

바운드된 구동기를 갖는 지진에 여기된 빌딩을 위한 H_∞ 제어기 설계

송 옹 희* , 김 진 훈
충북대학교 제어계측공학과

Design of H_∞ Controller for Seismic-excited Building with Bounded Actuator

Yong-Heui Song* , Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Eng., Chung-buk National University

Abstract - We consider the design of a state feedback H_∞ controller for seismic-excited building with bounded actuators capability. A controller is obtained by minimizing γ (L_2 gain from the disturbance to measured output) satisfying three LMI's, and this can be easily done by well-known LMI control toolbox. Finally, the usefulness of a proposed technique is illustrated by numerical simulation of a six-story building subjected to the Pacoima earthquake.

1. 서 론

제어 시스템 설계에 직면한 가장 어려운 문제중의 하나는 구동기 포화에 관한 것이다. 실제 제어 시스템에서 구동기는 필수적이며, 대부분의 구동기는 입력 값에 무관하게 일정한 출력이 나오는 포화 특성을 갖고 있다. 이러한 구동기의 포화 비선형성은 시스템의 성능 저하 뿐만 아니라 시스템의 안정성까지 보장하지 못하는 것이 일반적이다. 이러한 포화 특성을 갖는 선형 시스템의 안정성은 Popov의 안정성 이론에 의한 것[1]-[3]과 Bellman의 정리를 이용한 것[2]-[3]이 있다.

최근에는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기의 설계에 관한 연구가 활발히 이루어지고 있으며 [4]-[7], 이를 지진 또는 강한 바람의 영향으로부터 빌딩, 다리 등의 구조물의 안정성 및 외란으로부터의 영향을 감소시키기 위한 제어기 설계 등에 적용하고 있다 [4]-[7].

구조물에 대한 구동기 포화의 문제는 매우 다르다. 일반적으로 구조물들은 제동(damping)으로 인해 안정하다. 따라서 제어의 주 목적을 지면 운동 혹은 돌풍과 같은 외란에 대한 응답을 감소시키는 것으로 하고 있다. 특히, 포화에 직면해서는 안정도와 성능을 보장하는 바운드가 우선시 되고 있다.

이러한 연구 배경 하에 본 논문에서는 바운드된 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계 방법을 제시하고, 모의 실험에서는 구동기의 크기가 정하여진 빌딩에 지진의 외란이 가하여질 때, 빌딩 각 층의 동요(drift)에 대한 H_∞ 노름(norm)이 최소가 되도록 하는 제어기의 설계를 보인다. 제어기는 LMI조건들을 만족하면서 γ (외란으로부터 측정출력까지의 L_2 이득)를 최소로 하는 해를 구함으로써 얻어지며, 이는 MATLABTM의 LMI Toolbox를 이용하면 쉽게 확인된다. [11].

또한, 참고문헌 [5]에서 다루어진 6층 빌딩 모델을 이용한 모의 실험을 통해 본 논문에서 제시된 방법의 유용성을 보이게 된다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 시스템을 고려해 보기로 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2SAT(u(t)) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 상태이고, $u \in R^m$ 는 제어를 나타내며, 외란은 $w^T w \leq w_{max}^2$ 를 만족한다. 또한 포화함수 $SAT(u) = [sat(u_1), sat(u_2), \dots, sat(u_m)]^T$ 이며,

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{lim}, & \text{if } u_i > u_i^{lim} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \leq u_i^{lim} \\ -u_i^{lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{lim} \end{cases} \quad (2)$$

이다. 또한

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{sat(u_i)}{u_i}, & u_i \neq 0 \\ 1, & u_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

라하고, $\Phi \in R^{m \times m} = \text{Diag}[\phi_i]$ 라 하면 $SAT(u) = \Phi(u)u$ 가 되며 시스템(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2\Phi(u(t))u(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

본 논문의 주요 목적은 시스템 (1)에 대해 w 로부터 z 까지의 L_2 이득이 γ 보다 크지 않은 즉, $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ 를 보장하는 상태제환 제어기를

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5)$$

구하는 것이다.

다음의 보조정리들은 다음의 주요 결과의 증명에 쓰이는 유용한 결과들이다.

보조정리1[10]: 임의의 행렬 S 와 대칭행렬 Q, R 에 대하여 다음은 동치이다.

- i) $R > 0, Q - SR^{-1}S^T > 0$
- ii) $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0$

보조정리2 : 다음의 선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad w^T w \leq w_{max}^2, \quad x(0) = 0$$

1) 다음의 조건을 만족하는 $V(x) = x^T Q^{-1}x, Q > 0$ 가 존재한다면,

$$\frac{dV(x)}{dt} + \alpha V(x) - \alpha w^T w < 0 \quad (7)$$

위의 시스템 궤적(x)은 다음을 만족한다.

$$x^T Q^{-1}x \leq w_{max}^2$$

2) 다음의 조건을 만족하는 2차 함수(quadratic function) $V(x) = x^T Q^{-1}x, Q > 0$ 와 상수 $\beta > 0$ 가 존재하면

$$\frac{dV(x)}{dt} + \beta(z^T z - \gamma^2 w^T w) < 0 \quad (8)$$

외란 w 로부터 출력 z 까지의 L_2 이득은 γ 보다 크지 않게 된다.

3. H_∞ 제어기 설계

다음의 정리 1은 제어(5)를 갖는 시스템(1)에 대하여 w 로부터 z 까지의 L_2 이득이 γ 보다 크지 않음을 보장하는 제어(5)의 조건을 나타낸다.

정리 1 : 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q = Q^T > 0$, $A = \text{Diag}[\lambda_i] > 0$ 와 스칼라 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 가 존재한다면

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - 2B_2AB_2^T & QC^T & QD & B_1 + QC^TD \\ CQ & -I & 0 & 0 \\ D^TQ & 0 & -I & 0 \\ B_1^T + D^TCQ & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$AQ + QA^T - 2B_2AB_2^T + \alpha Q + \frac{\beta}{\alpha} B_1B_1^T < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} Q & \lambda_i B_{2i} \\ \lambda_i B_{2i}^T & \beta \left(\frac{u_i^{\text{lim}}}{w_{\text{max}}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

다음의 제어기는

$$u(t) = -R^{-1}AB_2^T P x(t) \quad (12)$$

시스템 (1)의 w 로부터 z 까지의 L_2 이득이 γ 보다 크지 않게 됨을 보장한다. 여기서 $P = Q^{-1}$ 이고, $R = \text{Diag}[r_i]$ 는 $0 < r_i \leq 1$ 를 갖는 대각 행렬이며, B_{2i} 는 B_2 의 i 번째 행(row)벡터이다.

중점 : 지면상의 이유로 생략. ■■

Remark 1: 위의 행렬 부등식 (9)-(11)은 주어진 α 에 대하여 선형 행렬 부등식이 됨이 명확하므로, 제어기 설계는 다음의 과정에

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{subject to} \quad & \text{LMI (9), (10), (11)} \end{aligned}$$

상수 $\alpha > 0$ 에 대한 선형 탐색(linear search)을 반복 수행하여 최소의 γ 를 만족하는 행렬 P, A 을 구함으로써 얻어진다.

4. 모의 실험 결과

본 논문에서 제시된 방법의 유용성을 보이기 위해, 참고 문헌 [5]의 동일한 층을 갖는 실물 크기의 2개의 능동 제어 시스템을 갖는 그림 1의 6층 빌딩에 대해서 고려해 보기로 한다. 빌딩은 1차원의 지면 가속도 w 를 갖고, 지진에 노출된 6차원을 갖는 선형 시스템으로 모델링되며, 이의 운동 방정식은 다음으로 주어진다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = B_2u + MB_1w \quad (13)$$

여기서 $q \in \mathbb{R}^6$, $q = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T$ 이며, q_i 는 i 번째 층의 층간 동요(interstory drifts), M, C, K 는 각각 질량, damping, 그리고 stiffness에 대한 행렬이다. 또한 이는 다음의 행렬(14)를 갖는 표준형 상태 방정식(1)의 형태로 기술된다.

$$\text{여기서 } x \in \mathbb{R}^{12} = [q(t)^T \dot{q}(t)^T]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ M^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [I_{6 \times 6} : 0_{6 \times 6}] \quad (14)$$

그리고 각층에 대하여 질량(m_i)는 345.6[ton], stiffness(k_i)는 3.404×10^8 [N/m], 그리고 감쇠 상수(c_i , damping coefficient)는 2.937×10^5 [N.s/m]이다. 또한, 외란으로는 1971년 발생한 샌프란시스코의 Pacoima 지진 data를 이용했다. 이번 모의 실험에서는 $D_{12} = 0$ 라 하였다.

모의 실험 결과를 보면, 표 1은 $w_{\text{max}} = 0.4g$ 인 경우 구동기의 용량에 따른 γ 이다. 또한, 표 2는 $r_i = 10^{-10}$ 일 때의 구동기 용량에 따른 최대 동요(Peak Drifts)를 보여주고 있다. 즉, 구동기의 용량이 클수록 더 좋은 성능을 수행하게 됨을 알 수 있다. 표 3은 r_i 값의 변화에 따른 최대 동요(Peak Drifts)를 보여주고 있으며, r_i 의 값을 작게 함으로써 성능을 개선시킬 수가 있다.

그림 2는 외란으로 사용된 Pacoima 지진 기록이다. 그림 3과 그림 4는 $r_i = 10^{-10}$, $w_{\text{max}} = 0.4g$ 이고 $u^{\text{lim}} = 1500$ kN 일 때의 각 층의 동요와 제어 입력을 나타낸다.

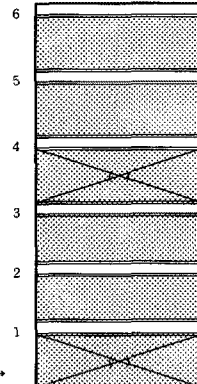


그림 1. 2개의 능동 제어기를 가지는 6층 빌딩

표 1. 최소 L_2 이득 γ ($w_{\text{max}} = 0.4g$)

$u_1^{\text{lim}} = u_2^{\text{lim}}$ (kN)	Open Loop	Closed Loop
500	0.1474	0.1459
1500	0.1474	0.1426
3000	0.1474	0.1376

표 2. 다른 크기의 u^{lim} 에 따른 응답 ($w_{\text{max}} = 0.4g$)

Excitation Level	$w_{\text{max}} = 0.4g$			
	Open	500	1500	3000
u^{lim} (kN)				
x_1 (cm)	2.2705	1.9206	1.8085	1.4954
x_2 (cm)	2.0394	1.8406	1.7198	1.4812
x_3 (cm)	1.7252	1.5361	1.4093	1.1499
x_4 (cm)	1.3914	1.2460	1.3670	1.1436
x_5 (cm)	1.0033	0.8628	0.7283	0.6656
x_6 (cm)	0.5293	0.4562	0.3915	0.3595

표 3. 다른 r_i 에 따른 응답 ($w_{max} = 0.4g$)

$\frac{1}{r_i}$	x_1 [cm]	x_2 [cm]	x_3 [cm]	x_4 [cm]	x_5 [cm]	x_6 [cm]	$ u_1^{max} $ [kN]	$ u_2^{max} $ [kN]
10^9	2.27	2.04	1.71	1.39	1.00	0.53	0.18	125.30
10^8	2.26	2.04	1.72	1.39	1.01	0.53	1.88	125
10^7	2.26	2.04	1.72	1.39	1.00	0.53	18.61	12.46
10^6	2.23	2.01	1.70	1.36	0.99	0.52	183.28	122.50
10^5	1.97	1.81	1.51	1.14	0.87	0.46	1500	1008
10^{10}	1.81	1.72	1.41	1.37	0.73	0.39	1500	1500
10^{11}	1.83	1.70	1.44	1.50	0.70	0.38	1500	1500
10^{12}	1.82	1.71	1.44	1.51	0.70	0.38	1500	1500

4. 결 론

포화 구동기가 존재하는 선형 시스템에서의 안정성은 포화 구동기의 비선형성으로 인해 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하게 된다.

이에 본 논문에서는 외란으로부터 출력까지의 H_∞ 노음이 주어진 값과 같거나 작아지도록 하는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계를 보였다. 그리고 제한된 구동기를 갖는 지진에 여기된 빌딩에 대한 모의 실험을 통해 본 논문에서 제시된 결과가 기존의 결과에 비해 유용함을 보였다.

(참 고 문 헌)

- [1] R.L.Kosut, "Design of linear systems with saturating linear control and bounded states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 121-124, 1983.
- [2] W. J. Wang and B. S. Chen, "Stability of large-scale systems with saturating actuators," *Int. J. Contr.*, vol. 47, no. 3, pp. 827-850, 1988.
- [3] B. S. Chen and S. S. Wang, "The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator : Time domain approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 5, pp. 483-487, 1988.
- [4] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel, "Application of active control to building under seismic excitation : Actuator saturation," *Proc. of the 1998 IEEE Int. Conf. on Contr. Applica.*, Trieste, Italy, September, 1998.
- [5] T. Nguyen, F. Jabbari, and S. de Miguel, "Controller Designs for Seismic-Excited Buildings with Bounded Actuators," *J. Engrg. Mech.*, vol. 124, no. 8, pp. 857-865, 1998.
- [6] T. Nguyen and F. Jabbari, "Disturbance attenuation for systems with input saturation : An LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 44, no. 4, pp. 852-857, 1999.
- [7] J. Geoffrey Chase, Scott E. Breneman and H. Allison Smith, "Robust H_∞ Static output feedback control with actuator saturation," *J. Engrg. Mech.*, vol. 125, no. 2, 1999.
- [8] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Cont.*, vol. 39, no. 1, pp. 225-229, 1994.
- [9] 조현철, 김진훈, "포화구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계", 대한전기학회 논문집, 49권 제4호, pp. 191-200, 2000.
- [10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [11] Gahinet P., Nemirovski, Laub A. J., Chilali M., "LMI Control Toolbox", The Mathworks Inc., 1995.

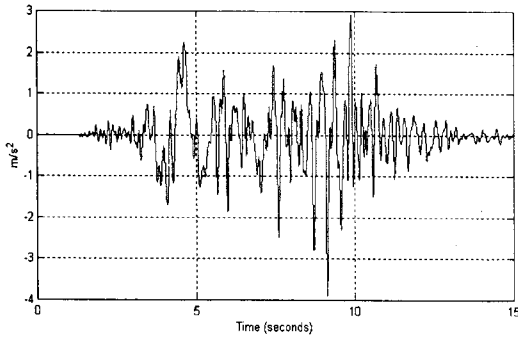


그림 2. Pacoima 0.4g 지진

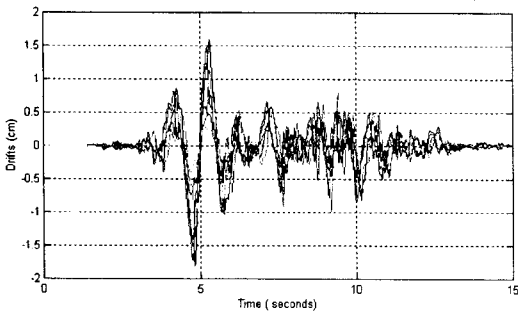


그림 3. 각 층의 동요(drifts)

($r_i = 10^{-10}$, $w_{max} = 0.4g$, $u_1^{lim} = u_2^{lim} = 1500$ kN)

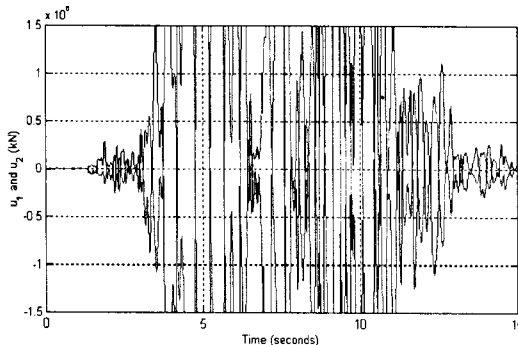


그림 4. 제어 입력

($r_i = 10^{-10}$, $w_{max} = 0.4g$, $u_1^{lim} = u_2^{lim} = 1500$ kN)