Chilai and P. Gahinet, "H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach" , IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, pp.358-367, 1996.

[8] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and C. Cheng, "Delay-Dependent Robust Stabilization of Uncertain Systems with Multiple State Delays". IEEE Trans. Automat. Contr., vol.43, pp.1608-12, 1998.

[9] 김진훈, "시변 불확정성을 갖는 선형시스템의 강인 극점배치", Trans. KIEE. Vol.48A. pp.31-35. 1999

[10] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.